GRAFIKUS-NUMERIKUS MÓDSZER PONTSOROS ÉS PONTMEZŐS NOMOGRAMOK TERVEZÉSÉRE

PÁL SÁNDOR

Bevezetés

A termelés fejlesztésénél és ellenőrzésénél felhasználható matematikai módszerek közül talán a legnagyobb előszeretettel és a legkiterjedtebben alkalmazzák a nomográfiát. A nomogramok nehezen kezelhető, bonyolult képletek használatát egyszerűvé és mindenki számára hozzáférhetővé teszik. Így a tudományos eredményeknek szélesebbkörű gyakorlati felhasználását lehetővé téve elősegítik a termelés mennyiségének és minőségének emelését. Tekintettel a nagy szükségletre és arra, hogy viszonylag kevés gyakorlati szakember foglalkozik nomogramok tervezésével, igen fontos, hogy a nomogramtervezés munkáját rutinmunkává redukáljuk, hogy ezáltal lehetővé váljék a nomogramoknak mintegy „futószalagon" való előállítása. Jelen cikkben pontsoros és pontmezős, nomogramkapcsolást nem tartalmazó nomogramokra vonatkozó olyan tervezési módszert javasolunk, mely ezt a célt tűzi maga elé. A javasolt módszert a Matematikai Kutató Intézethez érkezett külső nomogramtervezési megbízások teljesítésénél kipróbáltuk és jelenleg is alkalmazzuk.

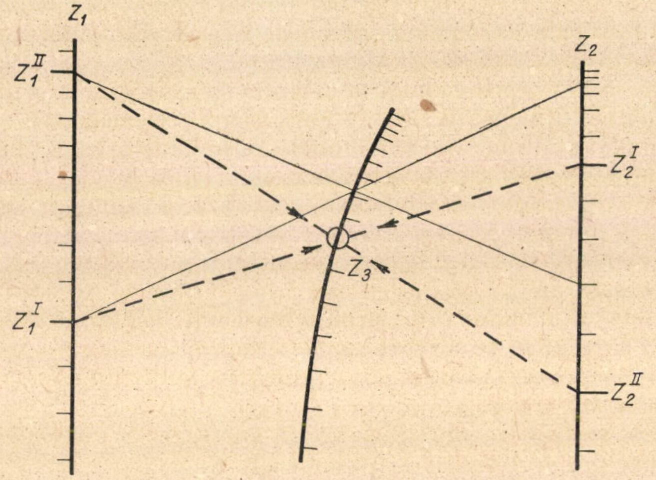
A pontsoros és pontmezős nomogramok tervezésénél általában alkalmazott módszerek két csoportba sorolhatók:

1) Egyszerűbb pontsoros nomogramoknál, így pl. párhuzamos egyenes skálatartójú Cauchy-féle nomogramoknál alkalmazható a nomogramtervezéshez a „bekalibrálás" módszere. Akkor alkalmazható, ha a nomogramok két skálája teljesen ismert. (Pl. Cauchy-féle nomogramoknál a párhuzamos egyenes tartókon elhelyezett skálák léptéke szabadon választható, és így ezek előzetesen megszerkeszthetők.)

A módszer azon alapszik, hogy a nomogram két skálájának (pl. a z_1 és z_2 skálájának) és az ábrázoló függvénykapcsolatnak ismerete meghatározza a harmadik (z_3) skálát. Ennek alapján a harmadik skála valamely z_3^0 értékhez tartozó pontja olyan, egyébként tetszésszerinti (z_1^{I}, z_2^{I}), (z_1^{II}, z_2^{II}) értékpár által meghatározott egyenesek metszéspontjában adódik, melyek mindegyike z_3^0-al kielégíti a függvénykapcsolatot. (Vesd össze: 1. ábra.)

Szokásos két párhuzamos egyenes tartóval rendelkező pontsoros nomogramoknál a harmadik skála egyenletének számítással való meghatározása is. Ha az 1. ábra jelöléseivel a $z_1^{II} z_2^{II}$ egyenes a koordinátarendszer x-tengelyével, a parallel skálák az y-tengellyel párhuzamosak, akkor a z_3 értékhez tartozó skálapont koordinátái a $z_1^I\, z_1^{II}\, z_3$ és $z_2^I\, z_2^{II}\, z_3$ háromszögek hasonlóságának felhasználásával könnyen kiszámíthatók.

