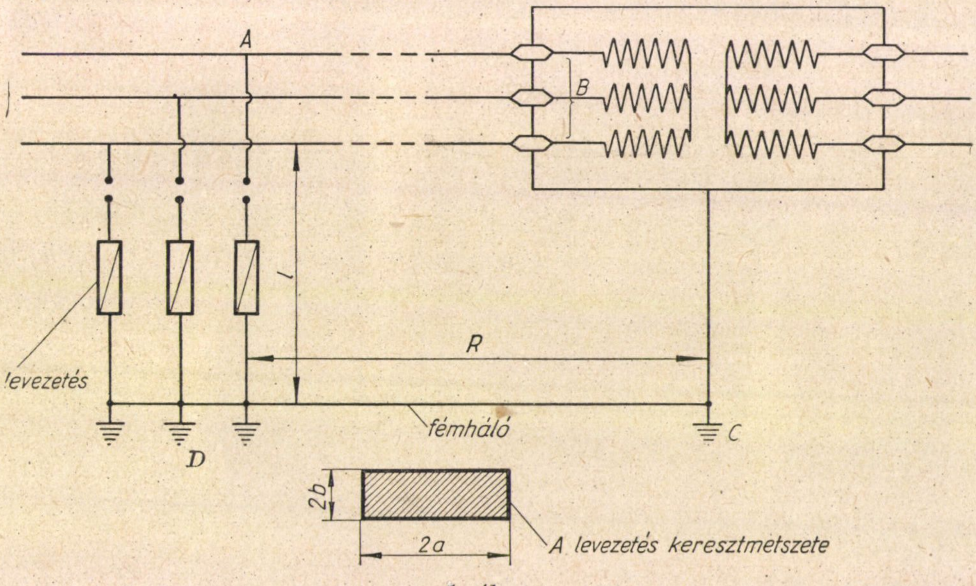
TRANSZFORMÁTORÁLLOMÁS VILLÁMVÉDELMÉVEL KAPCSOLATOS MATEMATIKAI PROBLÉMÁKRÓL

FÉNYES TAMÁS

Jelen dolgozatban a Villamos Energetikai Kutató Intézet megbízásából nagyfeszültségű távvezetéken villámcsapás hatására fellépő túlfeszültségek számításával foglalkozunk. Az alábbi 1. ábrán látható a háromfázisú távvezeték, melyet vizsgálunk (az ábra erősen torzított). A túlfeszültség-

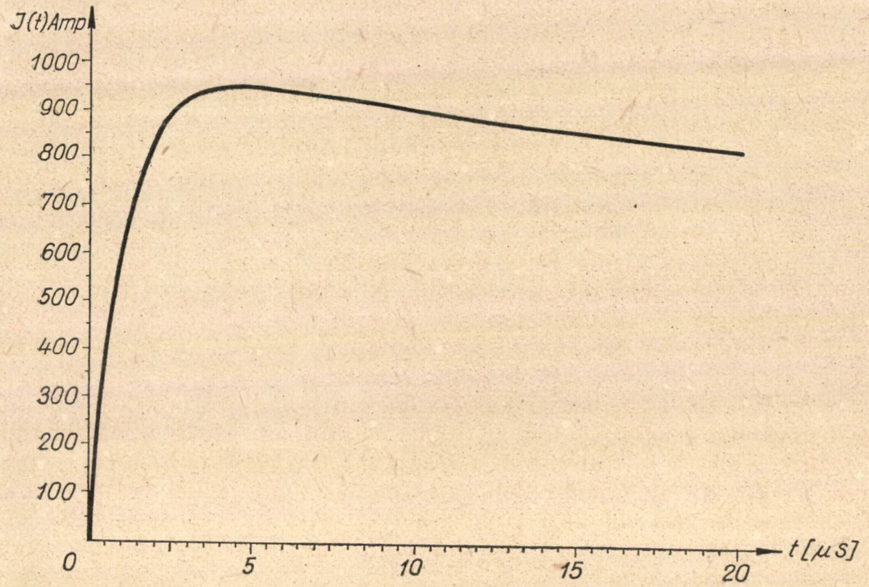


1. ábra

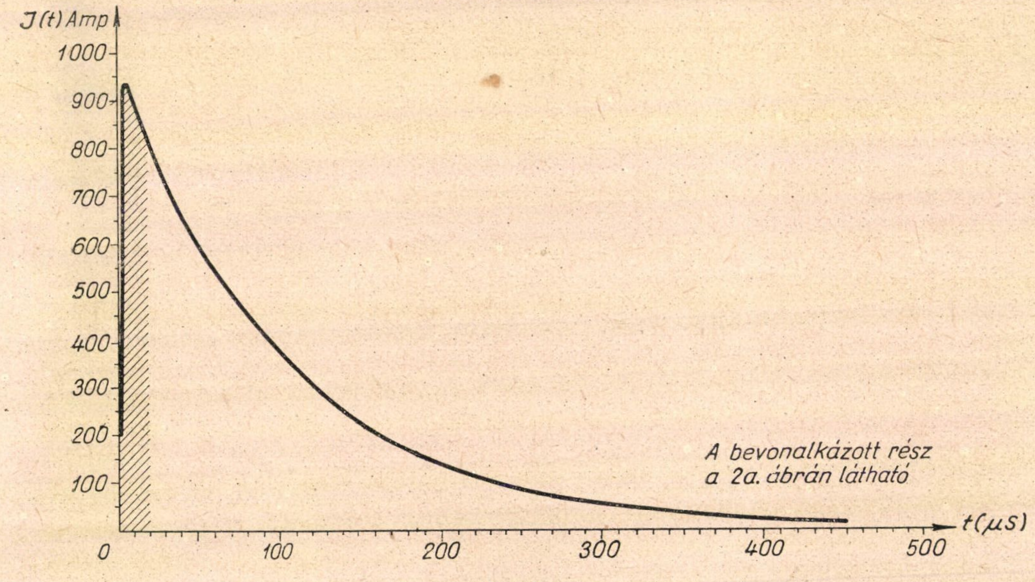
levezetés a transzformátorház védelmére szolgál. Abban az esetben, ha a távvezetéken villámcsapás hatására fellépő vándor-hullám keletkezik, a levezetésben levő szikraköz átüt, és az áram a levezetésen keresztül lefolyik a földbe. Feladatunk meghatározni a B szigetelésen fellépő túlfeszültséget az idő függvényében. A vándorhullámnak a távvezeték egy pontján fellépő maximális figyelembe veendő áramerősségére vonatkozólag a Villamos Energetikai Kutató Intézet gyakorlati adatok alapján a következő becslést közölte velünk :

