A LATIN NÉGYZET ÉS AZ ORTOGONÁLIS LATIN NÉGYZET-PÁR FOGALMÁNAK EGY ÚJ ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ENNEK FELHASZNÁLÁSA KÍSÉRLETEK TERVEZÉSÉRE

HEPPES ALADÁR és RÉVÉSZ PÁL

Bevezetés

A matematikai statisztikában használatos úgynevezett latin négyzetek módszere azzal a problémával foglalkozik, hogyan készítsük el egy kísérlet-sorozat tervét, amennyiben azt akarjuk megvizsgálni, hogy bizonyos paraméterek megváltoztatása milyen hatással van egy jelenség lejátszódásának eredményére. A cél természetesen az, hogy minél kevesebb kísérlet árán, minél nagyobb biztonsággal tudjuk eldönteni, milyen az egyes paraméterek hatása. Az alábbiakban ennek a módszernek továbbfejlesztését fogjuk tárgyalni. Az alább ismertetendő módszer sok paraméter esetén lehetőséget nyújt arra, hogy viszonylag kevés kísérlet árán nagy biztonsággal állapíthassuk meg az egyes paraméterek (esetleg több paraméter együttes) hatását.

A latin négyzetek módszerének nagy az irodalma. Utalunk például H. B. MANN [1] könyvére. Ennek tárgyalásmódját fogjuk az alábbiakban követni.

A latin négyzet és ortogonális latin négyzet-pár fogalmának n-dimenziós általánosításával már többen foglalkoztak. (Lásd például [2] és [3].) A latin kocka fogalmát az említett művekkel azonos módon definiáljuk. Az ortogonális latin kocka fogalma helyett azonban a variációs kocka fogalmát vezetjük be, ami az ortogonális latin kocka-pár fogalmának további általánosítását jelenti.

1. §. Permutációs kockák és az ezzel kapcsolatos kombinatorikai feladat

Tekintsünk az n-dimenziós térben egy kockaalakú, m^n elemű mátrixot. Válasszuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátarendszert úgy, hogy a mátrix elemei a $0 \leq x_i \leq m-1$ ($i = 0, 1, \ldots, m-1$) kocka rácspontjaiba essnek. E mátrix valamely oszlopán egy, az $\boldsymbol{x}_i$ koordináta-egységvektorok valamelyikével párhuzamos (egy-dimenziós) rács-oszlopot értünk. A mátrixnak egy, az $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots \boldsymbol{x}_{i_k}$ koordináta-egységvektorokkal párhuzamos k-dimenziós rácsaltérbe eső részét pedig a mátrix egy k-dimenziós rétegének nevezzük.

Továbbiakban n mindig a dimenziószámot, m pedig a fenti mátrix egy oszlopában levő elemek számát — a kockamátrix, illetve rácskocka „élhosszát" jelenti.

Permutációs kockának[1] nevezzük az olyan n-dimenziós kockamátrixot, amelynek elemei a $0, 1, 2, \ldots, m-1$ számokból kerülnek ki, mégpedig úgy, hogy a mátrix minden oszlopában a $0, 1, 2, \ldots, m-1$ számok egy permutációja áll.

Bármely adott n és m értékhez könnyen szerkeszthetünk permutációs kockát. Könnyen belátható, hogyha az n-dimenziós m élhosszúságú rácskocka minden rácspontjához az illető pont koordinátáinak mod m vett összegét rendeljük, akkor permutációs kockához jutunk.

Az n-dimenziós tér m élhosszúságú $P_1, P_2, \ldots, P_n$ permutációs kocka n-eséről azt mondjuk, hogy gyengén variált kocka n-est alkot, ha e kockák megfelelő rácspontjaiban levő elemekből készített — a kockák indexei szerint rendezett — szám n-esek közt a $0, 1, 2, \ldots, m-1$ számoknak minden n-edosztályú ismétléses variációja egyszer és csak egyszer fordul elő. (Az, hogy n számú permutációs kocka gyengén variált kocka n-est alkot-e, vagy sem, független a kockák indexezésétől.)

Az n-dimenziós térbeli m élhosszúságú $P_1, P_2, \ldots, P_n$ permutációs kocka n-es variációs kocka n-est[2] képez, ha megfelelő k-dimenziós rétegei közül — amelyek nyilván k-dimenziós permutációs kockák — bármely k gyengén variált k-dimenziós kocka k-st alkot, $k = 1, 2, \ldots, n$-re.

