HŐVEZETÉSI ÉS DIFFÚZIÓS FELADATOK ÖSSZETETT PEREMFELTÉTELEKKEL, II.

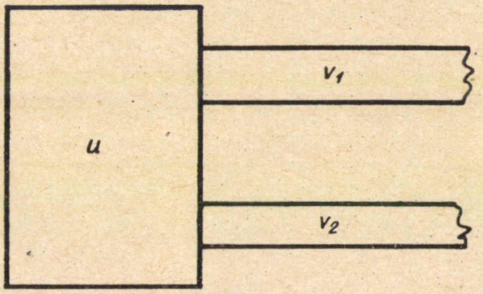
ADLER GYÖRGY

Freud Géza [2] rúdra vonatkozó hővezetési feladatokat tárgyalt, általa összetettnek nevezett peremfeltételek mellett.

Jelen cikk 1. §-ában két hasonló típusú feladatot oldok meg. A 2. §-ban igazolom a feladatok megoldása során végzett műveletek megengedett voltát. A 3. §-ban közlöm az 1. §-ban szereplő konstansok értékeit.

1. §. Két feladat

A. feladat. Egy hőtartályhoz két homogén, állandó keresztmetszetű, végtelen hosszú hővezető rúd csatlakozik. A hőtartályt olyan jó hővezetőnek képzeljük, hogy annak hőmérséklete csak időtől függ, helytől független. A hőtartály és a rudak között a lineáris hőátadási törvény érvényes. Felté-



1. ábra

telezzük, hogy a rudak egyes keresztmetszeteiben a hőmérséklet csak a tartálytól való távolságtól függ, vagyis adott keresztmetszet különböző pontjaiban a hőmérséklet ugyanaz. Más szóval a rudak oldalaik mentén hőszigeteltek. A keresett függvények tehát a hőtartály $U(t)$ és a rudak $V_1(x, t)$, illetve $V_2(x, t)$ hőmérséklete, ahol t az idő, x a hőtartálytól való távolság. A rudak anyagi minősége és keresztmetszete különböző is lehet, viszont megköveteljük, hogy a $t=0$ időpillanatban a rudak minden pontjában ugyanaz a $V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = \text{konst.}$ hőmérséklet uralkodjék és a továbbiakban ezt az értéket választjuk a hőmérsékleti skála nullpontjának.

$U(t)$-re, $V_1(x,t)$-re és $V_2(x,t)$-re a következő egyenletek érvényesek, illetve a következő perem- és kezdeti feltételeket adjuk meg:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \varkappa_1^2 \dfrac{\partial V_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \varkappa_2^2 \dfrac{\partial V_2}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{(2)} \quad A\frac{dU}{dt} + B_1[U(t) - V_1(0,t)] + B_2[U(t) - V_2(0,t)] = Q(t)$$

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -C_1[U(t) - V_1(0,t)] \\[2ex] \left.\dfrac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=0} = -C_2[U(t) - V_2(0,t)] \end{cases}$$

$$\text{(4)} \quad U(0) = U_0\,; \qquad V_1(x,0) = 0, \qquad V_2(x,0) = 0.$$

Az (1)—(3)-ban szereplő konstansok a hőtartály és a rudak anyagi minőségétől és méreteitől függnek és valamennyien pozitívak, ezt azonban a jelen A. feladatnál nem használjuk ki. $Q(t)$ jelenti az időegység alatt a hőtartállyal közölt hő mennyiségét. Ezt ismertnek tekintjük. A (2) tulajdonképpen a hőtartály hőmérlege, mely a hőenergia megmaradását fejezi ki.

A V_1 és V_2 függvényeket a következő alakban keressük:

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} V_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\varkappa_1^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_1(\tau)\,d\tau \\[3ex] V_2(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\varkappa_2^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_2(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Ezt a választást a következők indokolják:

A $e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4t}}/\sqrt{t}$ úgynevezett hőpólus-függvény az (1) egyenletnek megoldása (lásd: [1]) és így a felvett V_1, illetve V_2 függvények az (1) egyenleteket automatikusan kielégítik. Kielégítik továbbá a (4) kezdeti feltételek közül a két utolsót.

Az (5) alakú megoldások fizikai értelme az, hogy a rudakba az $x = 0$ végen a τ időpillanatban $W_1(\tau)$-val, illetve $W_2(\tau)$-val arányos hőmenyiség áramlik be időegység alatt és ez a rúdban szétáramlik. Ez a hővezetés elméletéből ismert tény.

Ilymódon az ismeretlen V_1, V_2 kétváltozós függvények helyett a W_1, W_2 egyváltozós függvényeket kell meghatároznunk.

A (2) és (3) egyenletek Laplace-transzformáltjából az U, W_1, W_2 függvények Laplace-transzformáltjai kiszámíthatók a konvolució-tétel segítségével (lásd: [4]). Ezek inverz transzformáltja a jelen A. esetben zárt alakban előállítható.

A Laplace-transzformáció operátorát jelöljük $\mathscr{L}$-lel. Legyen

$$\mathscr{L}[U(t)] = u(p), \qquad \mathscr{L}[W_i(t)] = w_i(p) \qquad (i = 1, 2).$$

A konvolució-tétel:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \Phi(x, t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\right] = \mathscr{L}[\Phi(x,t)]\,\mathscr{L}[\psi(t)]\,.$$

A $\Phi(x, t)$ függvénynek megfelelő hőpólus-függvény Laplace-transzformáltja [3]-ban megtalálható.