$$I(t) \simeq I_0 \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \tag{1}$$

ahol $I_0 = 1000\ A$, $T_1 = 10^{-4}$ s, $T_2 = 10^{-6}$ s (lásd: *2.a—2.b ábrák*).



2.a. ábra



2.b. ábra

1. §. A matematikai modell ismertetése

A problémát a következő feltevések alapján oldjuk meg:

1. A távvezetéket ideálisnak tekintjük. Adott hullámellenállása $Z_0 = 500\ \Omega$. Feltesszük, hogy a szikraköz átütése után a teljes áramerősség lefolyik a túlfeszültséglevezetőn, tehát, hogy a távvezetéknek a levezetésen túli része a feszültség és árameloszlást egyáltalán nem befolyásolja. Továbbá feltesszük, hogy a levezetésben levő szikraköz azonnal átüt, mikor fellép rajta a túlfeszültség, s hogy a transzformátorház és a transzformátor közti kapacitás söntölő hatása elhanyagolható. Megjegyezzük még, hogy a levezetésben szereplő koncentrált ellenállást is figyelmen kívül hagytuk.

2. A téglalapkeresztmetszetű levezetésben fellépő szkin-effektust nagyfrekvenciás határesetnek tekintjük, azaz feltételezzük, hogy a levezetés felületén igen vékony rétegben folyik az áram.

3. A levezetést a benne folyó áram által gerjesztett mágneses fluxus szempontjából végtelen hosszúnak tekintjük. (Cikkünk végén közlünk néhány kiegészítő eredményt is, melynél már eltekintünk ezen feltevéstől.)

4. Ha a levezetés ferromágneses anyagból készül (a gyakorlatban vasszalagot szokás alkalmazni), további közelítő feltevésre van szükség, hogy a ferromágneses közegben fellépő valójában nem-lineáris szkin-effektus problémát egyszerű eszközökkel meg tudjuk oldani, és a megoldást fel tudjuk használni. Ezért a — valójában a mágneses térerősségből függő — permeabilitás értékét a valójában fellépő maximális és minimális permeabilitás közötti becsléssel felvett állandó értékkel helyettesítjük. A permeabilitás legkisebb értéke — mely a legnagyobb előforduló mágneses térerősséghez tartozik, — azonban nem ismeretes.

A permeabilitást közelítően végeredményben abból a feltevésből kaphatjuk meg, hogy a mágneses térerősséget a téglalap kerületén állandónak tekintjük. A gerjesztési törvény alkalmazásával a megadott áram ismeretében a térerősség és így a permeabilitás meghatározható. Ezek alapján $\mu_r = 150$-nel dolgoztunk. Cikkünkben ki fogjuk mutatni, hogy a permeabilitás nagysága a jelenségeket nem befolyásolja lényegesen.

A behatolási mélységet a felvett permeabilitásból és a levezetés fajlagos vezetőképességéből kiszámítva azt tapasztaljuk, hogy ez már alacsony frekvencián is kicsiny a téglalap keresztmetszetű levezetés oldalhosszaival összehasonlítva. Ezen közelítő számítás egyébként második feltevésünket teszi plauzibilissá.

