MEGJEGYZÉS A DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK EGYIK FORMÁLIS MEGOLDÁSI MÓDSZERÉHEZ

FENYŐ ISTVÁN

1. §.

Tekintsük a következő lineáris differenciálegyenletrendszert:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right) y_k = \varphi_i(x). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

A $P_{ik}(\lambda)$ kifejezések polinomok (együtthatóik nem függenek λ-tól), a $\varphi_i(x)$-ek adott függvények. Ha feltesszük, hogy

$$\det P_{ik}(\lambda) = P(\lambda) \tag{2}$$

nem azonosan eltűnő polinom, akkor az (1) alatti rendszer megoldása formálisan a következő módon végezhető el: a $P(\lambda)$ determináns aldeterminánsai legyenek $Q_{ik}(\lambda)$, akkor (1)-ből formálisan

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y_k = \sum_{i=1}^{n} Q_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right) \varphi_i(x). \tag{3}$$

Ez y_k-ra nézve állandó együtthatós lineáris közönséges differenciálegyenlet, mely ismert módon kvadratúrákkal megoldható. A most vázolt formális eljárásnak van értelme és numerikusan kényelmesen keresztülvihető, ha a $\varphi_i(x)$ függvények elegendő sokszor differenciálhatók, de természetesen értelmét veszti és pusztán formális kalkulus marad ellenkező esetben.

A következőkben megmutatjuk, hogy ez a formális eljárás nem differenciálható φ_i függvények esetében is használható, ha a szóban forgó függvények helyett *disztribúciókat* tekintünk és a differenciálhányados műveletén a disztribúció-differenciálhányadost értjük (lásd: [1]). Az eljárás azért érdemel figyelmet, mert megfelelő elrendezéssel numerikus, illetve gépi számolásra is alkalmas.

A következőkben a φ és y betűk disztribúciókat jelentenek. Ha pl. φ függvény, ezen olyan disztribúciót értünk, mely a szóban forgó függvénnyel azonosítható (lásd: [1], I. kötet. 25. oldal).

Induljunk ki a

$$(4) \qquad \left(\frac{d}{dx} + A\right)\gamma = \varphi$$

differenciálegyenletből (ahol A konstans); ennek alap-megoldásán értjük azt a függvényt, mely az $x = 0$ helyen zérussal egyenlő. L. SCHWARTZ egy — igen könnyen bizonyítható — tétele szerint a $\varphi \equiv 0$ esetben ennek a differenciálegyenletnek nincsenek más megoldásai, mint függvények, tudniillik azok, melyek a szokásos módon meghatározhatók (lásd: [1], I. kötet, 129. oldal.) Ebből viszont következik, hogy a (4) inhomogén differenciálegyenletnek sincsen más megoldása, mint függvény, ha φ bármilyen, legfeljebb véges sok, véges szakadással bíró függvény, bármely véges szakaszon.

Hogy a mondott esetben (4)-nek létezik függvénymegoldása, az nyilvánvaló. Ha ezenkívül léteznék még egy disztribúció-megoldása is, akkor a disztribúció-megoldás és a függvény-megoldás különbsége feltétlenül függvény lenne, hiszen (4) két különböző megoldásának különbsége — a megfelelő homogén egyenlet megoldása, amiről pedig láttuk, hogy függvény. Egy disztribúció és egy függvény különbsége függvény csakis úgy lehet, ha a disztribúció maga is függvény. Tehát, ha φ tetszőleges,[1] a (4) egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, ugyanis a

$$\frac{d}{dx} + A$$

operátornak egyértelmű inverze létezik. Ezt az operátort

$$\left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx} + A},$$

szimbólummal fogjuk jelölni. Ha tehát φ függvény, akkor

$$\gamma = \frac{\varphi}{\dfrac{d}{dx} + A}\,\varphi$$

is függvény. Ezen operátor iterációjával definiáljuk a

$$\left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-k} = \frac{1}{\left(\dfrac{d}{dx} + A\right)^k}$$

operátort is, és ez lehetővé teszi az

---

[1] Tetszőleges függvényen a jövőben olyan disztribúciót értünk, mely minden véges szakaszon legfeljebb véges sok ugráshellyel és véges szakadással bíró függvénnyel azonosítható.

$$\frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \frac{1}{\prod_k \left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k}$$

operátor definiálását. Ezekután szükségünk lesz

$$\frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} \cdot Q\left(\frac{d}{dx}\right) \tag{5}$$

operátor értelmezésére, ahol $Q(\lambda)$ a λ-nak polinomja.

