A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK MAXIMUM-ELVÉRŐL, I.

ADLER GYÖRGY és FREUD GÉZA

Bevezetés

A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elve értelmében korlátos tartományra kiterjedt hővezető testben a hőmérsékleti maximum (és hasonlóképpen a hőmérsékleti minimum) vagy a kezdő időpontban, vagy pedig a hővezető test peremén lép fel. (L. LEVI [3], TYIHONOV [6]). Ezt a tételt a továbbiakban röviden TYIHONOV-tételnek fogjuk nevezni, miután legügyesebb bizonyítása TYIHONOV-tól származik.

Várható, hogy amennyiben a test peremének egy része hőszigetelt, úgy hőmérsékleti maximum, illetve minimum a perem hőszigetelt részén sem léphet fel, kivéve esetleg a kezdő időpontot. Az alábbiakban ezt fogjuk igazolni. Két tételt mondunk ki és bizonyítunk be. Az első tételben csak a kétdimenziós esetre szorítkozunk, viszont ezen a kereten belül a test hővezetési együtthatója függhet a helytől. A második tétel akárhány dimenzió esetén érvényes, de a hővezetési együtthatónak helytől függetlennek kell lennie. Megjegyezzük, hogy egydimenziós esetben a probléma majdnem triviális módon visszavezethető a TYIHONOV-tételre, amint a szerzők egyike egy korábbi dolgozatában megmutatta (lásd : FREUD G. [1]). Lényegében ugyanezt az eljárást (tudniillik a hőmérsékleti függvény tükrözését a hőszigetelt peremen) használjuk fel az I. tétel bizonyításánál. A II. tétel bizonyításánál E. LEVI egy ötletét használjuk fel (lásd : [3]).

1. §. A maximum-elv kiterjesztése a kétdimenziós esetben

I. tétel: *A $V(x, y, t)$ függvény tegyen eleget az (x, y) sík Jordan-görbével határolt R korlátos tartományában a hővezetés*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a(x, y, t)^2 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \big(a(x, y, t) > 0 \big) \tag{1}$$

differenciálegyenletének $0 \leqq t \leqq T$ *esetén, továbbá elégítse ki a R tartomány S peremének S^* nyílt részhalmazán a*

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

peremfeltételt, ahol $\mathbf{n}$ *a belső normálist jelenti.* S^**-ról feltételezzük, hogy összefüggő komponensei analitikus ívekből állnak.* $V(x, y, t)$ S^**-on is legyen kétszer folytonosan differenciálható, elégítse ki az (1) egyenletet és az egész* S*-en legyen folytonos. Ekkor* $V(x,y,t)$ *maximumát, illetve minimumát csak a* S *perem* $S - S^*$ *részhalmazán, vagy pedig a* $t = 0$ *időpillanatban veheti fel.*

Bizonyítás: Először bebizonyítjuk a tételt egy speciális esetben. Legyen R félkör és az S^* peremrész a félkör átmérője. Kimutatjuk, hogy $V(x, y, t)$ maximumát, illetve minimumát csak a félkör ívalakú peremén, vagy pedig a $t = 0$ időpillanatban veheti fel. Ez a következőképpen látható be: Tükrözzük a félkört az S^* átmérőre. Az így kapott teljes kör alsó felében értelmezzük $V(x, y, t)$-t úgy, hogy az S^* átmérőre szimmetrikus pontokban egyenlő értékeket vegyen fel. Ekkor $V(x, y, t)$ a teljes nyilt körlemezen kielégíti az (1) egyenletet és a peremen is folytonos. Így alkalmazható rá a Tyihonov-tétel. Tehát $V(x, y, t)$ maximumát, illetve minimumát $0 \leq t \leq T$ esetén csak a kör kerületén, vagy pedig a $t = 0$ időpillanatban veheti fel. Minthogy az eredeti félkör S^* átmérője a teljes kör belsejébe esik, $V(x, y, t)$ valóban nem veheti fel maximumát, illetve minimumát az S^* szakaszon.

Az általános esetet most visszavezetjük a fenti speciális esetre.

A $V(x, y, t)$ függvény elégítse ki a hővezetés (1) egyenletét az (x, y)-sík R tartományában. Tegyük fel, hogy V szélsőértékét az S^* hőszigetelt perem egy P_0 pontjában veszi fel. Kimutatjuk, hogy ez lehetetlenség.