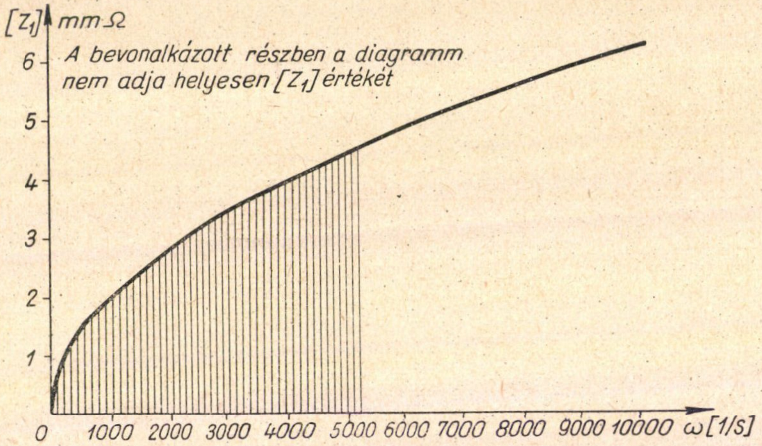
5. A távvezetékben folyó áram és feszültség, mint a hely és idő függvénye a levezetéstől nagy távolságra eleget tesz a távíróegyenletnek. „Nagy távolság" alatt nyilván olyan távolság értendő, mely nagy a levezetés hosszához képest. A levezetésnek egy ilyen környezetét kirekesztve a létrejövő hullám olyan, mintha a levezetést a távvezetéken alkalmazott rövidzárral helyettesítenők. A levezetéstől olyan távolságra, mely a levezetés hosszával egyező nagyságrendű, a feszültség és áram nem elégítik ki a távíróegyenleteket, minthogy azok csak végtelen hosszúnak tekinthető párhuzamos vezetékpárra érvényesek. A levezetésnek ez a hullámalakot eltorzító hatása csak olyan környezetében érvényesül, mely a levezetés hosszával egyenlő nagyságrendű. Minthogy a villámcsapás okozta vándorhullám „hossza" általában nagy a levezetés hosszához képest, azért az áramerősségnek a levezetésnél jelentkező értékeit közelítőleg a távíróegyenlet érvényességének feltételezésével számítják.

Ahhoz, hogy a B szigetelésen fellépő feszültséget meghatározhassuk, ismernünk kell az $ABCD$ hurok impedanciáját. Ezen impedancia és feszültség két részből tevődik össze.

I. A levezetésen folyó áram a levezetés felületén létrehoz egy U_1 feszültséget. Mivel nagyfrekvenciás határesetet vizsgálunk, a levezetés felületén a mágneses térerősség normális komponense kicsiny. Ha az indukciótörvényt alkalmazzuk a levezetés felületére, egyszerűen belátható, hogy a levezetés valamely keresztmetszetének kerületén az elektromos térerősség alkotó irányú komponense közel állandó. Ilymódon a levezetés felületén értelmezhető egy-egy vezetékkeresztmetszetre állandó elektromos potenciál, melyet a levezetés belsejében fellépő mágneses tér indukál; és értelmezhető a levezetés Z_1 impedanciája, mint a frekvencia függvénye Cockcroft [1] szerint:

$$Z_1(\omega) = (1 + j)\, l\, f(a/b) \sqrt{\omega R_0 \mu}\,,$$

ahol l a levezetés hossza, $f(a/b)$ a téglalap oldalainak arányától függő kifejezés (lásd [1]), R_0 a levezetés hosszegységnyi egyenáramú ellenállása. Látható, hogy az impedancia fázisszöge 45°, ami valóban a nagyfrekvenciás határesetnek felel meg.



3. *ábra*

A 3. ábrán ábrázoltuk a $Z_1(\omega)$ impedancia abszolút értékét a frekvencia függvényében a következő felvett adatok mellett: $l = 5$ m, $\mu = 150$, $a =$ $= 10$ mm, $b = 1$ mm és a vasvezeték fajlagos vezetőképessége: $\gamma = 10^7$ $1/\Omega$m. Természetesen $\omega = 0$ frekvencián az ellenállás nem zérus és alacsonyfrekvencián diagramunk hamis.

II. A levezetésben folyó áram a levezetésen kívül mágneses térerősséget gerjeszt. Ezen mágneses térerősség által a levezetés és a transzformátor közti $ABCD$ hurokban létrehozott Φ fluxus U_2 nagyságú feszültséget indukál, mely szintén a B szigetelésen jelentkezik. Ilymódon a Z_1 impedanciához hozzájárul még egy $Z_2 = j\omega L$ impedancia.

Az $ABCD$ hurok teljes impedanciája tehát $Z = Z_1 + Z_2$ és a B szigetelésen fellépő teljes feszültség $U = U_1 + U_2$.

2. §. Az L induktivitás meghatározása

Ahhoz, hogy a minket érdeklő Z_2 impedanciát és a feszültséget kiszámítsuk, meg kell határoznunk az L induktivitás értékét a levezetés geometriai adatai, a levezetés és transzformátor közti R távolság függvényében. Ki fogjuk egészíteni COCKCROFT [1] munkáját. E célból röviden ismertetjük az ő módszerét.

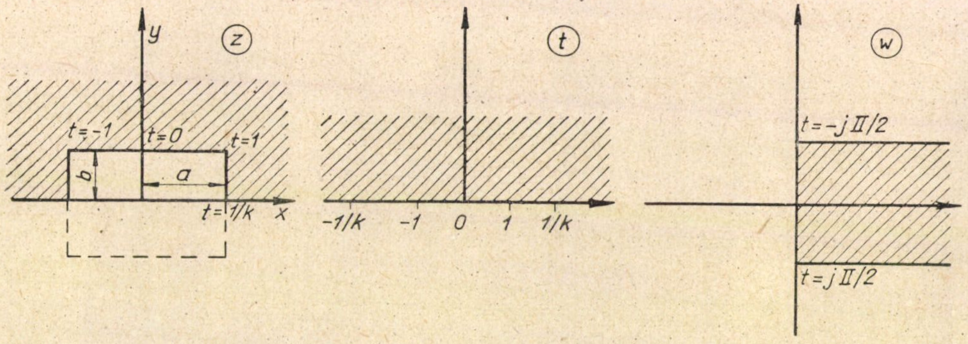
Alkalmazzuk a következő Schwarz—Christoffel transzformációkat :

$$\frac{dz}{dt} = C \sqrt{\frac{1-t^2}{\frac{1}{k^2}-t^2}}.$$

és

$$\frac{dw}{dt} = \frac{I^*}{2\pi\sqrt{t^2-1/k^2}}.$$

Az első transzformáció az integrálási állandó megfelelő megválasztása esetén a t-sík felső felét leképezi a z síkban a 4.ábrában bevonalkázott tartományra,