Bebizonyítjuk, hogy a (5) egyenlettel definiált operátor azonos azzal, melyet a Q/P tört formális parciális törtrebontásával kapunk.

Először bebizonyítjuk azt, hogy

$$\frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \sum_k \frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k} \tag{6}$$

alakú: Ehhez nyilván elegendő az

$$\frac{1}{\left(\frac{d}{dx} + A_1\right)\left(\frac{d}{dx} + A_2\right)} = \frac{1}{A_2 - A_1} \frac{1}{\frac{d}{dx} + A_1} - \frac{1}{A_2 - A_1} \frac{1}{\frac{d}{dx} + A_2} \tag{7}$$

identitás bebizonyítása. (A_1 és A_2 ne legyenek egyszerre zérusok.)

A definició alapján

$$\left(\frac{d}{dx} + A\right)\left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1} = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1}\left(\frac{d}{dx} + A\right) = \mathcal{J}, \tag{8}$$

ahol $\mathcal{J}$ az identitásoperátor. Mivel

$$\frac{1}{A_2 - A_1}\left(\frac{d}{dx} + A_2\right) - \frac{1}{A_2 - A_1}\left(\frac{d}{dx} + A_1\right) = \mathcal{J},$$

azért, ha ennek az egyenletnek mindkét oldalára a $\left(\frac{d}{dx} + A_2\right)^{-1}\left(\frac{d}{dx} + A_1\right)^{-1}$ operátort alkalmazzuk, (8) figyelembevételével nyerjük (7)-ot, s (6) tüstént következik.

Írható, tehát

$$\frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \sum \frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k} Q\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Mivel, ugyancsak a definíció alapján

$$\left(\frac{d}{dx}+A\right)^{l}\left(\frac{d}{dx}+A\right)^{m}=\left(\frac{d}{dx}+A\right)^{l+m}$$

bármely l és m egész számpárra, elég a parciális törtre bonthatóság bizonyításán a

$$\frac{\frac{d}{dx}+B}{\frac{d}{dx}+A}=\frac{B-A}{\frac{d}{dx}+A}+\mathcal{I}$$

egyenletet igazolni. De az utóbbi nyilvánvaló, hiszen

$$\frac{d}{dx}+B=\frac{d}{dx}+A+B-A$$

és így

$$\frac{\frac{d}{dx}+B}{\frac{d}{dx}+A}=\left(\frac{d}{dx}+A\right)^{-1}\left[\left(\frac{d}{dx}+A\right)+B-A\right]=\mathcal{I}+\frac{B-A}{\frac{d}{dx}+A}$$

Ezzel a $Q\left(\frac{d}{dx}\right)\Big/P\left(\frac{d}{dx}\right)$ operátorra vonatkozó állításunkat teljesen igazoltuk.

Ha a $Q\left(\frac{d}{dx}\right)\Big/P\left(\frac{d}{dx}\right)$-ban a számláló nem magasabb fokszámú, mint a nevező, és ezt az operátort valamilyen tetszőleges φ függvényre alkalmazzuk, ismét függvényt nyerünk. Ha tudniillik a számláló nem magasabb fokszámú a nevezőnél,

$$\frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)}\varphi=\sum_{k}\frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx}+A_k\right)^{k}}\varphi\,,$$

ahol a k mindig nem-negatív, és a jobb oldalon minden tag az előzőek szerint függvény.

Visszatérve ezekután az (1) alatti egyenletrendszerre, tegyük fel, hogy a $P(\lambda)$ determináns k-adik oszlopában levő polinomok legmagasabb fokszáma p_k, P fokszáma p és

$$p=p_1+p_2+\ldots+p_n. \tag{9}$$

Képezzük az (1)-el egyenértékű (3) kifejezést, ebből

$$(10) \qquad \gamma_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} \varphi_i(x).$$

Miután Q_{ik} legfeljebb $p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_{k+1} + \ldots + p_n < p$ fokszámú, azért a γ_k megoldások függvények. Azonnal látható, hogy (10) a differenciálegyenletrendszer azon megoldásrendszerét szolgáltatja, melyre a

$$(11) \qquad \gamma_k(0) = \gamma_k'(0) = \ldots = \gamma_k^{(p_k-1)}(0) = 0 \qquad (k = 1,2\ldots, n)$$

feltételek teljesülnek. Ha a

$$\gamma_k(0) = \alpha_k;\; \gamma_k'(0) = \alpha_k', \ldots, \gamma_k^{(p_k-1)}(0) = \alpha_k^{(p_k-1)}$$

kezdeti feltételeket adjuk meg, akkor a

$$\gamma_k(x) = g_k(x) + \alpha_k + \frac{\alpha_k'}{1!}x + \ldots + \alpha_k^{(p_k-1)} \frac{x^{p_k-1}}{(p_k-1)!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletekkel új függő változókat, a g_k-kat bevezetve feladatunkat az előbbire vezettük vissza.