A (2) és (3) egyenletek Laplace-transzformáltjai:

$$(2') \qquad A[p\,u(p) - U_0] + B_1\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,w_1(p)\right] + B_2\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,w_2(p)\right] = q(p),$$

ahol

$$q(p) = \mathscr{L}[Q(t)].$$

$$(3') \qquad \begin{aligned} -\varkappa_1\sqrt{\pi}\,w_1(p) &= -C_1\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,w_1(p)\right] \\ -\varkappa_2\sqrt{\pi}\,w_2(p) &= -C_2\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,w_2(p)\right]. \end{aligned}$$

Innen

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,g(\sqrt{p}), \quad w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,h_1(\sqrt{p}), \quad w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,h_2(\sqrt{p}),$$

ahol

$$g(p) = \frac{[q(p^2) + AU_0]\,(\varkappa_1 p + C_1)\,(\varkappa_2 p + C_2)}{N(p)},$$

$$h_1(p) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{[q(p^2) + AU_0]\,(\varkappa_2 p + C_2)\,p}{N(p)},$$

$$h_2(p) = \frac{C_2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{[q(p^2) + AU_0]\,(\varkappa_1 p + C_1)\,p}{N(p)}.$$

$$N(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0\,.$$

(A cikkben előforduló konstansok értékét a 3. §-ban együtt közöljük.)

Az inverz Laplace-transzformációnál felhasználjuk a következő formulát (lásd [3], 169. oldal):

Ha $F(t)$ Laplace-transzformáltja $f(p)$, akkor $f(\sqrt{p})/\sqrt{p}$ inverz-transzformáltja:

$$(6) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\,F(x)\,dx\,.$$

Azon célból, hogy az inverz Laplace-transzformáció explicite elvégezhető legyen, a $Q(t)$ függvényt a következő alakban approximáljuk:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\gamma_i t} \qquad (\gamma_i \geqq 0).$$

A feladat megoldását csak három speciális esetben végezzük el, mert a fenti alakú $Q(t)$ esetén a feladat megoldása ezen három eset lineáris szuperpozíciója gyanánt állítható elő.

Ez a három speciális eset a következő:

$$1.\ U(0) = U_0, \qquad Q(t) = 0;$$

$$2.\ U(0) = 0, \qquad Q(t) = Q_0;$$

$$3.\ U(0) = 0, \qquad Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}.$$

1. eset: Parciális törtekre való bontás után:

$$g(p) = \frac{AU_0}{a_3}\left[\frac{\lambda_1}{p-p_1} + \frac{\lambda_2}{p-p_2} + \frac{\lambda_3}{p-p_3}\right],$$

ahol p_1, p_2 és p_3 az $N(p) = 0$ egyenlet gyökei, amelyekről feltesszük, hogy különbözőek, továbbá

$$h_1(p) = \frac{AU_0C_1}{a_3\sqrt{\pi}}\left[\frac{\mu_1}{p-p_1} + \frac{\mu_2}{p-p_2} + \frac{\mu_3}{p-p_3}\right].$$

Az inverz transzformáltak:

$$G(t) = \frac{AU_0}{a_3}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e^{p_i t},$$

$$H_1(t) = \frac{AU_0C_1}{a_3\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3} \mu_i e^{p_i t}.$$

Végül (6) felhasználásával

$$U(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{AU_0}{a_3}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e^{p_i^2 t}\,\mathrm{Erf}\,(-p_i\sqrt{t}),$$

$$W_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{AU_0C_1}{a_3\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3} \mu_i e^{p_i^2 t}\,\mathrm{Erf}\,(-p_i\sqrt{t}),$$

ahol

$$\mathrm{Erf}\,(x) = \int_x^\infty e^{-v^2}\,dv.$$

W_2 a W_1-ből az (1), (2) és (3) egyenletekben szereplő konstansok 1, illetve 2 indexeinek felcserélésével adódik.

2. eset: Az előzővel teljesen analóg számítással adódik:[1]

$$U(t) = \frac{Q_0}{a_3}\left[\lambda_4 + \lambda_5 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \operatorname{Erf}\left(-p_i\sqrt{t}\right)e^{p_i^2 t}\right]$$

$$W_1(t) = \frac{Q_0}{a_3}\left[\mu_4 + \mu_5 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3}\mu_i \operatorname{Erf}\left(-p_i\sqrt{t}\right)e^{p_i^2 t}\right].$$

3. eset:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t},$$

$$q(p) = \frac{Q_0}{p+\gamma}.$$

$g(p)$ és $h_1(p)$ parciális törtekre bontása után kapjuk:

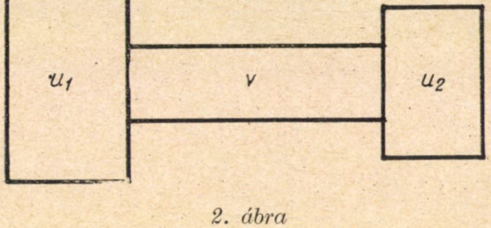
$$G(t) = \frac{Q_0}{a_3}\left[\frac{\lambda_4}{\sqrt{\gamma}}\sin\sqrt{\gamma}t + \lambda_5\cos\sqrt{\gamma}t + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i e^{p_i t}\right],$$

$$H_1(t) = \frac{Q_0}{a_3}\left[\frac{\mu_4}{\sqrt{\gamma}}\sin\sqrt{\gamma}t + \mu_5\cos\sqrt{\gamma}t + \sum_{i=1}^{3}\mu_i e^{p_i t}\right],$$

$$U(t) = \frac{Q_0}{a_3}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \operatorname{Erf}\left(-p_i\sqrt{t}\right)e^{p_i^2 t} + \left(\lambda_5 + \lambda_4\frac{2}{\sqrt{\gamma\pi}}\int_0^{\sqrt{\gamma\pi}} e^{x^2}\,dx\right)e^{-\gamma t}\right],$$

$$W_1(t) = \frac{C_1 Q_0}{a_3\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{3}\mu_i \operatorname{Erf}\left(-p_i\sqrt{t}\right)e^{p_i^2 t} + \left(\mu_5 + \mu_4\frac{2}{\sqrt{\gamma\pi}}\int_0^{\sqrt{\gamma\pi}} e^{x^2}\,dx\right)e^{-\gamma t}\right].$$