4. ábra

a t-sík valós tengelye átmegy a z-síkon besraffozott terület alsó konturjába. A C és k mennyiségek a téglalap oldalainak hosszából az alábbi összefüggésekből adódnak :

(2) $$\frac{a}{b} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'},$$

(3) $$C = \frac{ak}{E - k'^2 K} = \frac{bk}{E' - k^2 K'},$$

ahol K és E az első-, illetve másodfajú k-modulusú teljes elliptikus integrál, K' és E' az első-, illetve másodfajú kiegészítő teljes elliptikus integrál.

A második transzformáció a t sík felső felét leképezi a w-síkban egy félsávra. Az I^* a levezetésben folyó áramot jelenti, melyet később fogunk meghatározni.

A $w = f(z)$ függvény képzetes részét potenciálfüggvénynek választva az $f'(z)$ függvény előállítja a téglalap külsejében fellépő mágneses térerősség (mint komplex vektor) konjugáltjának $(-j)$-szeresét $(j = \sqrt{-1})$:

$$H = \frac{I^*}{2\pi C} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} . \tag{4}$$

Ennek birtokában az L induktivitás már számítható. Tudniillik az $ABCD$ hurkon áthaladó Φ fluxus ismeretében

$$L = \frac{\Phi}{I^*} .$$

Határozzuk meg ezt a fluxust a (4) segítségével:

$$\Phi = \mu_0 \int H \, df ,$$

ahol μ_0 a levegő permeabilitását jelenti, és az integráció tartománya a hurok által bezárt területet. Tekintve, hogy elhanyagoltuk a tér függőleges irányban való változását, írhatjuk:

$$\Phi = \mu_0 l \int_a^R H \, dx .$$

(4)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$\Phi = \frac{I^*}{2\pi C} \mu_0 l \int_a^R \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dx .$$

Az első Schwarz—Christoffel transzformáció figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\Phi = \frac{I^*}{2\pi} \mu_0 l \int_{1/k}^{\nu} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{k^2}}} = \frac{I^*}{2\pi} \mu_0 l \log \left(k \nu + \sqrt{k^2 \nu^2 - 1}\right), \tag{5}$$

ahol ν az R pont képe a t síkon, azaz

$$R = C \int_0^{\nu} \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} \, dt + jb , \tag{6}$$

továbbá

$$L = \frac{\Phi}{I^*} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \left(k \nu + \sqrt{k^2 \nu^2 - 1}\right) . \tag{7}$$

Ezzel L-et elvileg meghatároztuk. A $\nu = \nu(R)$ gyakorlatilag nehezen kezelhető elliptikus függvény, amely azonban egyszerűbb alakra hozható. Ugyanis a transzformátor és a levezetés közti R távolság nagy a levezetés keresztmetszetének méreteivel összehasonlítva. Állítsuk elő a (6) aszimptotikáját nagy R értékekre:

$$R = C\int_0^{\nu}\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}\,dt + jb = C\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}-1\right)dt + C\nu + jb -$$

$$-\int_{\nu}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}-1\right)dt.$$

Írhatjuk tehát:

$$R = C\nu + jb + C\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}-1\right)dt + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\cdot$$

vagy ha ismét tekintetbe vesszük, hogy a

$$z(t) = C\int_0^{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{\frac{1}{k^2}-t^2}}\,dt$$

transzformáció a $t = 1/k$ pontot a $z = a - jb$ pontba viszi át, egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$R = C\nu + a - \frac{C}{k} + C\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}-1\right)dt + O\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{8}$$

Végezzük el a (8)-ban szereplő integrálban a következő helyettesítést

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{t^2-1/k^2}{t^2-1}},$$

ahol a szereplő függvény az úgynevezett Jacobi-féle $\operatorname{sn} u$ függvény; akkor egyszerű számítással nyerjük:

$$C\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-1/k^2}}-1\right)dt = C\left(\frac{1}{k}-k\right)\int_0^{K}\frac{1}{1+\operatorname{sn} u}\,du = \frac{C}{k} - a.$$

Ezt behelyettesítve (8)-ba, ha ν nagy,

$$R \simeq C\nu. \tag{9}$$

(9) és (7) segítségével, továbbá annak figyelembevételével, hogy

$$k\nu \gg 1.$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \frac{2kR}{C}. \tag{10}$$

Vagy ha bevezetjük a következő jelölést:

$$r_0 = \frac{C}{2k}, \tag{11}$$

akkor

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \frac{R}{r_0}. \tag{12}$$

Nagyon érdekes eredményre jutottunk. Egy végtelen hosszú r_0 sugarú körkeresztmetszetű vezető l hosszúságú darabja által gerjesztett fluxus épp (12)-ből számítható. Látjuk tehát, hogy a külső térben gerjesztett fluxus szempontjából a téglalapkeresztmetszetű levezetést körkeresztmetszetűvel helyettesíthetjük, melynek sugarát a téglalap geometriai adataiból számíthatjuk.