Az ilyen fajta módszerek nem használják ki teljesen egészében azokat a transzformációs lehetőségeket, amelyeket a nomogramoknak projektív leképezéssel szembeni érzéketlensége biztosít, hanem speciális alakú nomogramok létrehozására törekszenek. Előnyük a szerkesztés egyszerűsége, és az, hogy a hasonló háromszögek tulajdonságainak ismerete elég előismeret a tervezés módszerének elsajátításához. Hátrányuk, hogy elsősorban harmadrendű kapcsolatok, de legfeljebb negyedrendű függvénykapcsolatok ábrázolásánál célszerűek, és hogy *nem mindig szolgáltatják a nomogramnak a gyakorlati követelményeket legjobban kielégítő alakját.* Bonyolultabb, pl. pontmezős nomogramok tervezéséhez nem szokták ezeket a módszereket használni.



1. ábra

2) A másik csoportba tartozó módszerek a nomogram projektív transzformációjával igyekeznek az ábrázolandó kapcsolat nomogramjának legcélszerűbb változatát elérni. Különösen általánosabb pontsoros nomogramok esetén a nomogramskálák egyenleteit számítással szokás meghatározni. Ismeretes, hogy a nomogramskálák az ábrázolandó kapcsolattal nincsenek egyértelműen meghatározva. Ha a számítást a benne fellépő határozatlan paraméterek értékeinek valamilyen megválasztásával egyértelművé tesszük, a nomogramnak így kapott első változata a gyakorlatban a legtöbbször nem használható (a végtelen távoli egyenesen fekvő, vagy túlságosan elnyúló részei vannak, az eredményskála sűrűsödése nem megfelelő, stb.). Ilyenkor a nomogramot tartó sík pontjait projektív transzformációnak vetjük alá. A projektív transzformációt meghatározó 8 állandót[1] úgy igyekszünk meghatározni, hogy a nomogram projektív képe a legpraktikusabb alakú legyen. Ennek a feladatnak tisztán számítással való elvégzése legtöbbnyire túlságo-

[1] Ha az egymástól csak egybevágósági transzformációban különböző projektív transzformációkat azonosnak tekintjük, akkor a projektív transzformáció 5 egymástól független állandóval jellemezhető egyértelműen.

san bonyolult, ezért próbálgatással szokás megoldani. A próbálgatáshoz kiindulásul természetesen olyan nomogramváltozatot igyekszünk alkalmazni, melynek skáláit meghatározó egyenletek a függvénykapcsolattal lehetőség szerint egyszerű, áttekinthető összefüggésben vannak. A gyakorlatban legtöbbnyire előforduló kapcsolatoknál azonban az ebből a szempontból optimális változatnak végtelen távoli elemei vannak. Ezért általában nem ezt a változatot szokták kiindulásul választani.

Ennek a módszernek hátránya, hogy a próbálgatások hosszadalmassá teszik. Ez a nehézség bizonyos mértékig kiküszöbölhető, ha a projektív transzformációt szerkesztéssel végezzük. SOREAU nomográfiai kézikönyvében [1], közöl ilyen grafikus-numerikus eljárást, amely azonban bizonyos értelemben feledésbe merült, tekintve, hogy — tudomásom szerint — módszere a modern nomográfiai tankönyvekben nem szerepel. Erre való tekintettel is részletesen foglalkozunk alább ezzel a módszerrel.

SOREAU csak speciális alakú nomogram tervezésére szorítkozik és nem él azzal az előnnyel, melyet a sík végtelen távoli elemeinek a szerkesztésbe való bekapcsolása jelent, holott ennek — néhány elemi, projektív geometriai szerkesztési módszer ismeretében — semmi akadálya nincs.

SOREAU eljárásához csatlakozva, igyekszünk mindkét csoportba tartozó módszerek előnyeit megtartani és a hátrányokat kiküszöbölni. A nomogramnak a gyakorlatban lehetőség szerint jól használható alakját megadó projektív transzformáció kikisérletezését szerkesztéssel végezzük. A kiindulásul választott nomogramváltozatnak lehetnek végtelen távoli részei is. A szerkesztés alapján — az idézett módszerhez hasonlóan — meghatározzuk a nomogram „optimális” alakját adó projektív transzformációt analitikusan meghatározó egyenleteket.

Így ez a projektív transzformáció a szerkesztés pontosságától függetlenül számológép-pontossággal végezhető el.