B. feladat. Egy l hosszúságú rúd mindkét végéhez csatlakozik egy-egy hőtartály, az A. feladatnál megadottakkal teljesen analóg feltételek mellett.



2. ábra

Megengedjük, hogy a hőtartályok anyagi minősége különböző legyen. A rúd hőmérsékletét $V(x, t)$-vel, a tartályokét $U_1(t)$-vel, illetve $U_2(t)$-vel jelöljük. A Laplace-transzformáltakat a megfelelő kis betűvel jelöljük.

[1] λ_i és μ_i természetesen most mást jelentenek, mint az 1. esetben.

Egyenleteink, illetve perem- és kezdeti feltételeink tehát a következők:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varkappa^2 \frac{\partial V}{\partial t} \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 \frac{dU_1}{dt} + B_1[U_1(t) - V(0,t)] = Q_1(t) \\ & A_2 \frac{dU_2}{dt} + B_2[U_2(t) - V(l,t)] = Q_2(t) \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = - C_1[U_1(t) - V(0,t)] \\ & \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=l} = C_2[U_2(t) - V(l,t)] \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$U_1(0) = U_{10}, \qquad U_2(0) = U_{20}; \qquad V(x,0) = 0. \tag{10}$$

Itt A_i, B_i, C_i mind pozitívak. (8) itt is az egyes hőtartályok hőmérlegét fejezi ki. A $V(x,t)$ függvényt most a következő alakban keressük:

$$V(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\varkappa^2 (l-x)^2}{4(t-\tau)}} W_2(\tau)\, d\tau .$$

Ez a választás azért indokolt, mert a fenti alakú $V(x,t)$ függvény kielégíti a (7) egyenletet és a (10) alatti kezdeti feltételt. $V(x,t)$ egyes tagjai a rúd $x=0$, illetve $x=l$ végén beáramló hőmennyiség további sorsáról adnak számot a rúd belsejében. $W_1(t)$ és $W_2(t)$ most is, mint az A. feladatnál, a megfelelő rúdvégeken időegység alatt beáramló hőmennyiségekkel arányosak.

A (8) és (9) egyenletek Laplace-transzformáltjai:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1[p\, u_1(p) - U_{20}] + B_1 \left[u_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\varkappa l \sqrt{p}}\, w_2(p) \right] = q_1(p) \\ & A_2[p\, u_2(p) - U_{20}] + B_2 \left[u_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, w_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\varkappa l \sqrt{p}}\, w_1(p) \right] = q_2(p) \end{aligned} \right. \tag{8'}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -a\sqrt{\pi}\, w_1(p) + a\sqrt{\pi}\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}\, w_2(p) = \\ & \qquad = - C_1 \left[u_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}\, w_2(p) \right] \\ & a\sqrt{\pi}\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}\, w_1(p) + a\sqrt{\pi}\, w_2(p) = \\ & \qquad = C_2 \left[u_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}\, w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, w_2(p) \right]. \end{aligned} \right. \tag{9'}$$

Innen a keresett függvények Laplace-transzformáltjai :

$$u_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{C_1}\,\frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p}\, N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}\,(a\sqrt{p} + C_1) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{C_1}\,\frac{\left(d_2 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_2 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p}\, N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}\,(a\sqrt{p} - C_1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\, g_1(\sqrt{p}).$$

$$u_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{C_2}\,\frac{\left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_1 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p}\, N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}\,(a\sqrt{p} + C_2) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{C_2}\,\frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p}\, N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}\,(a\sqrt{p} - C_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\, g_2(\sqrt{p}).$$

$$w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\, h_1(\sqrt{p}).$$

$$w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{\left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right)(a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right)(-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_2 p^{1/2})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}}{N(\sqrt{p})\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\, h_2(\sqrt{p}).$$

$$N(p) = (a_1 p^2 + b_1 p + c_1)(a_2 p^2 + b_3 p + c_2)\, e^{\varkappa l \sqrt{p}} - (-a_1 p^2 + b_1 p - c_1)(-a_2 p^2 + b_2 p - c_2)\, e^{-\varkappa l \sqrt{p}}.$$

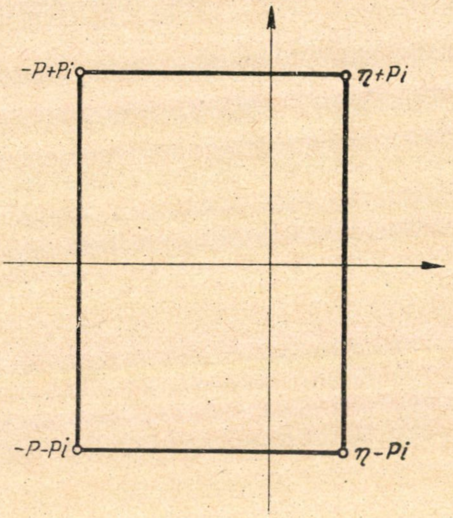
A g_1, g_2, h_1, h_2 függvények inverz transzformáltjait a reziduum-tétel felhasználásával állítjuk elő. Ugyanis a Riemann—Mellin-féle formula szerint a $f(p)$ függvény inverz Laplace-transzformáltja (lásd : [4]) :