(3) és (11)-ből

$$r_0 = \frac{a}{2(E - k'^2 K)}.$$

Ha d-vel jelöljük a téglalap átlóját, egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$r_0 = \frac{d}{4} \frac{1}{\sqrt{(E - k'^2 K)^2 + (E' - k^2 K')^2}}.$$

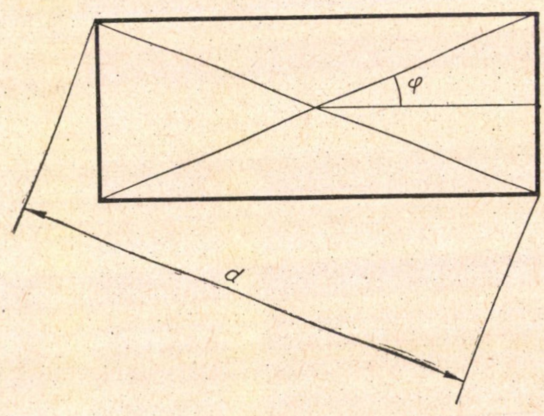
Legyen

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{(E - k'^2 K)^2 + (E' - k^2 K')^2}},$$

akkor

$$r_0 = \frac{d}{2} F(\varphi), \tag{13}$$

ahol φ a téglalap középponti szögének felét jelenti (lásd 5. ábra).

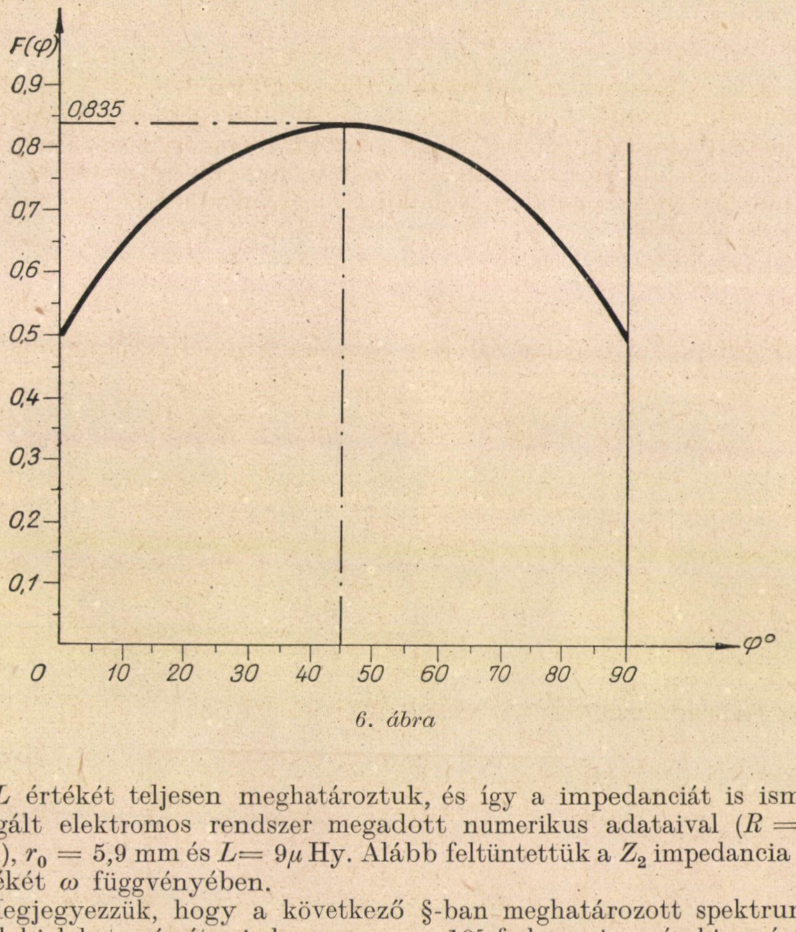


5. ábra

φ a következő egyenletből számítható ki:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E' - k^2 K'}{E - k'^2 K}.$$

Alább feltüntetjük az $F(\varphi)$ függvényt.

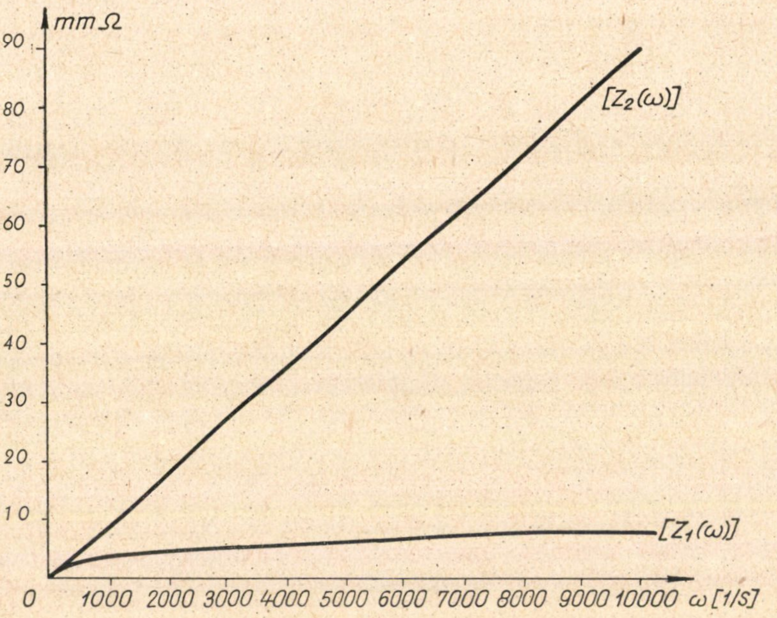


6. ábra

Ezzel L értékét teljesen meghatároztuk, és így a impedanciát is ismerjük. A vizsgált elektromos rendszer megadott numerikus adataival ($R = 50$ m, $l = 5$ m), $r_0 = 5{,}9$ mm és $L = 9\mu$ Hy. Alább feltüntettük a Z_2 impedancia abszolút értékét ω függvényében.