Ha a (9) feltétel nem teljesül, akkor eljárásunkat kissé módosítanunk kell. Ez esetben tudniillik az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, n$) egyenletet h_i-szer differenciálva és esetleg egyenletek összeadásával elérhető a (9) alatti feltétel teljesülése, ha a h_i számokat alkalmasan választjuk. Ha a $\varphi_i(x)$ függvények nem differenciálhatók közönséges értelemben, akkor L. Schwartz-féle értelemben vett differenciálhányadost kell képezni. Az így kapott rendszerre az előbb vázolt eljárás minden további nélkül alkamazható. Ez esetben azonban az inhomogenitást jelentő tagok általában nem függvények, hanem disztribúciók lesznek, ennek következtében nyert megoldások is disztribúciók. Mivel azonban az adott disztribúciók függvényeknek h_i-szeres differenciálásából nyertek, az eredményül nyert disztribúciót $h = \max h_i$-szer integrálva az eredeti differenciálegyenletrendszert kielégítő függvényt nyerünk.

2. §.

Az előbb vázolt módszer bizonyos peremértékfeladatok megoldására is alkalmas. A szóban forgó differenciálegyenletrendszer legyen a következő:

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\gamma_k = \varphi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol a P_{ik}-k ismét polinomok. Keressük ennek, egyelőre, azon megoldásait, melyek deriváltjaikkal együtt az 0 és 1 helyeken eltűnnek.

Induljunk ki ismét a

$$(13) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + A\right)\gamma = \varphi$$

egyenletből. Ennek megoldásán azt a függvényt értjük, melyre a

$$\gamma(0) = \gamma(1) = 0$$

peremfeltételek teljesülnek. Ha φ bármilyen, csupán véges sok véges szakadással bíró függvény, akkor ilyen γ függvény egy és csakis egy van, ha

$$A \neq m^2\pi \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Ha φ függvény, akkor (13)-nak más megoldása, mint a függvénymegoldása nincsen. Ez a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\right) = \left(\frac{d}{dx} + i\sqrt{A}\right)\left(\frac{d}{dx} - i\sqrt{A}\right) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

felbontásból nyilvánvaló. Így tehát, ha A-ra teljesül (14), létezik a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\right)^{-1} = \frac{1}{\dfrac{d^2}{dx^2} + A}$$

operátor. Ennek segítségével értelmezhető az előbbiek mintájára a

$$\frac{Q\left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right)}{P\left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right)}$$

operátor is, ahol P és Q polinomokat jelentenek, és P gyökei közül a (14) alatti számok egyike sem szerepel. Erre az operátorra is alkalmazható a parciális törtekre bontás. Itt is érvényes az a tétel, hogy ha Q fokszáma nem nagyobb, mint P fokszáma, akkor

$$\frac{Q\left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right)}{P\left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right)}\varphi$$

függvény, feltéve, hogy φ függvény. Így tehát (12) ekvivalens a

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} Q_{ik}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi_i \tag{15}$$

egyenletrendszerrel. Ha most feltesszük, hogy P gyökei között a (14) alatti számok egyike sem szerepel és a fokszámok között érvényes a (9) alatti reláció, akkor (12) megoldásai gyanánt ezeket a függvényeket kaptuk, melyek a

$$\begin{aligned} \gamma_i(0) = \gamma_i''(0) = \ldots = \gamma_i^{(2p_i-2)}(0) = 0 \\ \gamma_i(1) = \gamma_i''(1) = \ldots = \gamma_i^{(2p_i-2)}(1) = 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

peremfeltételeknek tesznek eleget. Ha a

$$\begin{aligned}&\gamma_i(0)=\alpha_i\,,\ \ \gamma_i''(0)=\alpha_i'\,,\ \dots,\ \ \gamma_i^{(2p_i-2)}(0)=\alpha_i^{(p_i-1)}\\&\gamma_i(1)=\beta_i\,,\ \gamma_i''(1)=\beta_i'\,,\ \dots,\gamma_i^{(2p_i-2)}(1)=\beta_i^{(p_i-1)}\end{aligned}\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

peremfeltételeket írjuk elő, akkor a

$$\gamma_i(x)=g_i(x)+\pi_i(x)$$

egyenlettel bevezetjük a g_i új függő változókat, ahol $\pi_i(x)$ $(2p_i-1)$-edfokú, az előírt peremfeltételeknek eleget tevő polinomok és ezzel a problémát az előbbire vezettük vissza.