Minthogy S^* nyílt halmaz, P_0 benne van S^*-nak egy S_1^* összefüggő nyílt részhalmazában. A Riemann-féle leképezési tétel szerint van egy olyan, a tartomány belsejében analitikus $w = \varphi(z)$ komplex változós $(z = x + iy)$ egyrétű függvény, mely az (x, y) sík R tartományát az (u, v) sík $(w = u + iv)$ egy félkörébe viszi át, mégpedig oly módon, hogy a R tartomány S_1^* peremrészének a félkör átmérője feleljen meg. Ezen $u + iv = \varphi(x, y)$ transzformációnál az (1) egyenlet a következőbe megy át:

$$\text{2)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{a^2}{|\varphi'|^2} \frac{\partial V}{\partial t},$$

ahol φ' a leképező függvény deriváltja, mely a leképezés egyrétűsége következtében nem tűnhet el.

Tekintettel arra, hogy S_1^* analitikus ív, a $V(u, v, t)$ függvény a félkör átmérőjén is kétszer folytonosan differenciálható marad, a $V(u, v, t)$ függvényre alkalmazható a Tyihonov-tétel élesítésének fentebb már bebizonyított speciális esete, melynek értelmében $V(u, v, t)$ szélső értékét, vagy a perem félkörív alakú részén, vagy pedig a $t = 0$ időpillanatban veszi fel. Tekintettel arra, hogy a V függvény az (x, y) sík és az (u, v) sík egymásnak megfelelő pontjaiban egyenlő értékeket vesz fel, következik, hogy a $V(x, y, t)$ függvény a félkör átmérőjének megfelelő S_1^* peremszakaszon $t > 0$ esetén nem veheti fel szélsőértékét.

2. §. A maximum-elv többdimenziós esetben

Mint ismeretes, egy felületet Ljapunov-felületnek nevezünk, ha eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Minden pontjában van érintősíkja;

2. A felület P pontjában húzott $\boldsymbol{n}(P)$ normális vektora, mint a felületi pont függvénye, eleget tesz az

$$|\boldsymbol{n}(P_1) - \boldsymbol{n}(P_2)| \leqq A(\overline{P_1P_2})^\delta$$

Lipschitz-feltételnek (A és δ pozitív állandók).

II. tétel: *A $V(x, y, z\,;\,t)$ függvény tegyen eleget az (x, y, z) tér egy korlátos R tartományában a hővezetés*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (a^2 > 0, \text{ konst.}) \tag{3}$$

differenciálegyenletének $0 < t \leqq T$ esetén, továbbá elégítse ki a R tartomány S peremének S^* nyílt részhalmazán a $\partial V/\partial \boldsymbol{n} = 0$ peremfeltételt. S^* legyen véges sok Ljapunov-felület egyesítése és S legyen Jordan-felület. Feltesszük, hogy V az egész S-en folytonos és **grad** *V S^*-on folytonos és korlátos. Ekkor $V(x, y, z\,;\,t)$ $R + S$-beli maximumát, illetve minimumát vagy felveszi a S perem $S - S^*$ részhalmazán, vagy pedig csak a $t = 0$ időpillanatban veheti fel.*

A bizonyítás egyszerű gondolatmenete mellett néhány hosszadalmasabb meggondolásra lesz szükségünk. Ezeket segédtételek formájában a bizonyítás után közöljük.

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekte, hogy $V(x, y, z\,;\,t)$ pl. M maximumát az S^* peremen veszi fel a $t_1 > 0$ időpillanatban, míg $0 \leqq t \leqq t_1$ esetén az $S - S^*$ peremen $V(x, y, z\,;\,t)$ maximumára:

$$\max_{(x,y,z) \in S-S^*} V(x, y, z\,;\,t) = N < M.$$

A $V(x, y, z\,;\,t)$ függvény a M maximumát csak az S^* belső részhalmazán veheti fel, mert V-ről feltettük, hogy az egész S peremen folytonos és V maximuma a zárt $S - S^*$ peremrészen határozottan kisebb M-nél.

Legyen P olyan pontja az S^* peremrésznek, hogy itt

$$V(P, t_1) = M\,.$$

Tekintsük az

$$F:\; V(x, y, z\,;\,t) = c \qquad (N < c < M, \quad \operatorname{Max} |V(x, y, z, 0)| < c)$$

nívó-felületet. Ennek egy F_1 összefüggő része S^* egy belső S_1^* részével olyan zárt felületet alkot, hogy $P \in S_1^*$.