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} e^{pt} f(p)\, dp, \tag{11}$$

ahol η tetszőleges valós szám, melyre fennáll az, hogy a $\mathcal{R}e\, p > \eta$ félsíkon $f(p)$ reguláris. Bizonyítás nélkül fel fogjuk használni, hogy a g_1, g_2, h_1, h_2 nevezőinek gyökhelyei, tehát ezen függvények összes szinguláris helyei az általunk vizsgálandó 1., 2. és 3. esetekben mind a képzetes tengelyen helyezkednek el. A reziduum-tétel alapján az ábrán megjelölt integrációs út esetén pl. h_1-re fennáll :

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_S e^{pt} h_1(p)\, dp = \sum_S \operatorname{Res}\,[e^{pt} h_1(p)], \tag{12}$$

ahol $\sum\limits_S$ jelenti, hogy az összegezés csak az S-en belüli reziduumokra terjed ki, és P olyan, hogy az S integrációs úton $h_1(p)$-nek nincs szingularitása.



3. ábra

Tekintettel arra, hogy a $N(p)$ nevező gyökeit $p = i\varphi$ helyettesítés után a

$$\text{tg}\,\varkappa l\varphi = \frac{\beta_3\varphi^3 - \beta_1\varphi}{\beta_4\varphi^4 - \beta_2\varphi^2 + \beta_0} \tag{13}$$

egyenlet szolgáltatja, elég nagy k-ra fennáll:

$$\varkappa l\varphi_k \approx k\pi\,, \quad \text{ha} \quad \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\varkappa l} < \varphi_k < \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\varkappa l}\,,$$

tehát elég nagy n-re a $P = (n + 1/2)\,\pi/\varkappa l$ választással a P-re vonatkozó kikötést teljesíthetjük. Kimutatjuk a 2. §-ban, hogy $P \to \infty$ esetén (12)-ben az $(\eta + Pi,\ - P + Pi)$, $(\eta - Pi,\ - P - Pi)$ és $(- P - Pi,\ - P + Pi)$ utakon az integrál 0-hoz tart, és így:

$$H_1(t) = \lim_{P\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\eta - Pi}^{\eta + Pi} e^{pt}\, h_1(p)\, dp = \sum \text{Res}\,[e^{pt}\, h_1(p)]\,.$$

Egyszerűség kedvéért az A. feladatnál mondottak mintájára a következő három speciális esetre szorítkozunk:

1. $U_{10} \neq 0 \qquad U_{20} = 0, \qquad Q_1(t) = Q_2(t) = 0.$
2. $U_{10} = U_{20} = 0, \qquad Q_1(t) = Q_{10}, \qquad Q_2(t) = 0.$
3. $U_{10} = U_{20} = 0, \qquad Q_1(t) = Q_{10}e^{-\lambda_1 t}, \qquad Q_2(t) = 0.$

Ezen esetek lineáris szuperpozíciójával az általános eset approximálható. A részletszámítások mellőzésével kapjuk:

$$U_i(t) = k_{i1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_{i2}\sqrt{t} + 2k_{i3}t + \sum_{\varphi_k>0}^{*} \left(p_{ik} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_{ik} \int\limits_0^{\varphi_k\sqrt{t}} e^{x^2}\,dx \right) e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_i(t) = l_{i1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} l_{i2}\sqrt{t} + \sum_{\varphi_k>0}^{*} \left(r_{ik} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_{sk} \int\limits_0^{\varphi_k\sqrt{t}} e^{x^2}\,dx \right) e^{-\varphi_k^2 t}.$$

Itt Σ^* azt jelenti, hogy a 3. esetben az összegezés a $p^2 + \lambda_1 = 0$ egyenlet azon gyökére is kiterjed, melyre $\mathfrak{Im}\, p > 0$. Az $U_i(t)$ és $W_i(t)$ függvények kiszámításánál ismét a (6) képletet használjuk fel.

A fentebb tárgyalt hővezetési feladatokkal analóg diffúziós problémák, melyek ugyanazokra az egyenletekre vezetnek, mint a fentebbi hővezetési feladatok:

A′. feladat. Valamilyen anyag fel van oldva egy tartályban levő oldószerben. Az oldat koncentrációja ne függjön a helytől, ami pl. állandó keveréssel elérhető. Ehhez a tartályhoz csatlakozik két végtelen hosszú cső, melyek különböző oldószerekkel vannak töltve. A tartályba állandóan betöltünk az oldódó anyagból, mely ott azonnal feloldódik és bediffundál a két csőben levő oldószerbe. A csövekben az oldódó anyag koncentrációja a $t = 0$ időpillanatban zérus.

Keresendő az anyag koncentrációja, mint az idő, illetve mint az idő és hely függvénye a tartályban, illetve a csövekben. Most az A. feladatban szereplő $U(t)$, $V_1(x, t)$ és $V_2(x, t)$ koncentrációkat, $Q(t)$ pedig az időegység alatt a tartályba töltött anyagmennyiséget jelenti.

B′. feladat. Két tartály, melyekben a fentiekhez hasonlóan valamilyen oldat van, egy csővel vannak összekötve, melyben oldószer van. A két tartályba állandóan töltünk a feloldandó anyagból, mely ott azonnal feloldódik és bediffundál a csőbe. Feltesszük, hogy a tartályban a koncentráció a helytől független. A $t = 0$ időpillanatban a csőben a koncentráció legyen zérus.