A továbbiakban csak olyan függvénykapcsolatokkal foglalkozunk, melyeknek mindig ugyanaz a változója a keresett ismeretlen, tehát amelyek nomogramjában van egy kitüntetett „eredményskála”. A nomogram három pontsorból vagy pontmezőből áll, ezeket skálatartományoknak fogjuk nejuk nevezni. Csak összefüggő skálatartományokkal kivánunk foglalkozni. A $\mathscr{Z}_1$ skálatartomány tartalmazza a z_1 és esetleg egy z_4, a $\mathscr{Z}_2$ skálatartomány a z_2 és esetleg egy z_5, a $\mathscr{Z}_3$ skálatartomány a z_3 és esetleg egy z_6 változó skáláit. z_3 jellel mindig az eredményskálát fogjuk jelölni.

1. §. Soreau grafikus-numerikus módszere

Ebben a paragrafusban részletesen foglalkozunk SOREAU eljárásával, melyre a bevezetésben már hivatkoztunk.

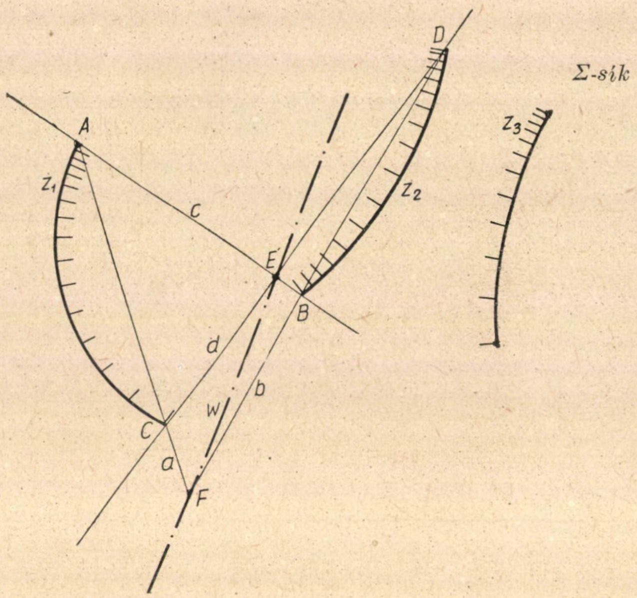
Tegyük fel, hogy egy háromváltozós kapcsolat pontsoros nomogramjának valamilyen alakja már rendelkezésre áll, és hogy ennek z_1 és z_2 skálája közel egyenes.

Legyen A és C a z_1 skála két végpontja vagy ezekhez közeli pontok. Ugyanígy B és D legyen a z_2 skála két végpontja vagy ezekhez közeli pontok. E pontokat úgy vesszük fel, hogy az A, B, C, D pontok között ne legyen kollineáris ponthármas.

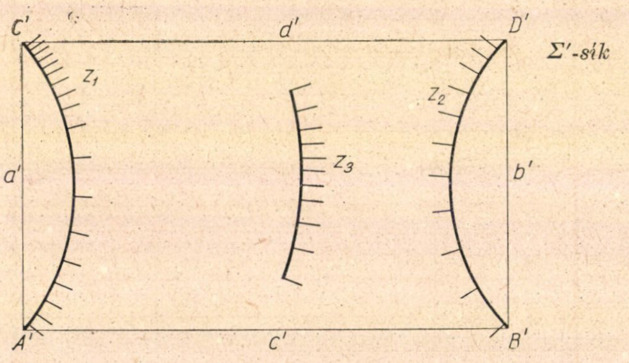
Az $ABCD$ négyszög projektív transzformációval leképezhető egy $A'B'C'D'$ téglalapra. Válasszuk a csúcspontok sorrendjét oly módon, hogy a z_3 skála egy kiválasztott pontjának képe a téglalap belsejébe essék.

Mint ismeretes, ez a projektív transzformáció végrehajtható szerkesztéssel az alábbi módon.

Legyen a kiindulásul szolgáló nomogram síkja Σ, a leképezés utáni nomogram síkja Σ' (általában projektív képet vesszővel fogunk jelölni). Legyen továbbá az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalpárok metszéspontja E, az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ oldalpárok metszéspontja F. (*2.a* és *2.b* ábra.)