Ekkor azonban a $F + S_1^*$ zárt felület által határolt R^* tartományban — tekintettel arra, hogy a peremen a $V(x, y, z\,;\,t)$ függvény a

$$\left.\begin{array}{ll} V(x, y, z\,;\,t) = c\,, & (x, y, z) \in F \\[2ex] \dfrac{\partial V(x, y, z\,;\,t)}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 & (x, y, z) \in S_1^* \end{array}\right\} \quad (0 < t \leqq t_1)$$

peremfeltételeket elégíti ki és a bizonyítandó 1. segédtétel szerint a kérdéses peremértékfeladat unicitása fennáll — csak $V(x, y, z\,;\,t) \equiv c$ $(0 < t \leqq t_1)$ lehet, ami ellentmond annak, hogy a P pontban $V(x, y, z\,;\,t)$ az M értéket veszi fel.

1. (unicitási) segédtétel: Legfeljebb egy olyan $V(x, y, z;\ t)$ függvény van, mely a fentebb definiált R^* tartományban $(0 < t \leqq t_1)$ esetén kielégíti a (3) differenciálegyenletet a II. tételben kirótt feltételek mellett.

Tegyük fel ugyanis, hogy két olyan V_1 és V_2 függvény létezik, mely eleget tesz a feltételeknek. Alkalmazzuk a Green-tételt [4] az $u = V_1 - V_2$ függvényre rögzített t mellett a R^* tartomány esetén[1]) (R^* t függvénye):

$$\int\limits_{R^*} u \triangle u \, d\tau + \int\limits_{R^*} (\boldsymbol{grad}\, u)^2 \, d\tau = \int\limits_{F+S_1^*} u \frac{\partial u}{\partial n} \, df;$$

(3)-ból helyettesítve $\triangle u$-t:

$$\frac{1}{2} a^2 \int\limits_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 \, d\tau + \int\limits_{R^*} (\boldsymbol{grad}\, u)^2 \, d\tau = \int\limits_{F+S_1^*} u \frac{\partial u}{\partial n} \, df.$$

A peremfeltételekből következik, hogy a jobboldali integrál eltűnik. Ezt figyelembevéve, és 0-tól t-ig t szerint integrálva:

$$\frac{1}{2} a^2 \int\limits_0^t dt \int\limits_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 \, d\tau + \int\limits_0^t dt \int\limits_{R^*} (\boldsymbol{grad}\, u)^2 \, d\tau = 0.$$

Itt az első integrált úgy fogjuk fel, mint egy (x, y, z, t) térbeli térfogati integrált és az integrációk sorrendjét megcserélve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} a^2 \int\limits_0^t dt \int\limits_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 \, d\tau = \frac{1}{2} a^2 \int\limits_{R^*} u^2 \, d\tau.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{1}{2} a^2 \int\limits_{R^*} u^2 \, d\tau + \int\limits_0^t dt \int\limits_{R^*} (\boldsymbol{grad}\, u)^2 \, d\tau = 0.$$

Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $u = 0$, tehát $V_1 \equiv V_2$ az egész R^* tartományban.

Még hátra van annak kimutatása, hogy a Green-tétel alkalmazható a R^* tartomány esetében.[2]) Ehhez kimutatjuk, hogy a F nívó-felület Ljapunov-felület, illetve egyes szinguláris pontjainak és az S^* felülettel alkotott metszésvonalának tetszőleges kicsiny környezete elhagyása után már Ljapunov-felület. Ezt a 2. segédtételben bizonyítjuk be. Ha az F felület teljesen egészében Ljapunov-felület, akkor — tekintettel S_1^* véges sok Ljapunov-felületből álló voltára — a Green-tétel minden további meggondolás nélkül alkalmazható.

[1]) Azt, hogy a Green-tétel az R^* tartomány esetén alkalmazható-e, a továbbiakban részletesen meg fogjuk vizsgálni.

[2]) A Gauss-tétel, illetve a Green-tétel alkalmazhatóságára vonatkozóan lásd [2] 27. oldalát.

Amennyiben a F felületnek fentebb említett szinguláris pontjai vannak, illetve az S^* felülettel alkotott metszésvonalának tetszőlegesen kicsiny környezete elhagyása után lesz csak F Ljapunov-felület, úgy ez a nehézség az alább vázolt módon küszöbölhető ki.

