

## MEGJEGYZÉSEK A „KÉSÉS-FÜGGVÉNNYEL” KAPCSOLATBAN

ARATÓ MÁTYÁS

Néhány éve jelent meg E. ALTENKIRCH *Verzögerungsfunktion* című könyve [1]. Jelen megjegyzés az e könyvben tárgyalt, az alkalmazások szempontjából figyelemreméltó tárgykör matematikai tárgyalásmódjára vonatkozik és azt egyszerűsíti, ugyanakkor felhívja a figyelmet azokra az ismert eredményekre melyek — úgy látszik — elkerülték a könyv szerzőjének a figyelmét.

A könyv által tárgyalt probléma a következő: meghatározandó explicit alakban az  $y'(x) = -\alpha y(x-1)$  retardált differenciálegyenlet megoldása azon kezdeti feltétel mellett, hogy  $y(x) = 1$ , ha  $-1 \leq x < 0$ . Ezen egyenlet  $\varphi(x, \alpha)$  megoldásából nyert  $f(x, \alpha) = 1 - \varphi(x, \alpha)$  függvényt nevezi a szerző „késés-függvénynek.” Ezen függvény fellép például olyan automatikus szabályozó berendezéseknél, melyeknél a visszacsatolás késéssel jár. A könyv példaként az abszorpciós hűtőgép esetét tárgyalja.

A  $f(x, \alpha)$  függvényre a következő explicit kifejezés nyerhető:

$$f(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{[x]} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1}$$

(ha  $x < 0$ , az üres összegben 0 értendő).  $f(x, \alpha)$  tehát  $n$  és  $n+1$  között  $(n+1)$ -edfokú polinom. ( $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ ) A könyv matematikai függeléke foglalkozik az

$$U(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!}$$

sorral, amelynek  $N$ -edik részletösszege,  $\varphi_N(x, \alpha)$ , megegyezik  $\{1 - f(x, \alpha)\}$ -val, ha  $N-1 \leq x < N$ ; ugyanis

$$\sum_{k=0}^N (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!} = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1} = 1 - f(x, \alpha).$$

Az  $U(x, \alpha)$  sor összege — mint alább megmutatjuk — explicite kiszámítható, mégpedig

$$U(x, \alpha) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$

ahol  $b$  a

$$(1) \quad b = \alpha e^b$$

transzcendens egyenlet legkisebb abszolút értékű gyöke.

Ez a tény az  $f(x, \alpha)$  függvény kiszámítását nagy  $x$  értékekre rendkívül megkönnyíti, mivel  $N$  nagy értékeire, mint azt meg fogjuk mutatni,  $\varphi_N(x, \alpha)$  gyakorlatilag  $U(x, \alpha)$ -val vehető egyenlőnek, vagyis  $f(x, \alpha)$  a  $f(x, \alpha) = 1 - U(x, \alpha)$  összefüggésből határozható meg közelítőleg. Az  $U(x, \alpha)$ -ra vonatkozó explicit képlet az említett könyv szerzőjének figyelmét elkerülte, pedig az az összefüggés régóta ismeretes.

Legutóbb O. PERRON vizsgálta [2] dolgozatában az

$$(2) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{(x-n)^n}{n!}$$

speciális BRUWIER-féle sor explicit alakban való előállítását és bebizonyította, hogy

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{1-b} e^{-bx},$$

ahol  $b$  definíciója ugyanaz mint fentebb az (1) egyenletnél. (O. PERRON idézett [2] cikkében sokkal általánosabb feladattal foglalkozik, de nekünk csak erre a speciális esetre van szükségünk, mely megtalálható a PÓLYA—SZEGŐ [3] könyvben is.)