2.a ábra

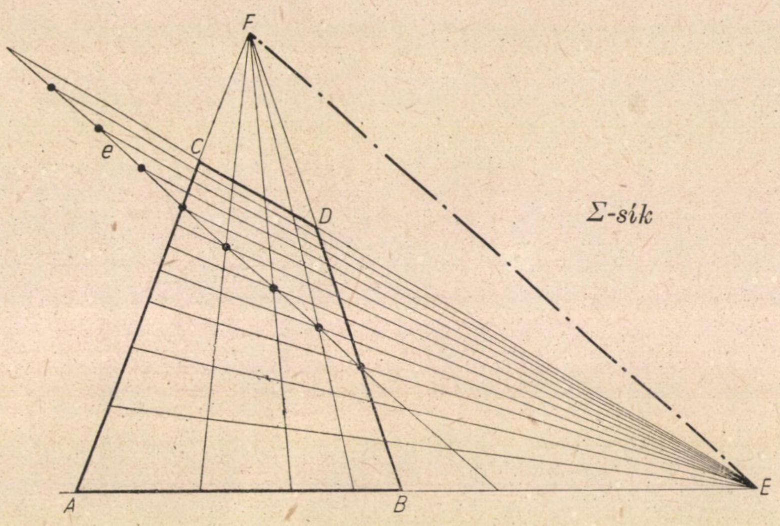


2.b ábra

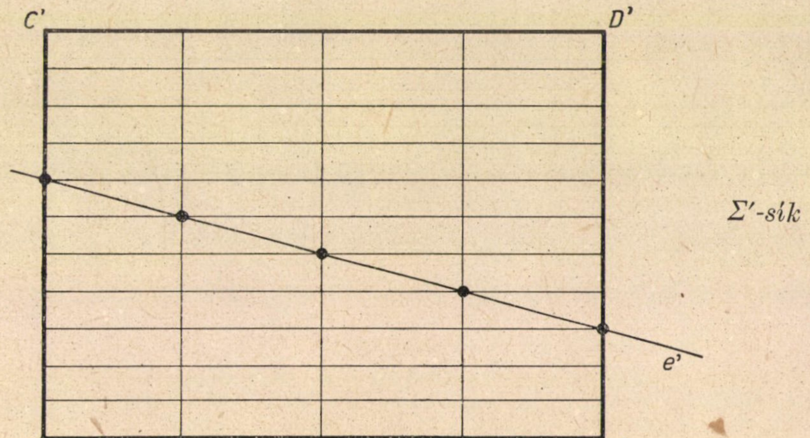
$\overline{EF}$ projektív képe a Σ sík végtelen távoli egyenese. Bármely $\overline{EF}$-el párhuzamos e egyenesnek az e' egyenesre való leképezésénél az egyenes pontjai csupán egyszerű nyújtást vagy zsugorítást szenvednek. Ezt a tényt a szerkesztésnél felhasználjuk.

A transzformáció a Σ' sík derékszögű hálózatának (amely az $A'B'C'D'$ téglalapot tartalmazza) Möbius-rácsot feleltet meg. A Möbius-rács a *3.a* és

3.b ábrák szerint szerkeszthető meg. Az $\overline{A'C'}$-vel párhuzamos ekvidisztáns koordinátavonalaknak az E tartójú sugársor olyan elemei felelnek meg, amelyek minden $\overline{EF}$ egyenessel párhuzamos e egyenesen ekvidisztans pontokat metszenek ki. Miután a sugársorok két-két elemének képét ismerjük, a Σ sík tetszésszerinti P pontjának képe (interpolációval) kikereshető Σ'-ben és viszont. SOREAU ennek az eljárásnak megfelelő pontos szerkesztést ismertet könyvében.



3.a ábra



3.b ábra

A szerkesztéssel végrehajtott projektív transzformáció analitikus meghatározására a következőképpen járunk el:

Felveszünk a Σ-síkban egy tetszésszerinti (x, y) derékszögű vagy ferdeszögű koordinátarendszert, a Σ'-síkban pedig egy (x', y') derékszögű vagy ferdeszögű koordinátarendszert. A projektív leképezés transzformációs képletei ekkor

$$x' = \alpha \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}; \quad y' = \beta \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}. \tag{1}$$

Az α, β mennyiségek megváltoztatása az (x', y') rendszer egységeinek megváltoztatását jelenti. Ugyanilyen hatása van annak is, ha a szereplő három lineáris kifejezést többszörösükkel pótoljuk. Jelöljük a Σ' síkbeli koordinátarendszernek x' tengelyét u'-vel, y' tengelyét v'-vel, végtelen távoli egyenesét w'-vel, ezek projektív megfelelője a Σ síkban rendre u, v, w. Az u, v, w egyenesek egyenletei az (x, y) koordinátarendszerben (1) figyelembevételével rendre

$$U(x, y) \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

$$V(x, y) \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$W(x, y) \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Az u, v, w egyenesek szerkesztéssel meghatározhatók. (x, y) koordinátarendszerbeli egyenleteinket leolvasva transzformációs formuláink jobboldalait az α és β arányossági tényezőktől eltekintve meghatároztuk:

$$x' = \alpha \frac{V(x, y)}{W(x, y)}; \quad y' = \beta \frac{U(x, y)}{W(x, y)}. \tag{2}$$

Az A, B, C, D pontok és projektív képeik koordinátái ki kell, hogy elégítsék a (2) egyenleteket. Ezzel a követelménnyel α és β értéke egyértelműen meghatározható.