A következőkben feladatunknak fogjuk tekinteni maximális elemszámú variációs kocka-rendszerek, vagyis olyan permutációs kockákból álló rendszerek konstruálását, amelyek közül bármely n variációs kocka n-est alkot.

Mindenekelőtt be fogjuk bizonyítani, hogy egy variációs kockarendszer legfeljebb $m-1$ permutációs kockából áll. Tekintsünk egy variációs kockarendszert. Válasszunk ki egyik elemében egy kétdimenziós réteget, majd vizsgáljuk e réteg és a többi kocka megfelelő rétegéből álló variációs négyzetrendszert. Állításunk igazolására elég kimutatnunk, hogy egy variációs négyzetrendszer nem állhat $(m-1)$-nél több permutációs négyzetből. Könnyen látható, hogy ha egy variált négyzetrendszer valamely négyzetében a $0, 1, 2, \ldots, m-1$ elemek helyébe rendre ezek valamely rögzített permutációja szerinti számot írunk, ismét variált négyzetrendszerhez jutunk. Ennek alapján az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy valamennyi négyzet első oszlopában rendre a $0, 1, 2, \ldots, m-1$ számok állanak. Minthogy permutációs kockáról van szó, a második oszlop első eleme csak az $1, 2, \ldots, m-1$ számok valamelyike lehet: másrészt, ha a rendszer két négyzetében e helyen ugyanaz az i szám állna, akkor e két négyzet nem alkotna variációs párt, hiszen az (i, i) variáció az első oszlopban is szerepel. Ugyanezen gondolatmenet alkalmazásával kimutatható, hogy egy gyengén variált kockarendszer, vagyis olyan kockarendszer, amelyből kiválasztott bármely

[1] Kétdimenziós megfelelőjét az irodalomban latin négyzetnek nevezik.

[2] $n = 2$-re a variációs és a gyengén variált kockát alkotó négyzetpárok fogalma azonos, és megegyezik az irodalomban használt latin—görög, illetve ortogonális négyzetpár fogalmával.

n kocka gyengén variált kocka n-est képez, legfeljebb $(n-1)\cdot(m-1)$ kockából állhat. Pl. $m=3$, $n=3$ esetben valóban megadható 4-elemű gyengén variált kockarendszer :

I.

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{array}}\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&0\\2&0&1\\0&1&2\end{array}}\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{array}}$$

II.

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{array}}\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{array}}\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&0\\2&0&1\\0&1&2\end{array}}$$

III.

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{array}}\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{array}}\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{array}}$$

IV.

$$1.\ \boxed{\begin{array}{ccc}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{array}}\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{ccc}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{array}}\quad 3.\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{array}}$$

Itt I.—IV. a kockák sorszámát, 1.—3. pedig a rétegek sorszámát jelentik

Térjünk vissza a variációs kockarendszerek tárgyalásához. Alábbiakban a kétdimenziós eredménynek megfelelően az m szám számelméleti szerkezetétől függően alsó korlátot fogunk adni adott n és m értékekhez tartozó maximális variációs rendszer kockái számára. A feladatnak természetesen csak $n \leqq m-1$ esetén van értelme. Bebizonyítjuk először a következő tételt :

1. tétel : *Ha m prímszám, és $n \leqq m-1$, akkor készíthető $(m-1)$ elemű n-dimenziós variációs kockarendszer.*

Bizonyítás :

Állításunk igazolására konstruálunk egy $(m-1)$-elemű variációs kockarendszert. Legyen P_k a k-adik kocka $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Legyen a P_k kocka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinátájú eleme a

$$\sum_{j=1}^{n} x_j k^{j-1}$$

kifejezés mod m vett legkisebb nemnegatív értéke. Tekintsük a P_k kocka valamely, az $\boldsymbol{x}_j$ koordináta-egységvektorral párhuzamos oszlopát. Ezen oszlop α-adik és β-adik elemének különbsége, $(\alpha - \beta)\, k^{j-1} \not\equiv 0 \pmod{m}$, tekintettel arra, hogy m prím, $\alpha - \beta$ és k pedig kisebbek, mint m. A P_k kockák tehát permutációs kockák. Megmutatjuk ezek után, hogy a P_k kockák variációs kocka-rendszert alkotnak. Válasszunk ki tetszőlegesen a P_k kockák közül n darabot. Legyenek ezek: $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_n}$. Elegendő bebizonyítani, hogy e kockák $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, illetve $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ helyén levő elemekből képzett két n-edrendű ismétléses variáció csak akkor egyezhet meg, ha az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ helyek azonosak. A két variáció megegyezése a következő egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{gathered} x_1 + k_1 x_2 + k_1^2 x_3 + \ldots + k_1^{n-1} x_n = x_1' + k_1 x_2' + k_1^2 x_3' + \ldots + k_1^{n-1} x_n' \\ \vdots \\ x_1 + k_n x_2 + k_n^2 x_3 + \ldots + k_n^{n-1} x_n = x_1' + k_n x_2' + k_n^2 x_3' + \ldots + k_n^{n-1} x_n' . \end{gathered}$$