Az F felületből elég kicsiny sugarú gömbökkel kirekesztjük a szinguláris pontokat, és egy vékony csőszerű felülettel — melynek felszínét majd zérushoz tartatjuk — kirekesztjük a $F + S_1^*$ felületből az F és S^* felületek metszésvonalát. A metszésvonal ily módon való kirekeszthetőségéhez a 3. segédtételben bebizonyítjuk, hogy a metszésvonal rektifikálható görbe.

A szinguláris pontok, illetve a metszésvonal kirekesztése után a R^* tartomány megmaradó részére már alkalmazható a Green-tétel. A kirekesztő gömbök és a csőszerű felület felszínét zérushoz tartatva, tekintettel V és *grad* V R-beli és így R^*-beli korlátosságára, kapjuk, hogy a Green-tétel az eredeti R^* tartomány esetén is alkalmazható.

2. segédtétel: A hővezetés differenciálegyenletét kielégítő $V(x, y, z\,; t)$ függvény $V(x, y, z\,; t) = c$ F nívó-felületének bármely, teljesen a R tartomány belsejében levő F^* részfelülete Ljapunov-felület, legfeljebb egyes izolált pontok tetszőlegesen kicsiny környezete kivételével.

Ennek igazolására be kell bizonyítani, hogy a kérdéses F^* nívó-felület kielégíti a Ljapunov-felület három kritériumát, legfeljebb egyes pontok tetszőlegesen kicsiny környezete kivételével.

a) A felület bármely pontjában van egyértelműen meghatározott érintősík és így meghatározott felületi normális is. Ez nyilvánvaló következménye annak az ismert ténynek, hogy a hővezetés differenciálegyenletét kielégítő $V(x, y, z\,; t)$ függvény bármely változója szerint akárhányszor folytonosan differenciálható a tartomány belsejében.

b) Ha ϑ az M_1 és M_2 pontbeli normálisok hajlásszöge, akkor

$$\vartheta < E(\overline{M_1M_2})^\delta \qquad (0 < \delta \leq 1), \tag{4}$$

ahol E és δ meghatározott számok. Elegendő a (4) tulajdonságot az M_1 és M_2 pontbeli normálisok iránycosinusaira bebizonyítani, ebből már nyilvánvalóan következik a ϑ-ra vonatkozó állítás is.

A normálisnak például az x tengellyel bezárt szögének iránycosinusa:

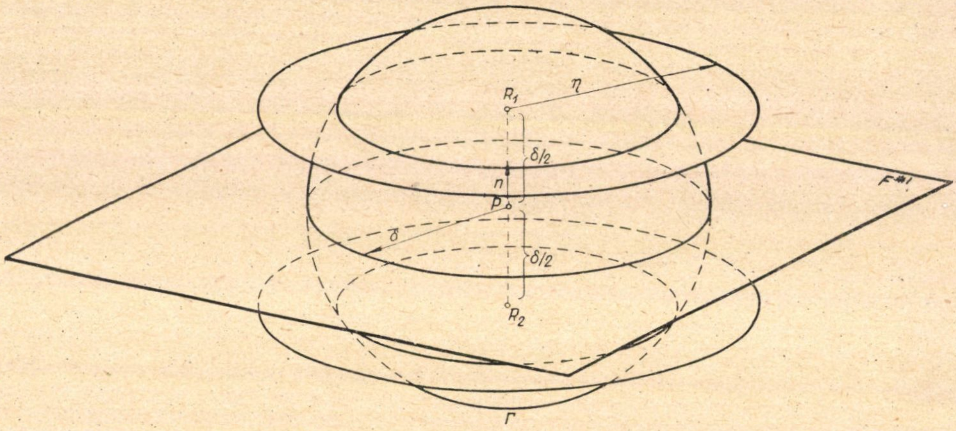
$$\cos\alpha = \frac{\partial V/\partial x}{|\textit{grad}\, V|}.$$

Tekintettel arra, hogy a $V(x, y, z\,; t_1)$ függvény minden $t_1 > 0$ időpontban a helykoordinátáknak a tartomány belsejében analitikus függvénye, *grad* V csak véges sok pontban tűnhet el. Ezeket a pontokat, továbbá az F felület és az S^* felület metszésvonalát egy kis környezetükkel együtt kizárjuk a felületből. A megmaradó felületén $\cos\alpha$ az x, y, z koordináták folytonosan differenciálható függvénye, tehát $\delta = 1$ exponensű egyenletes Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

c) Létezik olyan $d > 0$ szám, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: a felület bármely M pontjához tartozó normálisával párhuzamos egyenes legfeljebb egy pontjában döfi a felületnek az M centrumú, d sugarú gömbben levő részét.