2. §. A nomogram „triviális" változata

A nomogramtervezésnél a nomogram projektív transzformációval elérhető legjobb változatának megkeresése két műveletet igényel.

1. Tájékozódás céljából felvázoljuk a nomogram egy tetszésszerinti változatát, és

2. ezt alapul véve kísérletezéssel meghatározzuk azt a projektív transzformációt, amely már használható nomogramváltozatot eredményez.

Ritkán szokott már az első műveletnél a nomogramnak akár csak megközelítően is használható alakja kiadódni. Ezért célszerű a két műveletet egymástól élesen elkülöníteni. Ebből a célból a leggyakrabban előforduló kapcsolatokra lerögzítünk egy, a nomogram változatai közül kiválasztott alakot, és minden esetben ezt szerkesztjük meg tájékozódás céljára. A nomogram kiindulásul választott változatának ilyen tipizálása a tervezés első lépését mechanizálja, és nagymértékben megkönnyíti a tájékozódást. Kiindulás céljára kiválasztható a legegyszerűbben megszerkeszthető változat, melynél a nomogram használhatóságára (így pl. a nomogram részeinek korlátosságára) egyáltalában nem vagyunk tekintettel. A nomogram használhatóságára vonatkozó követelmények kielégítése teljes egészében a második tervezési műveletre hagyható.

Az

$$f_3 = \frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} \tag{3}$$

alakú ötödrendű kapcsolatok esetén szerkesszük meg valamely derékszögű koordinátarendszerben az

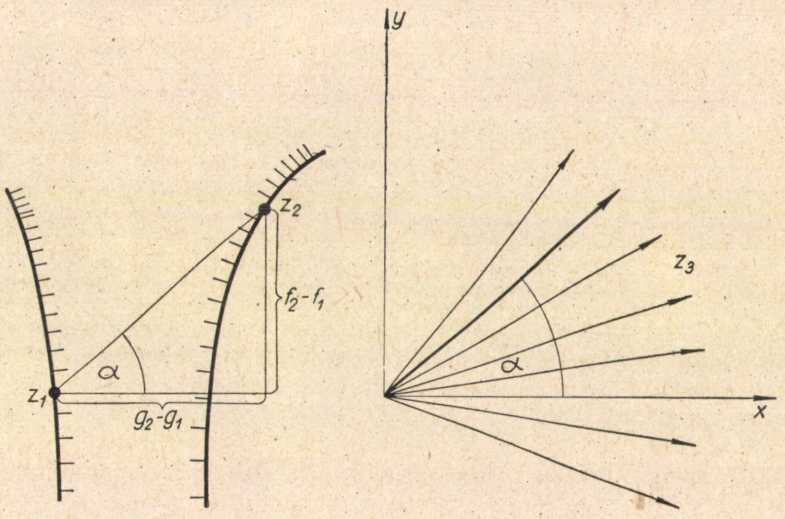
$$x = g_1, \quad y = f_1 \tag{4.a}$$

$$x = g_2, \quad y = f_2 \tag{4.b}$$

egyenletekkel jellemzett z_1 és z_2 skálát. Nyilvánvaló, hogy így f_3 értékét a z_1-hez és z_2-höz tartozó skálapontokat összekötő egyenes iránytangense adja (4. ábra), tehát a z_3 skála a végtelen távoli egyenesen

$$\frac{y}{x} = f_3 \tag{4.c}$$

egyenlettel van megadva. (Homogén koordinátákban $x_1 = 1$, $x_2 = f_3$, $x_3 = 0$.)