Átrendezve a fenti egyenleteket, az $(x_i - x_i')$ ismeretlenekre egy homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek együttható-determinánsa az

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \ldots & k_1^{n-1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & k_n & k_n^2 & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde-féle determináns. Ennek értéke azonban:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i) \not\equiv 0 \pmod{m} ,$$

tehát egyetlen megoldás: $x_i = x_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, miként állítottuk.

Tetszőleges élű variációs kockarendszerek esetére bebizonyítjuk a következő, az 1. tételt is tartalmazó tételt:

2. tétel: *Ha* m *kanonikus előállítása* $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, *akkor létezik*

$$\min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{\alpha_i} - 1)$$

számú permutációs kockából álló variációs kockarendszer. Feltesszük, hogy

$$n \leqq \min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{\alpha_i} - 1) .$$

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy

$$p_1^{\alpha_1} - 1 = \min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{\alpha_i} - 1) .$$

Ezen tétel bizonyításához a Galois-testek elméletének alapjait is fe fogjuk használni.

Készítsük el rendre a $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_r^{\alpha_r}$ számú elemet tartalmazó $T_1, T_2, \ldots, T_r$ Galois-testeket. T_i elemei legyenek: $g_{0i} = 0$, $g_{1i} = e$, g_{2i}, $g_{3i}, \ldots, g_{p_i^{\alpha_i}-1,i}$

Tekintsük továbbá a $(g_{j_1 1}, g_{j_2 2}, \ldots, g_{j_r r})$ elem r-eseket, mint r-dimenziós pontokat. Értelmezzük ezek közt az összeadás és a szorzás műveletét koordinátánként. Ekkor ezen pontok gyűrűt alkotnak, amelyek egységeleme: $\gamma_1 = (g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1r})$.

Legyen:

$$\gamma_2 = (g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2r})$$
$$\vdots$$
$$\gamma_{p_1^{\alpha_1}-1} = (g_{p_1^{\alpha_1}-1,1}, g_{p_1^{\alpha_1}-1,2}, \ldots, g_{p_1^{\alpha_1}-1,r}) .$$

Nyilvánvaló, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p_1^{\alpha_1}-1}$ pontoknak van a gyűrűben a γ_1 egységelemre nézve inverzük. Tekintsünk továbbá tetszőleges n különböző r-dimenziós pontot: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

A $P_1, P_2, \ldots, P_{p_1^{\alpha_1}-1}$ permutációs kockákat ezek után a következő módon konstruálhatjuk: a P_k permutációs kocka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinátájú eleme legyen:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \gamma_k^{j-1} .$$

Teljes mértékben az 1. tétel bizonyítási módszerét követve látható, hogy $P_1, P_2, \ldots, P_{p_1^{\alpha_1}-1}$ mindegyike permutációs kocka, és együttesen variációs kockarendszert alkotnak.

Például $n = 3$, $m = 4$ esetében a következő 3 elemű variációs kockarendszer készíthető:

$$P_1 \qquad 1.\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \end{vmatrix} \quad 2.\begin{vmatrix} n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \quad 3.\begin{vmatrix} n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \end{vmatrix} \quad 4.\begin{vmatrix} n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix}$$

$$P_2 \qquad 1.\begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \end{vmatrix} \quad 2.\begin{vmatrix} k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \end{vmatrix} \quad 3.\begin{vmatrix} k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \end{vmatrix} \quad 4.\begin{vmatrix} k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \end{vmatrix}$$

$$P_3 \qquad 1.\begin{vmatrix} t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \end{vmatrix} \quad 2.\begin{vmatrix} t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \end{vmatrix} \quad 3.\begin{vmatrix} t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad 4.\begin{vmatrix} t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \end{vmatrix}$$

H. B. MANN [1] könyvében közölt idevágó eredmények a fentiek speciális eseteként $n = 2$ helyettesítéssel adódnak.

2. §. Gyakorlati alkalmazás

Az alábbiakban a fenti eredményeknek — a kísérletek tervezésével kapcsolatos — gyakorlati alkalmazására fogunk példát mutatni.[3] A példát a növénytermesztés köréből vesszük, mivel a szóban forgó statisztikai módszereket általában mezőgazdasági problémáknál használják, bár lehetőség van ipari alkalmazásokra is.