Megjegyezzük, hogy a következő §-ban meghatározott spektrumfüggvényből ki lehet számítani, hogy az $\omega = 10^5$ frekvencia még kis mértékben részt vesz a vándorhullám kialakításában. Ebben a frekvencia-intervallumban a impedanciák már nincsenek feltüntetve, ez azonban nem okozhat félreértést, a görbék menete az ábrákból teljesen világos.

Amennyiben összehasonlítjuk a 3. és 7. ábrát, látjuk, hogy az alacsony frekvenciák tartományát kivéve $|Z_2(\omega)| \gg |Z_1(\omega)|$. Az $ABCD$ hurok impedanciáját most már teljesen ismerjük és rátérhetünk a feszültségek számítására. Az impedanciákra vonatkozó nagyságrendi összefüggés alapján várható, hogy a feszültségekre nézve is hasonló nagyságrendi összefüggést nyerünk.



7. ábra

3. §. A feszültségek meghatározása

Számítsuk ki először a vándorhullám feszültségének komplex spektrumfüggvényét:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty I(t)\, Z_0\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right]; \tag{14}$$

ebből a valós spektrumfüggvények :

$$a(\omega) = \mathcal{Re}\, S(\omega) = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \right],$$

$$b(\omega) = -\mathcal{Im}\, S(\omega) = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2} \right],$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{T_1} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{T_2}.$$

A szigetelésen fellépő feszültség a távvezeték-elmélet szerint a következő képletből számítható :

$$U(t) = \mathcal{Re} \int_0^\infty S(\omega)\,[1 + p(\omega)]\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{15}$$

ahol a reflexió-koefficiens:

$$p(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_0}{Z(\omega) + Z_0}.$$

A 3. és 7. ábrákból látható, hogy $|Z(\omega)| < Z_0$. Ily módon nyerjük, hogy

$$1 + p(\omega) \cong \frac{2Z(\omega)}{Z_0},$$

és

$$U(t) = \frac{2}{Z_0} \mathcal{Re} \int^{\infty} S(\omega)\, Z(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

vagy

$$U_1(t) = \frac{2}{Z_0} \mathcal{Re} \int_0^{\infty} S(\omega)\, Z_1(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{16}$$

és

$$U_2(t) = \frac{2}{Z_0} \mathcal{Re} \int_0^{\infty} S(\omega)\, Z_2(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{17}$$

A távvezeték az áramerősség szempontjából úgy tekinthető tehát, mintha a végén rövidre lenne zárva, $I^* = 2I$. (17)-et ki sem kell számítanunk, hiszen nyilvánvalóan

$$U_2(t) = 2L \frac{dI}{dt} = 2 I_0 L \left(\frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right). \tag{18}$$

A (16)-ban az integrálást kell még elvégeznünk. Helyettesítsük (16)-ba (1)-et és (14)-et, akkor

$$U_1(t) = \frac{2I_0}{\pi} \mathcal{Re} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) Z_1(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \tag{19}$$

$$= A\, \mathcal{Re} \int_0^{\infty} (1 + j) \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) \sqrt{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

ahol

$$A = \frac{2I_0}{\pi} l f\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{R_0 \mu}.$$

Tekintsük most a következő integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma + j\omega} \sqrt{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{20}$$

Ez $\omega = u^2$ helyettesítéssel a következőképp írható:

$$(21) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{\gamma + ju^2} e^{jtu^2} du = -j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{jtu^2} du + j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma e^{jtu^2}}{\gamma + ju^2} du.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jtu^2}}{\gamma + ju^2} du = f(t) \quad \text{és} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jtu^2} du = (1+j)\sqrt{\frac{\pi}{2t}} = \varphi(t),$$

akkor (21) segítségével felírható a következő differenciálegyenlet, ha $t \neq 0$:

$$(22) \qquad f'(t) + \gamma f(t) = \varphi(t) = (1+j)\sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

Megjegyezzük, hogy a differenciálegyenlet levezetésekor a paraméter szerinti differenciálás és integrálás sorrendje fel lett cserélve. Ez megtehető, mivel az eredményül kapott integrál egyenletesen konvergens minden, a $t = 0$ helyet nem tartalmazó zárt intervallumon.