Megint keresendő a koncentráció a tartályokban, illetve a csőben, mint az idő, illetve a hely és idő függvénye. $Q_1(t)$ és $Q_2(t)$ megint a tartályokba időegység alatt töltött anyagmennyiséget, $U_1(t)$, $U_2(t)$ és $V(x, t)$ koncentrációkat jelentenek.

2. §. Bizonyítási részletek

A B. feladat számítása során végzett műveletek legitim voltának igazolásához a következő fontosabb tények bizonyítása szorul részletesebb meggondolásokra:

a) A (12) integrálban az $(\eta + Pi, \, -P + Pi)$, $(\eta - Pi, \, -P - Pi)$ és $(-P - Pi, \, -P + Pi)$ utakon $P \to \infty$ esetén az integrál 0-hoz tart.

b) A G_i-t és H_i-t előállító sorok $t \geq t_0 > 0$ esetén egyenletesen konvergensek, $t = 0$ körül is korlátos részletösszegekkel rendelkeznek és így a (6) formula felhasználható U_i és W_i kiszámítására, mégpedig lehetséges a G_i és H_i sorának tagonkénti integrálása.

c) Kimutatjuk még, hogy a

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4(t-\tau)}}\, W(\tau)\, d\tau$$

kifejezésnek $x \to 0$ esetén van limese és így a (3), illetve (9) peremfeltételek nem illuzórikusak.

A fenti állításokat nem bizonyítjuk be külön-külön minden egyes esetre, hanem csak egyes kiragadott példákra, a többi eset ugyanígy bizonyítható.

a) Például az 1. esetben:

$$h_1(p) = d_1 \frac{a_2 p^2 + b_2 p^2 + c_2 p}{(1+e^{-2\varkappa lp})(\beta_3 p^3 + \beta_1 p) + (1-e^{-2\varkappa lp})(\beta_4 p^4 + \beta_2 p^2 + \beta_0)} = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

$p = iP + y$ (y valós) esetén

$$\left|\int_{(i-1)P}^{iP+\eta} e^{pt} h_1(p)\, dp\right| < \int_{iP-\eta}^{iP+\eta} e^{\eta t} O\left(\frac{1}{p}\right) |dp| + \int_{-P}^{-\eta} e^{yt} O\left(\frac{1}{p}\right) dy =$$

$$= O\left(\frac{1}{p}\right)\left[2\eta\, e^{\eta t} + \frac{1}{t} e^{-\eta t}\right] \to 0, \qquad \text{ha} \quad P \to \infty.$$

Ugyanígy intézhető el az alsó vízszintes úton számított integrál is. Ha K elég nagy, akkor a $\mathcal{Re}\, p < -K$ félsíkon $h_1(p) = O(1)$, és így

$$\left|\int_{-P-iP}^{-P+iP} e^{pt} h_1(p)\, dp\right| \leqq 2P\, O(1)\, e^{-Pt} \to 0, \qquad \text{ha} \quad P \to \infty.$$

b) Az, hogy pl. az 1. esetben $t \geqq t_0 > 0$ esetén pl. $H_1(t)$ sora egyenletesen konvergens, következik az előző *a)* alatti integrál becsléséből. Annak bizonyítására, hogy $0 \leqq t < t_0$ esetén a részletösszegek korlátosak, kicsit részletesebben kell eljárnunk. A fenti $H_1(t)$ a következő alakú:

$$H_1(t) = d_1 \sum_{\varphi_k > 0} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k(-b_2\varphi_k^2) + \sin \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k)}{\cos \varkappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} \cos \varphi_k t +$$

$$+ d_1 \sum_{\varphi_k < 0} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{\cos \varkappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} \sin \varphi_k t.$$

Tekintsük pl. a $\sin \varphi_k t$ együtthatóját. (13)-ból

$$\varphi_k = k\frac{\pi}{\varkappa l} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Ezért

$$\cos \varkappa l \varphi_k = \cos \left[k\pi + \varkappa l \, O\left(\frac{1}{k}\right)\right] = \pm 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

és így $\sin \varphi_k t$ együtthatójára

$$d_1 \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (b_2 \varphi^2{}_k)}{\cos \varkappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} = \frac{d_1 a_2 \varkappa l}{\gamma_4 \pi} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Mivel

$$\sin \varphi_k t = \sin k \frac{\pi t}{\varkappa l} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

kapjuk:

$$d_1 \frac{[\cos \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)] \sin \varphi_k t}{\cos \varkappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} =$$

$$= \frac{d_1 a_2 \varkappa l}{\gamma_4 \pi} \frac{\sin k \dfrac{\pi t}{\varkappa l}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Mivel a

$$\sum \frac{\sin k \dfrac{\pi t}{\varkappa l}}{k} \quad \text{és} \quad \sum \frac{1}{k^2}$$

sorok részletösszegei korlátosak, következik, hogy $H_1(t)$-ben a szinuszos sor részletösszegei is korlátosak.