Tegyük fel, hogy valamely növény négy különböző fajtáját akarjuk összehasonlítani. Legyenek ezek n_1, n_2, n_3 és n_4. Ugyanakkor azt is ki akarjuk próbálni, hogy az ország melyik táján, melyik fajtát legcélszerűbb termelni. Jelöljük a szóbajövő területeket így: l_1, l_2, l_3, l_4. Lehetőség mutatkozik még arra is, hogy 4 különböző trágyafajta és 4 kezelési mód hatását is tanulmányozzuk, ha a talaj az egyes vetési területeken belül is inhomogenitásokat mutat. (Ekkor feltesszük, hogy a talaj minősége lineárisan változik.) Ha a talajt az egyes területeken belül homogénnek tekintjük, akkor még két újabb hatás-sorozat kipróbálására van lehetőség. Jelöljék a kezelési módokat k_1, k_2, k_3, k_4, a trágyafajtákat pedig t_1, t_2, t_3, t_4.

Az l_1, l_2, l_3, l_4 területek mindegyikén vegyünk fel egy négyzetalakú földterületet, amelyet osszunk fel 4×4-es négyzetre. Így az l_1, l_2, l_3, l_4 területeken levő négyzetek együttesen $4\times 4\times 4$-es kockát alkotnak.

Ezen kockába az n_1, n_2, n_3, n_4, illetve a k_1, k_2, k_3, k_4, illetve a t_1, t_2, t_3, t_4 jeleket helyezzük el, úgy, mint azt az előző táblázaton tettük. A vetési — és trágyázási — tervet e szerint készítsük el, illetve a különböző kezelési módokat e szerint alkalmazzuk.

3. §. Statisztikai értékelés

Természetesen az, hogy pl. az n_1 fajtából kaptuk a legkedvezőbb termési eredményt, nem feltétlenül jelenti azt, hogy ez a fajta jobb volt, mint a többi: lehet, hogy ez véletlen. A továbbiakban arra a kérdésre adunk választ, hogy a terméseredmények eltérése mikor szignifikáns.

Legyen az i-edik terület j-edik sorának k-adik oszlopában a terméseredmény ξ_{ijk}. Tegyük fel, hogy itt az α-adik fajtát vetettük, a β-adik trágyafajtát és a γ-adik kezelési módot alkalmaztuk. Feltesszük, hogy valamennyi ξ_{ijk} normális eloszlású ugyanazon σ szórással. Legyen $\mathbf{M}(\xi_{ijk}) = m_{ijk}$, és $\xi_{ijk} = m_{ijk} + \eta_{ijk}$. Legyen $m_{ijk} = l_i + o_j + s_k + n_\alpha + t_\beta + k_\gamma + m$, ahol l_i, n_α, t_β, k_γ rendre az i-edik terület, α-adik növényfajta, β-adik trágyafajta és γ-adik kezelési mód hatását mutatja. o_j és s_k a föld inhomogenitására jellemző, vagy ha az homogén, akkor két újabb paraméter hatását jellemzi. Feltehető, hogy[4]

$$\sum_{i=1}^{r} l_i = \sum_{j=1}^{r} o_j = \sum_{k=1}^{r} s_k = \sum_{\alpha=1}^{r} n_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} t_\beta = \sum_{\gamma=1}^{r} k_\gamma = 0 .$$

[3] E példa kiválasztásában SZÉKELY GÁBOR volt segítségünkre.

[4] A statisztikai értékelést r élű háromdimenziós kockára készítjük el. A fenti példában $r = 4$.