Az (1) egyenlettel már L. EULER [4] is foglalkozott, s megoldása megtalálható a PÓLYA—SZEGŐ [3] könyvben is. Általánosabb formában oldja meg a (1) egyenletet RÉNYI A. [5] cikkében. Annak bizonyítása, hogy  $|\alpha| < 1/e$  esetén a (1) egyenletnek az egységkör belsejében pontosan egy gyöke van, a Rouché-tétel segítségével történhet. Ezt a gyököt  $\alpha$  hatványsoraként a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(4) \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} \alpha^n}{n!}.$$

(4) közvetlenül a következőképpen bizonyítható be: legyen

$$(5) \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha^n;$$

akkor Cauchy tétele szerint

$$\begin{aligned} 2\pi i c_n &= \oint_{(l)} \frac{b}{\alpha^{n+1}} d\alpha = -\frac{1}{n} \oint_{(l)} b d(\alpha^{-n}) = \\ &= \frac{1}{n} \oint_{(l')} \alpha^{-n} db = \frac{1}{n} \oint_{(l')} \frac{e^{nb}}{b^n} db = \frac{2\pi i n^{n-1}}{n!}, \end{aligned}$$

ahol  $(l)$  az  $\alpha$ -sík,  $(l')$  pedig a  $b$ -sík origója körüli zárt görbe.

A  $b$  értéken kívül annak minden analitikus függvényét is kifejezhetjük mint  $\alpha$  hatványsorát. Tekintsük a bennünket érdeklő

$$(6) \quad \frac{1}{1-b} e^{-bx} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha^n$$

függvényt. A  $\beta_n$  együtthatók meghatározhatók a Bürmann—Lagrange-formula segítségével, azonban ismét közvetlenül határozzuk meg őket a Cauchy-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} 2\pi i \beta_n &= \oint_{(I)} \frac{1}{1-b} e^{-bx} \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}} = \oint_{(I')} \frac{1}{1-b} e^{-bx} \frac{d(be^{-b})}{(be^{-b})^{n+1}} = \\ &= \oint_{(I')} \frac{e^{b(n-x)}}{b^{n+1}} db = 2\pi i \frac{(n-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ezzel a (3) összefüggést igazoltuk. Megjegyezzük, hogy a (2) sor konvergens, ha  $|\alpha| < 1/e$ , és  $|\alpha| > 1/e$  esetén divergens.

Az említett könyvben tárgyalt  $U(x, \alpha)$  függvény a (2) összefüggés segítségével

$$(7) \quad U(x, \alpha) = F(x+1) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$

explicit alakba írható. Ha ezt az explicit formulát a szerző ismerte volna, a könyvében közölt tárgyalást lényegesen egyszerűsíthette volna.

Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy az  $U(x, \alpha)$  függvény illetve (komplex  $b$  esetében) annak valós része is kielégíti az

$$(8) \quad y'(x) = -\alpha y(x-1)$$

retardált differenciálegyenletet.

Az  $\alpha = 1/e$  és  $\alpha = \pi/2$  értékek ALTENKIRCH könyvében tárgyalt „szinguláris” volta a következőképpen magyarázható: az (1) egyenletnek

a)  $0 < \alpha < 1/e$  esetén van pozitív valós gyöke. Ebben az esetben (3) exponenciális függvény;

b)  $1/e < \alpha < \pi/2$  esetén komplex gyöke van, melynek valós része pozitív, és így (3) egy csillapodó rezgést ír le;

c)  $\alpha = \pi/2$  esetén  $b = i\pi/2$ , és (3) egy állandó amplitudójú hullámvonal;

d)  $\alpha > \pi/2$  esetén a komplex gyök valós része negatív, és (3) egy növekvő amplitudójú hullámvonal.

Megemlítjük a könyv függelékében szereplő lényegesebb matematikai tévedéseket is, anélkül, hogy a hibák felsorolásában teljességre törekednénk. A könyv 51. oldalán a

$$b = \frac{A_1}{A_0} = \frac{1 + \alpha + \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \frac{(3\alpha)^3}{3!} + \dots}{1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots}$$

kifejezés számlálójáról és nevezőjéről azt állítja a szerző,

hogy valószínűleg konvergálnak minden negatív  $\alpha$ -ra. Könnyen belátható, hogy mindkét összeg  $\alpha < -1/e$  esetén divergens, mivel a sor tagjai nem tartanak zérushoz. Ugyanez áll az 53. oldalon szereplő

$$A_v = 1 + v\alpha + \frac{[(v+1)\alpha]^2}{2!} + \dots$$

kifejezésre is. A 44. oldalon a szerző nem tudja eldönteni, hogy  $U(x, \alpha)$  sorfejtése  $\alpha < -1/e$  esetén divergens-e, ami az eddigiek alapján nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy a könyv részletes táblázatot közöl az  $f(x, \alpha)$  késésfüggvényre az  $\alpha = k \cdot 0,1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) és  $x = l \cdot 0,1$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) értékekre.