Ugyanez a tény a koszinuszos sorra is azonnal belátható, mert az együtthatók abszolút konvergens sort alkotnak.

c)

$$I = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{\varkappa^2}{2} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau)\, d\tau = -\frac{\varkappa^2}{2} x \int_0^t \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u)\, du.$$

Legyen $\delta > 0$ olyan kicsiny, hogy

$$W(t) - \varepsilon < W(t-u) < W(t) + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq u < \delta.$$

Ez $W(t)$ folytonossága miatt lehetséges. Ekkor I-t két részre bontjuk:

$$I = -\frac{\varkappa^2}{2} x \int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u)\, du - \frac{\varkappa^2}{2} x \int_\delta^t \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u)\, du.$$

Itt a második integrál $x \to 0$ esetén 0-hoz tart. Az első integrálra fennáll

$$-\frac{\varkappa^2}{2}x\,[W(t)-\varepsilon]\int\limits_0^\delta \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}}\,du > -\frac{\varkappa^2}{2}x\int\limits_0^\delta \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}}\,W(t-u)\,du >$$

$$> -\frac{\varkappa^2}{2}x\,[W(t)+\varepsilon]\int\limits_0^\delta \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}}\,du\,.$$

Mivel

$$\int\limits_0^\delta \frac{e^{-\frac{\varkappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}}\,du = \frac{4}{\varkappa x}\int\limits_{\frac{\varkappa x}{2}\sqrt{\frac{1}{\delta}}}^{\infty} e^{-s^2}\,ds\,,$$

$x \to 0$-esetén azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} I = -\varkappa\sqrt{\pi}\,W(t)\,.$$

3. §. Az 1—2. §-okban előforduló konstansok jelentése

A. feladat

$$a_0 = B_1C_2\varkappa_1 + B_2C_1\varkappa_2$$

$$a_1 = AC_1C_2 + \varkappa_1\varkappa_2(B_1 + B_2)$$

$$a_2 = A(C_1\varkappa_2 + C_2\varkappa_1)$$

$$a_3 = A\varkappa_1\varkappa_2$$

1. eset:

$$\lambda_1 = \frac{\varkappa_1\varkappa_2\,p_1^2 + (C_1\varkappa_2 + C_2\varkappa_1)\,p_1 + C_1C_2}{\Gamma_1}\,,\quad \lambda_2 = \ldots,\quad \lambda_3 = \ldots,$$

$$\mu_1 = \frac{\varkappa_2 p_1^2 + C_2 p_1}{\Gamma_1}\,,\quad \mu_2 = \ldots,\quad \mu_3 \ldots.$$

$$\Gamma_1 = p_1^2 - p_1(p_2 + p_3) + p_2p_3\,.$$

(λ_2, λ_3, μ_2, és μ_3 — később is — a „p”-k indexeinek ciklikus felcserélésével adódnak.)

2. eset:

$$\lambda_1 = \frac{Kp_1^2 - Lp_1 + M}{\Gamma_1}, \qquad \lambda_2 = \ldots, \quad \lambda_3 = \ldots,$$

$$\lambda_4 = \frac{a_3}{a_0}\left[(C_1\varkappa_2 + C_2\varkappa_1) - \frac{C_1 C_2 a_1}{a_0}\right]$$

$$\lambda_5 = \frac{C_1 C_2 a_3}{a_0},$$

$$\mu_1 = \frac{Rp_1^2 - Sp_1 + T}{\Gamma_1}, \qquad \mu_2 = \ldots, \quad \mu_3 = \ldots,$$

$$\mu_4 = \frac{C_2 a_3}{a_0},$$

$$K = -\lambda_4, \quad L = \lambda_4 \frac{a_2}{a_3} + \lambda_5, \quad M = \varkappa_1\varkappa_2 - \lambda_4 \frac{a_1}{a_3} - \lambda_5 \frac{a_2}{a_3},$$

$$R = -\mu_4, \quad S = \mu_4 \frac{a_2}{a_3}, \qquad T = \varkappa_2 - \mu_4 \frac{a_1}{a_3}.$$

3. eset :

$$\lambda_1 = \frac{Kp_1^2 - Lp_1 + M}{\Gamma_1}, \qquad \lambda_2 = \ldots, \quad \lambda_3 = \ldots,$$

$$\lambda_4 = \frac{-(C_1\varkappa_2 + C_2\varkappa_1)\left(\frac{a_1}{a_3} - \gamma\right)\gamma - (\varkappa_1\varkappa_2\gamma - C_1C_2)\left(\frac{a_0}{a_3} - \gamma\frac{a_2}{a_3}\right)}{\Delta},$$

$$\lambda_5 = \frac{(\varkappa_1\varkappa_2\gamma - C_1C_2)\left(\frac{a_1}{a_2} - \gamma\right) + (C_1\varkappa_2 + C_2\varkappa_1)\left(\gamma\frac{a_2}{a_3} - \frac{a_0}{a_3}\right)}{\Delta}.$$

$$\mu_1 = \frac{Rp_1^2 - Sp_1 + T}{\Gamma_1}, \qquad \mu_2 = \ldots, \quad \mu_3 = \ldots,$$

$$\mu_4 = \frac{-C_2\gamma\left(\frac{a_1}{a_3} - \gamma\right) - \gamma\varkappa_2\left(\frac{a_0}{a_3} - \gamma\frac{a_2}{a_3}\right)}{\Delta},$$

$$\mu_5 = \frac{\varkappa_2\gamma\left(\frac{a_1}{a_3} - \gamma\right) + C_2\left(\gamma\frac{a_2}{a_3} - \frac{a_0}{a_3}\right)}{\Delta},$$

$$\Delta = \gamma\left(\frac{a_1}{a_3} - \gamma\right)^2 + \left(\frac{a_0}{a_3} - \gamma\,\frac{a_2}{a_3}\right)^2.$$

$$K = -\lambda_5\,, \qquad L = \lambda_4 + \lambda_5\,\frac{a_2}{a_3}\,, \qquad M = \frac{1}{\gamma}\left(C_1C_2 - \lambda_4\,\frac{a_0}{a_3}\right),$$

$$R = -\mu_5\,, \qquad S = \mu_4 + \mu_5\,\frac{a_2}{a_3}\,, \qquad T = -\frac{1}{\gamma}\,\mu_4\,\frac{a_0}{a_3}.$$