Nyilván fennállnak a következő összefüggések:

$$\bar{\xi}_{i\cdot\cdot} = \bar{\eta}_{i\cdot\cdot} + l_i + m\,; \quad \bar{\xi}_{\cdot j\cdot} = \bar{\eta}_{\cdot j\cdot} + o_j + m\,; \quad \bar{\xi}_{\cdot\cdot k} = \bar{\eta}_{\cdot\cdot k} + s_k + m\,;$$

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} + m\,;$$

$$\bar{\xi}_\alpha = \bar{\eta}_\alpha + n_\alpha + m\,; \quad \bar{\xi}_\beta = \bar{\eta}_\beta + f_\beta + m\,; \quad \bar{\xi}_\gamma = \bar{\eta}_\gamma + k_\gamma + m\,;$$

ahol pl.

$$\bar{\xi}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{r^2}\sum_{j,k=1}^{r} \xi_{ijk}\,, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{r^3}\sum_{i,j,k=1}^{r} \xi_{ijk}\,, \quad \bar{\xi}_\alpha = \frac{1}{r^2}\sum \xi_{ijk}\,.$$

Az utóbbinál az összegezést azon i, j, k indexekre kell kiterjeszteni, amelyeknek megfelelő helyeken az α-adik fajtát vetettük.

A szignifikáns eltérések kimutatására a szóráselemzés módszerét használjuk. Legyen

$$Q = \sum_{i,j,k=1}^{r} (\xi_{ijk} - \bar{\xi})^2\,.$$

Elemi számolással belátható, hogy

$$Q = r^2 \sum_{i=1}^{r} (\bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{j=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{k=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi})^2 +$$

$$+ r^2 \sum_{\alpha=1}^{r} (\bar{\xi}_\alpha - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\beta=1}^{r} (\bar{\xi}_\beta - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\gamma=1}^{r} (\bar{\xi}_\gamma - \bar{\xi})^2 +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{r} (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi}_\alpha - \bar{\xi}_\beta - \bar{\xi}_\gamma + 5\,\bar{\xi})^2\,.$$

Az egyenlőség jobboldalának tagjait jelöljék rendre Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 és Q_7. A Q szabadsági foka $r^3 - 1$, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 mindegyikének szabadsági foka $r - 1$, Q_7 szabadsági foka pedig $r^3 - 6r + 5$.

Mivel, mint látható, a jobboldal tagjai szabadsági fokainak összege egyenlő a baloldal szabadsági fokával, és a Fischer—Cochran tétel többi feltételei is teljesülnek (lásd pl.: [1]) — Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 és Q_7 független χ^2-eloszlású valószínűségi változók.

A gyakorlati alkalmazásoknál az áttekinthetőség miatt célszerű elkészíteni a következő szórásfelbontó táblázatot:

Szórás-felbontó táblázat

A szórás eredete	Az eltérések négyzetösszege	Szabadsági fokok	Szórásnégyzet
A vetési helyek eltéréséből adódó szórás:	$Q_1 = r^2 \sum_{i=1}^{r} (\bar{\xi}_{i\cdot} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_1^2 = \frac{1}{r-1} Q_1$
Az oszlopok közti eltérés miatti szórás:	$Q_2 = r^2 \sum_{j=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot j} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_2^2 = \frac{1}{r-1} Q_2$
A sorok közti eltérés miatti szórás:	$Q_3 = r^2 \sum_{i=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot k} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_3^2 = \frac{1}{r-1} Q_3$
A növényfajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_5 = r^2 \sum_{\alpha=1}^{r} (\bar{\xi}_{\alpha} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_4^2 = \frac{1}{r-1} Q_4$
A trágyafajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_5 = r^2 \sum_{\beta=1}^{r} (\bar{\xi}_{\beta} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_5^2 = \frac{1}{r-1} Q_5$
A kezelési fajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_6 = r^2 \sum_{\gamma=1}^{r} (\bar{\xi}_{\gamma} - \bar{\xi})^2$	$r-1$	$s_6^2 = \frac{1}{r-1} Q_6$
Hiba:	$Q_7 = \sum_{i,j,k=1}^{r} (\bar{\xi}_{ijk} - \bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi}_{\alpha} - \bar{\xi}_{\beta} - \bar{\xi}_{\gamma} + 5\bar{\xi})^2$	$r^3 - 6r + 5$	$s_7^2 = \frac{1}{r^3 - 6r + 5} Q_7$
Összesen	$Q = \sum_{i,j,k=1}^{r} (\bar{\xi}_{ijk} - \bar{\xi})^2$	$r^3 - 1$	$s^2 = \frac{1}{r^3 - 1} Q$

Először a következő H_{04} hipotézis elfogadása felől fogunk dönteni: $n_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$), azaz a vizsgált növény egyes fajtái közti különbségek a terméseredményben nem okoznak szignifikáns eltérést.