A differenciálegyenlet megoldása:

$$(23) \qquad f(t) = B e^{-\gamma t} + \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} (1+j) e^{-\gamma t} \int\limits_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau,$$

ha $t \neq 0$. $f(t)$ folytonos a $t = 0$ helyen is:

$$f(0) = B = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma + ju^2} du = (1-j)\frac{\pi}{\sqrt{2\gamma}}.$$

Ezzel

$$f(t) = (1-j)\frac{\pi}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\gamma t} + \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} (1+j) e^{-\gamma t} \int\limits_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau.$$

Így (20)-ra nyerjük, hogy

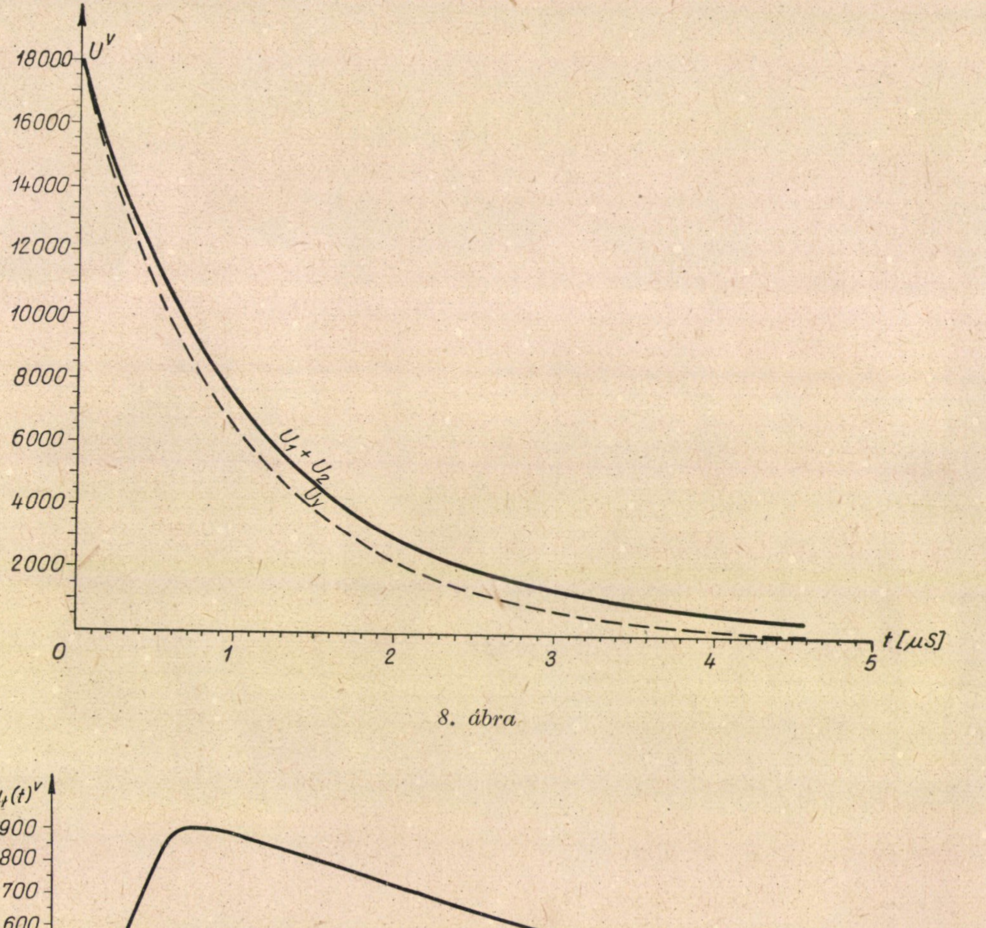
$$(24) \qquad \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\gamma + j\omega} \sqrt{\omega}\, e^{j\omega t} d\omega = -j f'(t) =$$

$$= (1-j)\sqrt{\frac{\pi}{2t}} + (1+j)\sqrt{\frac{\gamma}{2}} e^{-\gamma t} + (j-1)\sqrt{2\pi\gamma}\, e^{-\gamma t} \int\limits_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau.$$

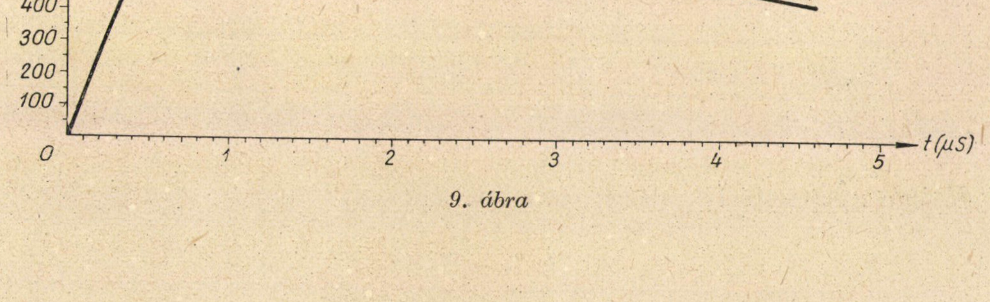
(24) segítségével (19) alapján az U_1 feszültségre végeredményben a következő kifejezést nyerjük:

$$(25)\qquad U_1(t) = \frac{4\sqrt{2\pi}\, I_0 l}{\pi} f\left(\frac{a}{b}\right)\sqrt{R_0\mu}\left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} e^{-\frac{t}{T_2}} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{T_2}}} e^{\tau^2} d\tau - \frac{1}{\sqrt{T_1}} e^{-\frac{t}{T_1}} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{T_1}}} e^{\tau^2} d\tau\right].$$

Az alábbi ábrákon láthatjuk a feszültségek időbeli lefolyását egy megadott téglalapkeresztmetszet esetén.



8. ábra



9. ábra

Megjegyezzük, hogy a feszültségek negatív értékeket is felvesznek, ezek azonban oly kicsinyek, hogy ábráinkon nem tüntethetők fel. Továbbá látható, hogy nem követünk el nagy hibát, ha a levezetés belsejében fennálló teret, vagyis az $U_1(t)$ feszültséget elhanyagoljuk. Ebből igen érdekes következményeket vonhatunk le.