4. ábra

Ezek a skálák az f_1, g_1, f_2, g_2 függvények értékpártáblázatának birtokában minden további átszámítás nélkül közvetlenül megrajzolhatók. Pl. az

$$f_1 g_3 + f_2 + f_3 = 0 \tag{5}$$

negyedrendű kapcsolat átírható

$$f_1 = \frac{-f_3 - f_2}{g_3}, \tag{5'}$$

alakba, és így a nomogram egy változata

(6.a) z_1 skála : a végtelen távoli egyenesen, $\frac{y}{x} = f_1$,

(6.b) z_2 skála : $y = f_2$, $x = 0$,

(6.c) z_3 skála : $y = -f_3$, $x = g_3$

egyenletekkel van meghatározva.

Az

(7) $$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$$

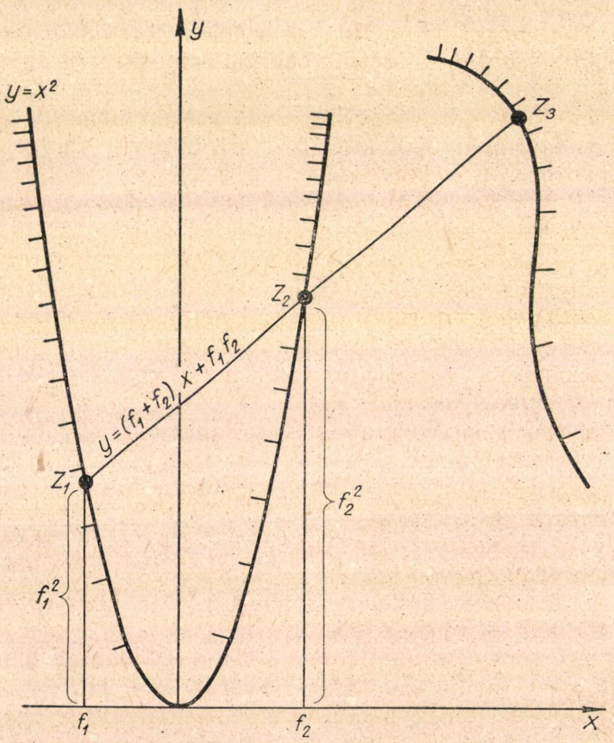
alakú negyedrendű kapcsolatok, mint ismeretes, olyan (CLARK-féle) nomogrammal ábrázolhatók, amelyben z_1 és z_2 skálájának egy közös kúpszelet-tartója van. A nomogram egy változatának skálaegyenletei

(8.a) z_1 skála : $x = f_1$, $y = f_1^2$;

(8.b) z_2 skála : $x = f_2$, $y = f_2^2$;

(8.c) z_3 skála : $x = f_3$, $y = g_3$.

A z_1 és z_2 skálák közös tartója az $y = x^2$ parabola (5. ábra) :



5. ábra

A gyakorlatban előforduló, háromnál magasabb nomográfiai rendszámú pontsoros nomogrammal ábrázolható kapcsolatok legnagyobb része vagy már közvetlenül a (3), (5), (7) alakok egyikében van megadva, vagy speciális ismereteket nem igénylő, egyszerű algebrai átalakítással ezekre redukálható. A (3), (5), (7) alakú kapcsolatokhoz tartozó (4), (6), (8) egyenletekkel meghatározott nomogramváltozatokat a nomogram *triviális változatának* fogjuk nevezni.

Pontmezős nomogramok triviális változata fentiekhez hasonlóan értelmezhető.

Nyilvánvaló, hogy *az 1. §-ban ismertetett szerkesztés a pont és egyenes projektív értelmezése mellett akkor is elvégezhető, ha a nomogram kiindulásul vett változata a triviális változat.*

3. §. A konvex burok fogalmának projektív általánosítása és alkalmazása nomogramok transzformálásánál

A továbbiakban szükségünk lesz arra, hogy a nomogramok pontjaiból álló ponthalmaz konvex burkával foglalkozzunk. Minthogy a nomogramokat projektív transzformációknak vetjük alá, célszerű lesz a konvex tartomány és a konvex burok fogalmát a projektív síkon értelmezni.

Konvex tartománynak az olyan $\mathcal{K}$ ponthalmazt nevezzük, amelyik projektív transzformációval korlátos és (közönséges értelemben) konvex tartománnyá alakítható. (Ennélfogva konvex tartományok az euklideszi síkon nem szükségszerűen összefüggőek, a projektív síkon azonban összefüggőek. (Vesd össze: 6. ábra.)

Ez a definíció korlátos tartományok esetén nem ad újat, minthogy korlátos konvex tartománynak korlátos tartományra való projektív leképezésénél a képtartomány is konvex.