B. feladat :

$$a_1 = \varkappa A_1\,, \qquad b_1 = A_1C_1\,, \qquad c_1 = \varkappa B_1\,, \qquad d_1 = \frac{A_1C_1U_{10}}{\sqrt{\pi}}\,,$$

$$a_2 = \varkappa A_2\,, \qquad b_2 = A_2C_2\,, \qquad c_2 = \varkappa B_2\,, \qquad d_2 = \frac{A_2C_2U_{20}}{\sqrt{\pi}}\,.$$

$$\beta_0 = c_1c_2\,, \qquad \beta_1 = b_1c_2 + b_2c_1\,, \qquad \beta_2 = a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2$$

$$\beta_3 = a_1b_2 + a_2b_1\,, \qquad \beta_4 = a_1a_2$$

$$\gamma_0 = \beta_1 + \beta_0\varkappa l\,, \qquad \gamma_1 = 2\beta_2 + \beta_1\varkappa l\,, \qquad \gamma_2 = 3\beta_3 + \beta_2\varkappa l$$

$$\gamma_3 = 4\beta_4 + \beta_3\varkappa l\,, \qquad \gamma_4 = \beta_4\varkappa l\,.$$

$$\alpha_0 = c_2C_1\,, \qquad \alpha_1 = b_2C_1 + c_2\varkappa\,, \qquad \alpha_2 = a_2C_1 + b_2\varkappa\,, \qquad \alpha_3 = \varkappa a_2$$

$$\delta_0 = c_2C_2\,, \qquad \delta_1 = -b_2C_2 + c_2\varkappa\,, \qquad \delta_2 = a_2C_2 - b_2\varkappa\,, \qquad \delta_3 = \varkappa a_2\,.$$

1. eset :

$$k_{11} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1c_2}{\gamma_0}\,, \qquad k_{21} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1c_2}{\gamma_0}\,,$$

$$k_{12} = k_{22} = k_{13} = k_{23} = 0$$

$$l_{11} = l_{21} = l_{12} = l_{22} = 0$$

$$p_{1k} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1}{C_1}\,\frac{\cos\varkappa l\,\varphi_k\,(-\alpha_2\varphi_k^2 + \alpha_0) + \sin\varkappa l\,\varphi_k\,(\alpha_3\varphi_k^3 - \alpha_1\varphi_k) - (\alpha_2\varphi_k^2 - \alpha_0)}{M_\gamma}\,,$$

$$q_{1k} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1}{C_1}\,\frac{\cos\varkappa l\,\varphi_k\,(\alpha_3\varphi_k^3 - \alpha_1\varphi_k) + \sin\varkappa l\,\varphi_k\,(\alpha_2\varphi_k^2 - \alpha_0) - (\alpha_3\varphi_k^3 - \alpha_1\varphi_k)}{M_\gamma}\,,$$

$$p_{2k} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1}{C_2}\,\frac{\cos\varkappa l\varphi_k\,(-\delta_2\varphi_k^2 + \delta_0) + \sin\varkappa l\varphi_k\,(-\delta_3\varphi_k^3 + \delta_1\varphi_k) - (\delta_2\varphi_k^2 - \delta_0)}{M_\gamma}\,,$$

$$q_{2k} = \frac{\sqrt{\pi}\,d_1}{C_2}\,\frac{\cos\varkappa l\varphi_k\,(-\delta_3\varphi_k^3 + \delta_1\varphi_k) + \sin\varkappa l\varphi_k\,(\delta_2\varphi_k^2 - \delta_0) - (-\delta_3\varphi_k^3 + \delta_1\varphi_k)}{M_\gamma}\,,$$

$$r_{1k} = d_1 \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-b_2 \varphi_k^2) + \sin \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k)}{M_\gamma},$$

$$s_{1k} = d_1 \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{M_\gamma},$$

$$r_{2k} = d_1 \frac{b_2 \varphi_k^2}{M_\gamma},$$

$$s_{2k} = d_1 \frac{a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k}{M_\gamma},$$

$$M_\gamma = \cos \varkappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k) .$$

2. eset:

$$k_{11} = Q_{10} \frac{\left(2\alpha_2 + \alpha_1 \varkappa l + \frac{\alpha_0}{2} \varkappa^2 l^2\right)(\beta_1 + \beta_0 \varkappa l) - \alpha_0 \left(2\beta_3 + 2\beta_2 \varkappa l + \beta_1 \varkappa^2 l^2 + \frac{\beta_0}{3} \varkappa^3 l^3\right)}{2 \Lambda^2}.$$

$$k_{21} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\left(2\delta_2 - \delta_1 \varkappa l + \frac{\delta_0}{2} \varkappa^2 l^2\right)(\beta_1 + \beta_0 \varkappa l) - \delta_0 \left(2\beta_3 + 2\beta_2 \varkappa l + \beta_1 \varkappa^2 l^2 + \frac{\beta_0}{3} \varkappa^3 l^3\right)}{2 \Lambda^2}$$

$$k_{12} = Q_{10} \frac{\alpha_0 \varkappa l}{2 \Lambda}, \qquad k_{13} = Q_{10} \frac{\alpha_0}{4 \Lambda},$$