Ha a (9) egyenlet nem teljesül, akkor hasonlóan járunk el, mint 1. §. alatt, csakhogy kellő számszor a $\frac{d^2}{dx^2}$ operátort kell az egyes egyenletekre alkalmazni.

IRODALOM

[1] L. Schwartz: *Théorie des distributions, I.* Hermann et C^{ie}, Paris, 1950. („Actualités Scientifiques et Industrielles'', No. 1091.)

(Beérkezett: 1955. IX. 25.)

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОМ ФОРМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. ФЕНЕ

Резюме

Пусть дана система дифференциальных уравнений (1). Предположим, что $P_{ik}(\lambda)$ — многочлены с постоянными коэффициентами, для которых выполняется условие (2). Если обозначить через $Q_{ik}(\lambda)$ миноры определителя $P(\lambda)$, то наша система дифференциальных уравнений равносильна системе (3), если только функции φ_i достаточное число раз дифференцируемы. В этом случае система (3) может быть легко разрешима относительно γ_k. Если φ_k не дифференцируемы, то они порождают дистрибуции понимаемые в смысле (Л. Шварца [1]). В работе доказывается, что, если φ_i — непрерывные функции, то указанный выше формальный метод может быть применён с использованием производных дистрибуций и даёт интегралы дифференциального уравнения, являющиеся не дистрибуциями, а функциями. Если применять подходящую схему, то метод можно использовать и для численного решения.

Приведенная идея может быть использована и для решения граничных задач. Если, например, речь идёт о граничной задаче (12) и (16), то она эквивалентна граничной задаче для системы дифференциальных уравнений (15), если только $P(m^2\pi^2)\neq 0$ $(m=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$). Здесь φ_i снова считаются дистрибуциями. В работе доказывается что, если функции φ_i непрерывны, то решение этой задачи не дистрибуции, а функции.

Метод может быть перенесён и на некоторые системы дифференциальных уравнений с частными производными.

BEMERKUNGEN ÜBER EINE FORMELLE LÖSUNGSMETHODE VON SYSTEMEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I. FENYŐ

Zusammenfassung

Es sei gegeben ein System von Differentialgleichungen von der Gestalt (1). Die $P_{ik}(\lambda)$ seien Polynome mit konstanten Koeffizienten. Es sei vorausgesetzt, dass die Relation (2) gilt. Wenn man die Unterdeterminanten von P durch $Q_{ik}(\lambda)$ bezeichnet, so ist das System (1) mit dem System (3) äquivalent, falls die Funktionen $\varphi_i(x)$ genügend oft differenzierbar sind. Alle diese Gleichungen sind lineare Differentialgleichungen bezüglich der unbekannten Funktionen γ_k mit konstanten Koeffizienten, die leicht lösbar sind.

Falls die Funktionen $\varphi_i(x)$ nicht genügend oft differenzierbar sind, so ist dieses Verfahren bloss formell. Man kann doch dem Verfahren einen konkreten Sinn geben, falls man die φ_i (und ihre Derivierte) nicht als Funktionen, sondern als Distributionen (im L. SCHWARTZ'schem Sinne [1]) betrachtet werden. Es wird gezeigt, dass falls die stetige Funktionen sind, so hat (1) keine andere als die durch klassische Methoden φ_i bekannte Lösungen.

Diese können durch die erwähnte formale Lösungsmethode ausgerechnet werden, durch Einführung der Distributionen-Ableitung. Es wird auch darauf hingewiesen, dass die Methode zur numerischen Rechnungen geeignet sind.

Durch eine analoge Methode kann auch das Randwertproblem von gewissen Systemen von Differentialgleichungen gelöst werden. Die Randwertprobleme (12) und (15) sind z. B. äquivalent mit dem Randwertproblem der Differentialgleichung (15), falls nur $P(m^2\pi^2) \neq 0$ $(m = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$. Hier sollen wieder die Funktionen φ_i als Distribution aufgefasst werden und es wird gezeigt, dass wenn φ_i stetige Funktionen sind, so hat das System (2) ein einziges Lösungssystem, welches den Randwertbedingungen genügt.