Ez a következőképpen látható be: Legyen $F^{*\prime}$ az F^*-nak azon zárt részhalmaza, melyet F^*-ből a F^*-felület $|\mathbf{grad}\, V| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontjai elhagyásával kapunk. Tehát a $F^{*\prime}$ felületen $|\mathbf{grad}\, V| \geqq \varepsilon$. Minthogy $\mathbf{grad}\, V$ az egész S felület által határolt tartomány belsejében folytonos, ezért ezen tartomány minden belső zárt résztartományán egyenletesen folytonos. Egy ilyen belső zárt résztartomány legyen Z, melynek $F^{*\prime}$ a belsejében van, és $\varepsilon > 0$ olyan, az egyenletes folytonosságnak megfelelő szám, hogy a $\overline{P_1P_2} < \delta$ $(P_1, P_2 \in Z)$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontokra

$$|\mathbf{grad}\ V(P_1) - \mathbf{grad}\ V(P_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



1. ábra

Az $F^{*\prime}$ egy tetszőleges P pontja körül δ sugárral gömböt rajzolunk. E gömbön belül $|\mathbf{grad}\, V| > \varepsilon/2$. Tehát a P pontbeli $\mathbf{n}$ felületi normális egyenesen P-től $\delta/2$ távolságban levő R_1, illetve R_2 pontokban a $V(x, y, z\,; t_1)$ függvény értékére:

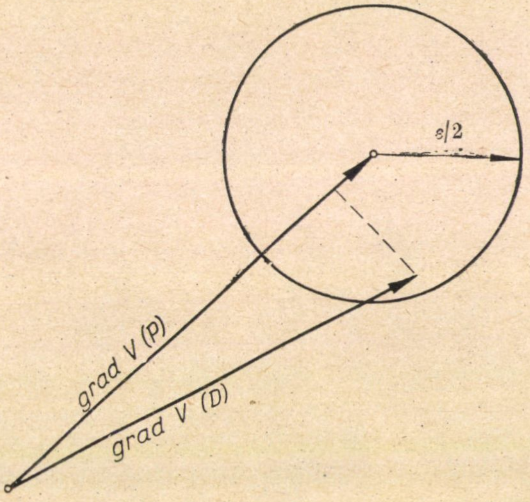
$$V(R_1) > c + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\delta}{2} = c + \frac{\varepsilon\delta}{4},$$

illetve

$$V(R_2) < c - \frac{\varepsilon\delta}{4}.$$

A V függgvény Z-beli egyenletes folytonosságából következik, hogy van olyan $\eta > 0$ szám, hogy $\overline{P_1P_2} < \eta$ $(P_1, P_2 \in Z)$ esetén $|V(P_1) - V(P_2)| < < \varepsilon\delta/8$. Tehát az R_1, illetve R_2 centrumú, η sugarú gömbökben $V > c + \varepsilon\delta/8$, illetve $V < c - \varepsilon\delta/8$. Tekintsük a P pont körül $h = \min(\delta, \eta)$ sugárral rajzolt gömböt. Minden olyan, a P pontbeli $\mathbf{n}$ normálissal párhuzamos g egyenes, mely a P ponttól h-nál kisebb távolságra van, áthalad az R_1 és R_2 centrumú, η sugarú gömbökön. Tehát egy ilyen g egyenes mentén a $V(x, y, z\,; t_1)$ függvény felvesz c-nél nagyobb, illetve c-nél kisebb értékeket az $F^{*\prime}$ egyik, illetve másik oldalán. Ennélfogva közben a g egyenes mentén $V = c$, mégpedig a g egyenes és a $P^{*\prime}$ felület D döféspontjában. Ilyen döféspont azonban a Γ gömbön belül csak egy lehet, mert ha $V(x, y, z\,;\, t_1)$ két helyen venné fel a g egyenesen a Γ gömbön belül a c értéket, akkor közben **grad** $V(D)$ $\boldsymbol{n}$-irányú komponense eltűnne, ami lehetetlen. Ugyanis **grad** $V(P)$-t és **grad** $V(D)$-t egy pontból felrajzolva, **grad** $V(D)$ végpontjának benne kell lennie a **grad** $V(P)$ végpontja körül $\varepsilon/2$ sugárral rajzolt gömbben, és minthogy $|\mathbf{grad}\, V(P)| \geqq \varepsilon$, **grad** $V(D)$-nek **grad** $V(P)$ irányú (mivel F nívófelület, ezért **grad** $V(P)$ iránya egyben $\boldsymbol{n}$ iránya is!) komponensére $|\mathbf{grad}_n\, V(D)| \geqq \varepsilon/2$.