$$k_{22} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\delta_0 \varkappa l}{2 \Lambda}, \qquad k_{23} = Q_{10} \frac{C_1}{C_3} \frac{\delta_0}{4 \Lambda},$$

$$l_{11} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{b_2 + c_2 \varkappa l}{2 \Lambda}, \qquad l_{12} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{C_2}{2 \Lambda},$$

$$l_{21} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{-b_2}{2 \Lambda}, \qquad l_{22} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{c_2}{2 \Lambda},$$

$$\Lambda = \beta_1 + \beta_0 \varkappa l .$$

3. eset:

$$k_{11} = Q_{10} \frac{c_2 C_1}{\gamma_0 \lambda_1}, \qquad k_{21} = Q_{10} \frac{c_2 C_1}{\gamma_0 \lambda_1},$$

$$k_{12} = k_{22} = k_{13} = k_{23} = 0,$$

$$l_{11} = l_{12} = l_{21} = l_{22} = 0.$$

2. és 3. eset: (a 2. esetben $\lambda_1 = 0$ helyettesítendő)

$$p_{1k} = Q_{10} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) - (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0)}{M_\varepsilon},$$

$$q_{1k} = Q_{10} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0) - (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$p_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\delta_2 \varphi_k^2 + \delta_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) - (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0)}{M_\varepsilon},$$

$$q_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0) - (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$r_{1k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-b_2 \varphi_k^2) + \sin \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$s_{1k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{M_\varepsilon},$$

$$r_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{b_2 \varphi_k^2}{M_\varepsilon},$$

$$s_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k}{M_\varepsilon}.$$

$$M_\varepsilon = \cos \varkappa l \varphi_k (-\varepsilon_6 \varphi_k^6 + \varepsilon_4 \varphi_k^4 - \varepsilon_2 \varphi_k^2 + \varepsilon_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (-\varepsilon_5 \varphi_k^5 + \varepsilon_3 \varphi_k^3 - \varepsilon_1 \varphi_k)$$

$$\varepsilon_0 = \gamma_0 \lambda_1, \qquad \varepsilon_1 = \gamma_1 \lambda_1 + 2\beta_0, \qquad \varepsilon_2 = \gamma_2 \lambda_1 + \gamma_0 + 2\beta_1$$

$$\varepsilon_3 = \gamma_3 \lambda_1 + \gamma_1 + 2\beta_2, \qquad \varepsilon_4 = \gamma_4 \lambda_1 + \gamma_2 + 2\beta_3, \qquad \varepsilon_5 = \gamma_3 + 2\beta_4, \qquad \varepsilon_6 = \gamma_4.$$

IRODALOM

[1] H. S. CARSLAW: *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat.* Macmillan, London, 1906.

[2] FREUD G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 369—394.

[3] W. MAGNUS — F. OBERHETTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen des mathematischen Physik.* Springer, Berlin, 1948.

[4] K. W. WAGNER: *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation.* Barth., Leipzig, 1950.

(Beérkezett: 1956. I. 12.)

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ, II.

ДЬ. АДЛЕР

Резюме

В § 1 решаются две задачи для уравнения теплопроводности и аналогичные им задачи о диффузии. Первая задача относится к системе, состоящей из теплового резервуара и двух примыкающих к нему бесконечных теплопроводных стержней. Система, фигурирующая во второй задачи, состоит из двух тепловых резервуаров и соединяющего их теплопроводного стержня.

Температуру стержней ищем в виде интеграла типа конволюции (см. например, [5]). Это даёт возможность вычислять преобразования по Лапласу введённых таким образом функций из системы линейных уравнений, после подстановки этих функций в уравнения теплопроводности и преобразования последних по Лапласу. Обратные преобразования по Лапласу и в случае задачи A. мы смогли получить в явной форме, а в случае задачи B. в виде бесконечных рядов на основании формулы Рнманна–Мэллииа с помощью теоремы о вычетах.

В § 2 доказываться законность действий, произведенных при решении задач.

В § 3 приведены значения постоянных, встречающихся в §§ 1–2.

PROBLÈMES DE CONDUCTION DE LA CHALEUR ET DE DIFFUSION AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COMPOSÉES, II.

GY. ADLER

Résumé

Dans le §. 1. deux problèmes de conduction de la chaleur, et en même temps deux problèmes analogues de diffusion sont résolus. Le premier problème A. se rapporte à un système se composant d'un réservoir de chaleur et de deux barres conductrices de chaleur infiniment longues, appliquées au réservoir. Le système figurant dans le deuxième problème B. est composé de deux réservoirs de chaleur, et d'une barre conductrice de chaleur, qui les réunit.

On cherche la température des barres sous une forme d'intégrale de type de convolution (cf. par ex. (5)). Par cette méthode il est possible de calculer les transformées Laplaciennes des nouvelles fonctions inconnues ainsi introduites à partir d'un système d'équations linéaires, obtenu par une substitution aux conditions inhomogènes aux limites et une transformation de Laplace de ces conditions, parce que les équations differentielles et les conditions homogènes aux limites sont automatiquement satisfaites.

Dans le problème A. on peut présenter les transformées Laplaciennes inverses sous une forme explicite, cependant dans le problème B. elles sont produites en vertu de la formule de Riemann—Mellin à l'aide du théorème du résidu sous la forme d'une série infinie.

Dans le §. 2. nous avons vérifié l'exactitude de certaines opérations faites au cours de la solution des problèmes.

Dans le §. 3. les valeurs des constantes figurant dans le §. 1. et 2. sont indiquées.