Ha A és B egy konvex tartomány különböző pontjai, akkor az egyik AB szakasz $\mathcal{K}$-ban fekszik.

Minthogy állításunk korlátos konvex tartományokra igaz, ebből a konvex tartomány definíciója alapján következik bármely ilyen tartományra.

Megjegyzendő, hogy e tulajdonsággal nemcsak a konvex tartományok rendelkeznek, hanem a konvex tartományok komplementerjei is.

Az e egyenest a $\mathcal{K}$ közönséges értelemben vett konvex tartomány támaszegyenesének szokás nevezni, ha

1) a $\mathcal{K}$ közönséges értelemben vett konvex tartománynak legalább egy határpontját tartalmazza,

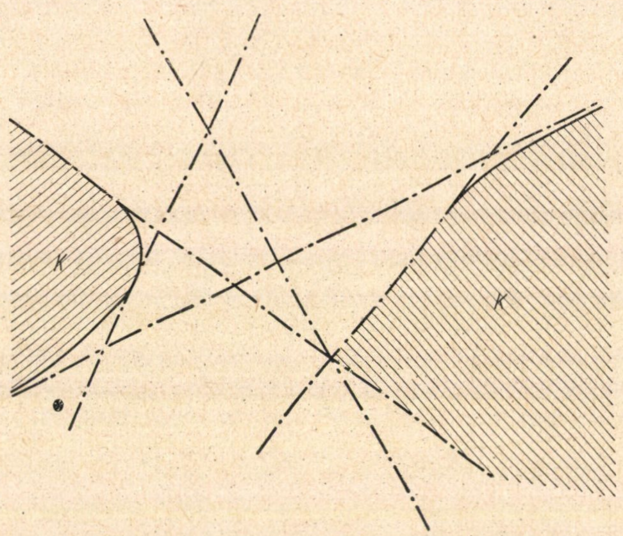
2) az e egyenes által az euklídeszi síkon meghatározott két félsík közül egyiken nincs $\mathcal{K}$-nak pontja.

A sík olyan projektív transzformációjánál, mely $\mathcal{K}$-t újra véges $\mathcal{K}'$ konvex tartományra képezi le, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ támaszegyenesei nyilván egymásnak felelnek meg. A támaszegyenes e definíciója a következőképp általánosítható a nem-véges konvex tartomány esetére:

Legyen f egy tetszésszerinti, teljesen $\mathcal{K}$ külsejében fekvő egyenes. Nevezzük e-t a $\mathcal{K}$ konvex tartomány támaszegyenesének, ha

1. e tartalmazza $\mathcal{K}$-nak legalább egy határpontját,

2. az e és f egyenesek által meghatározott egyik szögtér belsejében nincs $\mathcal{K}$-nak pontja (6. ábra).



6. ábra

Konvex tartomány és támaszegyenesei

Ha $\mathcal{K}$ síkját olyan projektív transzformációnak vetjük alá, mely f-et a végtelen távoli egyenesbe viszi át, e képe $\mathcal{K}$ véges képének közönséges értelemben vett támaszegyenesébe megy át. Ennélfogva könnyen belátható, hogy ez a definíció f speciális választásától független.

Ha $\mathcal{K}$-nak van belső pontja, akkor egy $\mathcal{K}$-n kívül felvett P ponton $\mathcal{K}$-nak pontosan két támaszegyenese halad át. Az állítás a szemlélet alapján belátható.