Ha a H_{04} hipotézis igaz, s_4^2/s_7^2 F-eloszlást követ ($r - 1$, $r^2 - 6r + 5$) paraméterekkel és 1 várható értékkel. Az F-eloszlásról készített táblázatok segítségével s_4^2/s_7^2 értékének ismeretében dönthetünk adott (pl. 95%-os) szinten, hogy elfogadjuk-e a H_{04} hipotézist, vagy nem.

Hasonló módon dönthetünk a H_{01}, H_{02}, H_{03}, H_{05}, H_{06}, hipotézisek elfogadása felől is, tehát arról, hogy az $l_i = 0$, $o_j = 0$, $s_k = 0$, $t_\beta = 0$, $k_\gamma = 0$ hipotéziseket elfogadjuk-e.

Ha a $H_{01}, H_{02}, H_{03}, H_{04}, H_{05}, H_{06}$ hipotéziseket a kísérletek alapján el kellett fogadnunk, akkor a kísérlet azt mutatta, hogy a terméseredmény az egyes hatásokkal szemben közömbös.

Ha ezen hipotézisek valamelyikét el kellett vetnünk, akkor az illető hatás csökkenteni, illetve növelni képes a terméseredményt. Ha azt tapasztaljuk például, hogy a H_{04} hipotézist el kell vetnünk, és az első növényfajta terméseredménye magasabb, mint a többié, akkor az $n_1 \neq 0$, $n_2 = n_3 = n_4 = \ldots = n_r = -n_1/(r - 1)$ hipotézis elfogadásáról fogunk a fentiekhez hasonló módon dönteni.

Elképzelhető, hogy kiemelkedő terméseredményt akkor kapunk csak, ha pl. a növényfajták közül az elsőt és a trágyafajták közül a másodikat együtt alkalmazzuk. Annak eldöntése, hogy az első növényfajta és a második trágyafajta használata valóban szignifikáns eltérést okoz, a szórásfelbontásnak az előbbiektől eltérő módját teszi szükségessé.

Legyen most $m_{ijk} = l_i + o_j + s_k + x_{\alpha\beta} + k_\gamma + m$, ha az i-edik terület j-edik oszlopának k-adik sorába az α-adik fajtát a β-adik trágyázással vetettük, és a γ-adik kezelési módot használtuk. m_{ijk}, l_i, o_j, s_k, k_γ és m jelentése megegyezik az eddigiekkel, $x_{\alpha\beta}$ pedig az α-adik növény- és β-adik trágyafajta együttes hatását jellemzi.

Ekkor $\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}$, $\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}$, $\bar{\xi}_{\cdot\cdot k}$, $\bar{\xi}_\gamma$ és $\bar{\xi}$ értéke megegyezik a fentiekkel, és

$$\bar{\xi}_{\alpha\beta} = \bar{\eta}_{c\beta} + x_{\alpha\beta} + m ;$$

itt

$$\bar{\xi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2} \sum \xi_{ijk} ,$$

ahol az összegezést azon i, j, k indexekre kell kiterjeszteni, amelyeknek megfelelő helyen az α-adik növényfajtát vetettük a β-adik trágyafajtával.

Most a szórás-felbontás a következőképpen alakul:

$$Q = \sum_{i,j,k=1}^{r} (\xi_{ijk} - \bar{\xi})^2 = r^2 \sum_{i=1}^{r} (\bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{j=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi})^2 +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{r} (\bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi})^2 + r \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\bar{\xi}_{\alpha\beta} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\gamma=1}^{r} (\bar{\xi}_\gamma - \bar{\xi})^2 +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{r} (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi}_{\alpha\beta} - \bar{\xi}_\gamma + 4\,\bar{\xi})^2 .$$

A szórás-felbontó táblázat elkészítése teljesen a fentiekhez hasonló módon történhet.

Azon kérdés eldöntésére, hogy valamely (α, β)-hatás okoz-e szignifikáns eltérést, a következő hipotézist állítjuk fel: $x_{\alpha\beta} = 0$ minden (α, β) párra.