I. U_1 elhanyagolása után a téglalapkeresztmetszetű levezetés ekvivalens egy olyan körkeresztmetszetűvel, melynek sugarát (13)-ból határozhatjuk meg.

II. A feszültség nagyságát a levezetés anyagi tulajdonságai csak igen kis mértékben befolyásolják, azaz mindegy, hogy a levezetés milyen fémből van.

Ily módon az 1. §-ban levő 2. és 4. feltevések feleslegessé válnak.

4. §. Kiegészítő megjegyzések

Ha figyelembevesszük a mágneses térnek a függőleges irányban való változását is, akkor számításaink a következőképp végezhetők el. Tükrözzük a távvezeték felső vezetékét és a levezetést a földre, mint végtelen jó vezetőképességű közegre. Feltételezzük, hogy már az első paragrafusban említett „hullámhossz" igen hosszú. Ily módon állandó áramerősséggel számolva, a Biot—Savart törvényt alkalmazva az U alakú áramot figyelembevételével az $ABCD$ hurkon áthaladó fluxus és a hurok L induktivitása kiszámítható. A számítások elemiek, de igen hosszadalmasak és csak a végeredményt közöljük:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\Bigg[\sqrt{R^2+4l^2} - R + l\log\frac{l}{r_0} + \frac{R}{2}\log\frac{R}{l} - \frac{l}{2}\log\frac{\sqrt{R^2+4l^2}+2l}{\sqrt{R^2+4l^2}-2l} - \frac{R}{4}\log\frac{\sqrt{R^2+4l^2}+R}{\sqrt{R^2+4l^2}-R} - 0{,}92\,l\Bigg].$$

A megadott adatokkal $L \doteq 5{,}6\,\mu$Hy. Látjuk, hogy az ilymódon kiszámított induktivitás jóval kisebb annál, amelynél eltekintünk a mágneses tér függőleges irányban való változásától. Ez fizikailag nyilvánvaló, hisz az $ABCD$ hurokban a függőleges levezetés által gerjesztett tér és a két vízszintes vezeték által gerjesztett tér iránya egymással ellentétes. A problémával kapcsolatos további számításaink során ki szándékozunk térni az 1.-nek a feszültség időbeli lefolyására gyakorolt hatásának a vizsgálatára is.

A Villamosenergetikai Kutató Intézet méréseket szándékozik végezni a problémával kapcsolatban. A mérési eredményekről és a további számításokról további, a Villamos Energetikai Kutató Intézettel közösen írt cikket szándékozunk megjelentetni, melyben még ezen paragrafusban említett induktivitásra egy nomogramot is fogunk közölni. Tervbe vettük továbbá, hogy a matematikai modell felállításánál (1. §.) az 5. pontban szereplő feltevést, hogy az adott esetben érvényesek a távíróegyenletek, elejtjük, s így az egzaktabb tárgyalását adjuk a problémának.

Befejezésül köszönetet mondunk Pál Sándornak a probléma megoldásánál nyujtott értékes támogatásáért.

IRODALOM

[1] J. D. COCKCROFT: „Skin effect in rectangular conductors at high frequencies." *Proceedings of the Royal Society of London* **122** (1929) 533—542.
[2] SIMONYI K.: *Elméleti villamosságtan.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.

(Beérkezett: 1956. II. 14.)

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ЗАЩИТОЙ ТРАНСФОРМАТОРНЫХ СТАНЦИЙ ОТ МОЛИН

Т. ФЕНЕШ

Резюме

В настоящей работе автор занимается рассчетом перенапряжений возникающих в проводах вследствии удара молнии. Распространяющаяся в проводе электрическая волна считается данной на основании эмпирической формулы. Математическое исследование имеющего место транзиэнтного явления производится с учетом отвода перенапряжения с прямоугольным разрезом. Возникающий при отводе *скин-эффект* считается предельным случаем высокой частоты, поэтому используются и развиваются полученные КОКРОФТом в работе [1] результаты. Автор решает проблему с помощью эллиптических функций. С практической точки зрения весьмя интересно, что изучаемое явление может с хорошим приближением считаться независимым от материальных свойств отвода и что отвод с праямоугольным разрезом эквивалентен отводу с круговым разрезом радиус которого определяется автором.

SUR UN PROBLEME MATHÉMATIQUE CONCERNANT LA PROTECTION DES LIGNES A HAUTE TENSION CONTRE LA FOUDRE

T. FÉNYES

Résumé

Dans cet article l'auteur se propose de calculer les surtensions occasionnées par l'effet de la foudre dans les lignes a haute tension. L'onde électrique se propageant dans la ligne est supposée donnée d'après une formule empirique. L'analyse mathématique de ce phénomene transitoire qui intervient dans la ligne a haute tension tient compte du fait que le conducteur de surtension est de section rectangulaire. L'effet skin intervenant dans le conducteur est considéré comme un cas limite de haute fréquence. C'est pour cette raison que l'auteur utilise et complète en même temps les résultats de COCKCROFT [1].

L'auteur résout ce probleme en se basant sur la théorie des fonctions elliptiques. Au point de vue pratique, il est interessant de noter que le phénomène produit peut être considéré, d'une façon approximative, comme indépendant de la nature du conducteur, et que le conducteur à section rectangulaire est équivalent a un conducteur à section cylindrique dont le rayon est déterminé par l'auteur.