Tehát h választható a Ljapunov-felület $c)$ kritériumában szereplő $d > 0$ szám gyanánt.



2. *ábra*

3. segédtétel. A $V(x, y, z\,;\, t)$ függvény $V(x, y, z\,;\, t_1) = c$ nívó-felülete az $F(x, y, z) = 0$ egyenlettel jellemzett S^* peremfelületet csak véges sok rektifikálható ívből álló görbében metszheti.

Minthogy S^* véges sok Ljapunov-felületből áll, elég bizonyítani, hogy a kérdéses nívó-felületnek és tetszőleges Ljapunov-felületnek (ennek egyenlete is $F(x, y, z) = 0$ legyen) metszésvonala rektifikálható görbe.

Ugyanis a

$$V(x, y, z\,;\, t_1) = c,$$

$$F(x, y, z) = 0$$

rendszerből az implicit függvényrendszerre vonatkozó tétel (lásd pl.: [5], II. kötet 396. oldal) alapján a metszésvonal paraméteres egyenletrendszere, az

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

$$z = z(s)$$

differenciálható függvények kiszámíthatók. Ez abból következik, hogy a metszésgörbe olyan, egymást átfedő szakaszokra bontható, hogy egy ilyen szakaszon belül a

$$\frac{\partial(F,V)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(F,V)}{\partial(x,z)}, \quad \frac{\partial(F,V)}{\partial(x,y)}$$

Jacobi-determinánsoknak legalább egyike nem tűnik el. Ha pl. $\partial(F,V)/\partial(y,z) \neq 0$ egy ilyen szakaszon, akkor itt x választható az s paraméter gyanánt.

A Jacobi-determinánsok el nem tűnésére vonatkozó állításunk így látható be:

Tekintettel arra, hogy $\partial V/\partial n = 0$ az S^*-on, következik, hogy **grad** V benne van S^* érintősíkjában, és így **grad** V és **grad** F merőlegesek egymásra. Pl. a $\partial(F,V)/\partial(y,z)$ determináns eltűnése azt jelentené, hogy **grad** V és **grad** F (y,z)-síkbeli komponense párhuzamos, vagyis a metszésgörbe érintője merőleges az x-tengelyre. Minthogy a metszésgörbe érintője nem lehet egyidejűleg merőleges mindhárom koordináta-tengelyre, következik, hogy mindhárom Jacobi-determináns egyszerre nem tűnhet el. A Jacobi-determinánsok folytonosságából (ez **grad** V folytonosságából és az S^* felületre tett megszorításokból következik) adódik, hogy a metszésgörbe azon szomszédos szakaszai, ahol egyik, illetve másik Jacobi-determináns nem tűnik el, egymást átfedik.

IRODALOM

[1] FREUD G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 391—392.

[2] И. М. ГЮНТЕР: *Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики.* Гостехиздат, Москва, 1953.

[3] E. E. LEVI: „Sull'equazione del calore." *Annali di Matematica* (Ser. III). **14** (1908) 187—264.

[4] A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.

[5] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei.* Közoktatásügyi Kiadó Vállalat, Budapest, 1951.

[6] A. TYCHONOFF: „Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur." *Recueuil Mathématique (Szbornyik)* **42** (1935) 199—216.

(Beérkezett: 1956. II. 11.)

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, I.

ДЬ. АДЛЕР и Г. ФРЕЙД

Резюме

В силу принципа максимума для дифференциального уравнения теплопроводности максимум (и минимум) температуры тела, заполняющего некоторую ограниченную область, достигается либо в начальный момент, либо на границе тела (см. ЛЕВИ [3], ТИХОНОВ [6]). Можно ожидать, что, если часть границы тела теплоизолирована, то мак-

симум (и соответственно минимум) температуры не может достигаться там, исключая разве лишь начальный момент времени.