Ezen hipotézis teljesülése esetén az s_4^2/s_6^2 változó F-eloszlású $(r^2 - 1,\ r^3 - r^2 - 4r + 4)$ paraméterekkel, ahol

$$s_4^2 = \frac{r^2}{r^2 - 1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\bar{\xi}_{\alpha\beta} - \bar{\xi})^2 ,$$

$$s_6^2 = \frac{1}{r^3 - r^2 - 4r + 4} \sum_{i,j,k=1}^{r} (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i\cdot\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot j\cdot} - \bar{\xi}_{\cdot\cdot k} - \bar{\xi}_{\alpha\beta} - \bar{\xi}_\gamma + 4\,\bar{\xi})^2 .$$

A hipotézist akkor vetjük el, ha valamelyik (α, β) pár szignifikáns eltérést okoz.

(Beérkezett: 1956. VII. 20.)

IRODALOM

[1] H. B. MANN : *Analysis and design of experiments.* Dover, New York, 1949.
[2] TOSIO KITAGEWA — MICHIWO MITOME : *Tables for the design of factorial experiments.* Tokyo, 1953.
[3] K. A. BROWNLEE — P. K. LORAIN : „The relationship between finite groups and completely orthogonal squares, cubes and hyper-cubes". *Biometrika* **35** (1948) 277—281.

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

А. HEPPES и P. RÉVÉSZ

Резюме

В математической статистике, особенно в связи с сельскохозяйственными экспериментами, часто используют метод латинских квадратов и, соответственно, метод ортогональных латинских квадратов (см., например, [1]). В настоящей работе дается одно обобщение этого метода, которое особенно облегчает планирование и статистическую оценку экспериментов, зависимых от многих параметров.

Понятие латинских квадратов обобщается следующим образом: n-мерным перестановочным кубом назовем такую $n =$ мерную кубическую матрицу, элементы которой выбираются из чисел 0, 1, 2,..., m—1 так, что в каждом — параллельном некоторому ребиу куба — столбце матрицы находится некоторая перестановка чисел 0, 1, 2,..., m — 1. (В случае $n = 2$ получается латинский квадрат.)

n-мерный аналог пары ортогональных латинских квадратов называется вариационным множеством кубов и определяется следующим образом:

Перестановочные кубы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ образуют вариационное множество кубов, если из элементов, находящихся на соответствующих местах этих кубов, расположенных согласно индексам кубов, каждая повторная вариация чисел 0, 1, 2,..., m—1 встречается один и только один раз.

В **Теореме 2.** доказывается, что если $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, то существует $\min (p_i^{a_i} - 1)$ n-мерных перестановочных кубов, длина ребер которых m, среди которых любые n образуют вариационное множество кубов при условии, что $n \leq \min (p_i^{a_i} - 1)$.

Во второй части работы с помощью анализа дисперсий вырабатывается метод оценки статистических экспериментов, проделанных с вариационными кубами.

A NEW GENERALIZATION OF THE METHOD OF LATIN SQUARES AND ORTHOGONAL LATIN SQUARES AND ITS APPLICATION TO THE DESIGN OF EXPERIMENTS

A. HEPPES and P. RÉVÉSZ

Summary

The method of Latin squares and that of orthogonal Latin squares has often been applied to the design of experiments, chiefly in connection with agricultural experiments (see e. g. [1]). In the present paper a generalization of this method is given that makes easier, in the first place, the design and statistical evaluation of experiments with several parameters.

The generalization of the notion of a Latin square, the permutation-cube, is defined in the following manner:

An n-dimensional cube-matrix, the elements of which are the numbers 0, 1, 2, ..., $m - 1$ will be called an n-dimensional permutation-cube if every column (i. e. every sequence of elements, parallel to an edge of the cube) of the matrix contains a permutation of the numbers 0, 1, 2, ..., $m - 1$ (a 2-dimensional permutation cube is simply a Latin square).

The appropriate n-dimensional notion generalizing the notion of orthogonal Latin squares will be called variational-cube and is defined as follows:

The permutation-cubes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ constitute a variational n-tuple of cubes if, among the number n-tuples, formed by the corresponding elements of the n cubes and arranged according to the indices of the cubes, every variation with repetition of order n of the numbers $0, 1, \ldots, m-1$ occurs once and only once.

Theorem 2. states that if $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ then there exist a set of n-dimensional permutation-cubes with edge-length m containing $\min (p_i^{a_i} - 1)$ cubes any n of which is a variational n-tuple of cubes provided that $n \leqq \min (p_i^{a_i} - 1)$.

In the second part of the paper the statistical evaluation of experiments designed by means of variational-cubes is elaborated using standard methods of the analysis of variance.