Tekintettel arra, hogy az  $U(x, \alpha)$  függvényre a fentiekben explicit kifejezést adtunk, azért az említett táblázatok jórésze feleslegessé válik illetve azok kiterjeszthetők. Adott  $\alpha < 1/e$  mellett csak  $b$  értékét kell meghatározni (4) segítségével, és akkor  $U(x, \alpha)$  és ezzel együtt  $f(x, \alpha)$  értékét az exponenciális függvények táblázatai segítségével megkaphatjuk.

A (2) sor maradéktagjára és ezzel  $f(x, \alpha)$ -nak  $U(x, \alpha)$ -tól való eltérésére a következő becslést nyerjük az

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{-\frac{\delta n}{12n}} \quad (\text{ahol } 0 < \delta < 1)$$

Stirling-formula felhasználásával :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{n!} \alpha^n \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\delta n}{12n}}} \alpha^n \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\alpha e)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{(\alpha e)^N}{1 - \alpha e} e^{-x}, \end{aligned}$$

ha  $x < N$ . Tehát

$$(9) \quad |1 - f(x, \alpha) - U(x, \alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \alpha e)}} \frac{\alpha^x}{\sqrt{x}},$$

$$\text{ha } N - 2 \leq x \leq N - 1 \text{ és } 0 < \alpha < \frac{1}{e}.$$

Közben felhasználtuk, hogy  $(1 - x/n)^n < e^{-x}$ , ha  $0 < x < n$ . Ez nyilvánvalóan következik az  $e^z < 1/(1 - z)$ , ha  $z < 0$  egyenlőtlenségből, amely az  $e^z$  és  $1/(1 - z)$  függvények hatványsorainak összehasonlításából leolvasható.

Az itt közölt megjegyzések lényegében ki is merítik a könyvben tárgyalt matematikai problémákat.

Ezúton mondok köszönetet RÉNYI ALFRÉDnek, aki felhívta a figyelmet erre a problémára és értékes tanácsaival is segítségemre volt.

## IRODALOM

- [1] E. ALTENKIRCH : *Verzögerungsfunktion*. Taschenausgabe Verlag Technik, Berlin, 1952.
- [2] O. PERRON : „Über Bruwiersche Reihen.” *Mathematische Zeitschrift* 45 (1939) 127—141.
- [3] PÓLYA Gy.—SZEGŐ G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, Berlin, 1954. (I., pp. 125—126).
- [4] L. EULER : „De serie Lambertiane.” *Opera Omnia* (Seria I. Vol. 6. p. 354). Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.
- [5] RÉNYI A. : „Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 1 (1952) 105—138.

(Beérkezett : 1956. II. 11).

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О „ФУНКЦИИ ОПОЗДАНИЯ”

М. АРАТО

## Резюме

Автор дает некоторые замечания о математической трактовке книги Е. АЛТЕНКИРХА : *Verzögerungsfunktion* [1]. Он показывает на то, что явная форма суммы (3) ряда (2) хорошо известна в литературе. С помощью (3) функция  $U(x, \alpha)$  играющая важную роль в упомянутой книге может быть представлена в явной форме ; употребляя этим фактом мы можем приближенно определять „функцию опоздания”  $f(x, \alpha)$ . Дается тоже оценка для отклонения функций  $U(x, \alpha)$  и  $1 - f(x, \alpha)$  (см. (9)).

## A NOTE ON THE „RETARDATION FUNCTION”

M. ARATÓ

## Summary

The author's note refers to the mathematical discussion in E. ALTENKIRCH's book : *Verzögerungsfunktion* [1]. It is pointed out that the explicit form (3) for the sum of the series (2) is well-known in the literature. By means of (3) the function  $U(x, \alpha)$  occurring in the book mentioned above may be expressed explicitly ; using this we may determine the „retardation function”  $f(x, \alpha)$  approximatively. For the deviation of the functions  $1 - f(x, \alpha)$  and  $U(x, \alpha)$  the estimation (9) is given.