В связи с этим доказываются следующие две теоремы:

Теорема I. Пусть при $0 \leq t \leq T$ функция $V(x, y, t)$ удовлетворяет в области R плоскости (x, y) ограниченной кривой Жордана S дифференциальному уравнению теплопроизводности (1), а на открытом подмножестве S^* границы S границому условию $\partial V/\partial \boldsymbol{n} = 0$, где $\boldsymbol{n}$ — обозначает внутренную нормаль. Связные компоненты множества S^* состоят из аналитических дугов. Пусть, далее, $V(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и на S^* и непрерывна и на всей S. Тогда $V(x, y, t)$ может достигнуть свой максимум лишь на подмножестве $S-S^*$ границы S или в момент времени $t = 0$.

Теорема II. Пусть при $0 < t \leq T$ функция $V(x, y, z, t)$ удовлетворяет в ограниченной области R пространства (x, y, z) уравнению теплопроизводности (3), а на открытом подмножестве S^* границы S области R граничному условию $\partial V/\partial \boldsymbol{n} = 0$. Пусть S^* состоит из конечного числа поверхностей Ляпунова. Предположим, что V непрерывна на всей S, а $\boldsymbol{grad}\, V$ непрерывен и ограничен на S^*. Тогда $V(x, y, z, t)$ может достигнуть свой максимум (соответственно минимум) лишь на подмножестве $S-S^*$ границы S или в момент времени $t = 0$.

Доказательство теоремы I основывается на основной *теореме Римана* о конформном преобразования и на отражении температурной функции через теплоизолированную границу.

Доказательство теоремы II оспована на одну идею Э. Э. Леви (см. [3]). Доказательство теоремы II может быть распространено на какое-угодно число измерений.

SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR, I.

GY. ADLER et G. FREUD

Résumé

Selon le principe du maximum de l'équation de la chaleur, le maximum (et de même le minimum) de la température d'un corps conducteur de la chaleur apparait ou bien à l'instant initial, ou bien sur la frontière du corps conducteur de la chaleur (voir Levi [3], Tychonoff [6]). On peut supposer que si une partie de la frontière est thermiquement isolée, le maximum resp. le minimum de la température ne peut pas apparaitre sur cette partie thermiquement isolée, sauf peut-être à l'instant initial.

En ce qui concerne ce problème, nous énoncons et nous démonstrons les deux théorèmes suivants :

Théorème I : Supposons que la fonction $V(x, y\ ;\ t)$ satisfait l'équation différentielle (1) de la chaleur dans le domaine borné R du plan (x, y) limité par une courbe de Jordan S quand $0 \leq t \leq T$, et qu'elle remplisse la condition aux limites $\partial V/\partial \boldsymbol{n} = 0$ sur l'ensemble partiel ouvert S^* de la frontière S de R, où $\boldsymbol{n}$ signifie la normale intérieure. Les composantes connexes de S^* sont formées par des arcs analytiques. $V(x, y\ ;\ t)$ doit également satisfaire l'équation (1) sur S^*, de plus elle doit être continue sur toute la courbe S. Dans ces conditions la fonction $V(x, y\ ;\ t)$ ne peut prendre son maximum resp. son minimum que sur l'ensemble $S - S^*$ de S ou bien à l'instant $t = 0$.

Théorème II : Supposons que la fonction $V(x, y, z\ ;\ t)$ satisfait l'équation différentielle (3) de la chaleur dans le domaine borné R de l'espace (x, y, z) limité par une surface S, quand $0 < t \leq T$, et qu'elle remplisse la condition aux limites $\partial V/\partial \boldsymbol{n} = 0$ sur l'ensemble partiel ouvert S^* de la frontière S. Soit en outre S^* la somme des surfaces de Lyapounoff en nombre fini, et S surface de Jordan. $V(x, y, z\ ;t)$ est continue sur toute la surface S et $\boldsymbol{grad}\ V$ est continue et bornée sur S^*. Dans ces conditions la fonction $V(x, y, z\ ;\ t)$ prend son maximum resp. son minimum ou sur l'ensemble $S - S^*$ de S, ou bien à l'instant $t = 0$.

La démonstration du Théorème I se base sur le théorème de la représentation conforme de Riemann et sur la transformation par symmétrie de la fonction de température sur la frontière thermiquement isolée. Pour la démonstration du Théorème II nous nous sommes basés sur une idée de E. E. Levi (voir [3]). Le Théorème II peut être généralisé à des espaces de plus de trois dimensions.