A $\mathcal{G}$ zárt halmazt a $\mathcal{H}$ halmaz konvex burkának nevezzük, ha

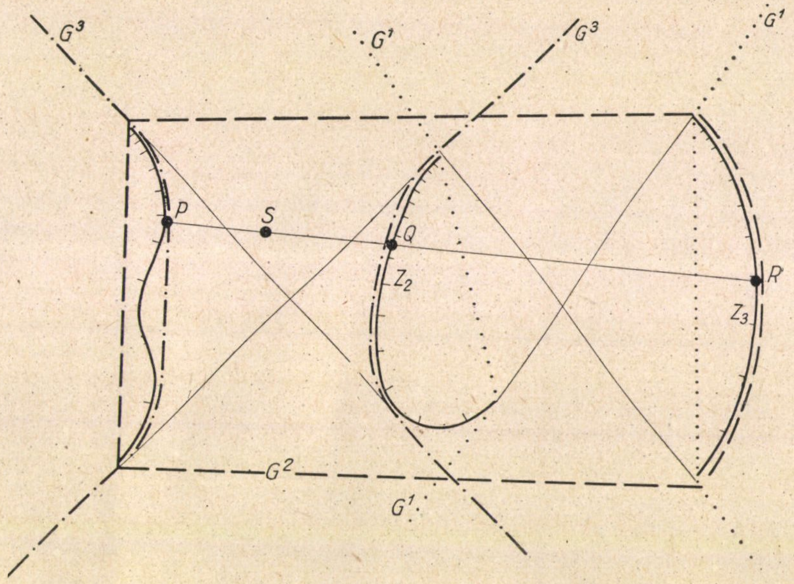
1. $\mathcal{G}$ tartalmazza $\mathcal{H}$-t,
2. $\mathcal{G}$ konvex tartomány,
3. $\mathcal{G}$-nek semmilyen valódi részhalmaza nem tesz eleget 1-nek és 2-nek.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a szóbanforgó $\mathcal{H}$ halmaz zárt. Nyilvánvaló, hogy konvex burok csak akkor lehetséges, ha van olyan egyenes, amelyik $\mathcal{H}$-t nem metszi. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ konvex burok az e egyeneshez tartozik, ha $\mathcal{G}$-nek nincs e-vel közös pontja.

A konvex tartomány, a tartományhoz tartozó támaszegyenesek, a konvex burok, az egyeneshez tartozó konvex burok mind projektív invariánsok. A végtelen távoli egyeneshez tartozó konvex burkot véges konvex buroknak fogjuk nevezni. Ez nyilván azonos az euklidesi síkon értelmezett konvex burokkal, melyről ismeretes, hogy egy és csak egy ilyen létezik, ha $\mathcal{H}$ korlátos. Ebből következik a $\mathcal{H}$ halmaznak tőle diszjunkt e egyeneshez tartozó konvex burkának létezése és unicitása, ha a végtelen távoli egyenest a sík projektív transzformációjával az e egyenesbe visszük át.

Miután különböző egyenesekhez nem feltétlenül tartozik $\mathcal{H}$-nak ugyanaz a konvex burka, a konvex buroknak az euklidesi síkon érvényes unicitási tétele nem marad a projektív síkon érvényben. (Így pl. ha $\mathcal{H}$ két pontból áll, pontosan két konvex burka van, tudniillik a két pont által a projektív síkon meghatározott két szakasz.)

Foglalkozzunk ezután olyan pontsoros, vagy pontmezős nomogramokkal, melyeknek skálatartományai a projektív síkon összefüggő tartományok. A gyakorlatban ez a feltétel legtöbbnyire teljesül. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ilyen nomogramnak, mint ponthalmaznak legfeljebb három konvex burka lehet. Legyen a három skálatartomány tetszőleges három, egy egyenesen fekvő pontja P, Q, R, melyek közül P a $\mathscr{Z}_1$, Q a $\mathscr{Z}_2$, R a $\mathscr{Z}_3$ skálatartományhoz tartozó. Legyen továbbá a PQR egyenesnek egy, a nomogram valamelyik $\mathscr{G}$ konvex burkán kívül fekvő pontja S. Nevezzük a $\mathscr{G}$ konvex burkot a nomogram skálatartományaira nézve *jó elrendezésűnek,* ha P, Q, R



7. *ábra*
Nomogram konvex burkai. ($\mathscr{G}^3$ *jó elrendezésű).*

tetszőleges megválasztása esetén P és Q elválasztja egymástól R-t és S-et. (7. ábra).

A nomogram konvex burka a nomogrammal szemben támasztott következő két gyakorlati irányelv szempontjából fontos.

A) Ne legyen a nomogramnak végtelenbe nyúló része. Ez mindenképpen kielégítendő követelmény.

B) A nomogram eredményskálája, vagy az ehhez tartozó pontmező lehetőleg essék a másik két skálatartomány „közé". Ennek az irányelvnek, — melynek kielégítése a gyakorlati esetek egy nagy részében célszerű — az indokolásával a következő §-ban foglalkozunk.

Ez a két feltétel a konvex burok fogalmának segítségével pontosabban fogalmazható: *a nomogramnak legyen véges konvex burka, és ez legyen a három skálatartományra nézve jó elrendezésű.* Az ilyen nomogrammot jó elrendezésű nomogrammnak fogjuk nevezni.

Előfordul, hogy a skálatartományokra vonatkozó jó elrendezés kikötése nem teljesíthető, mert két skálatartománynak közös részhalmaza van (pontsorok esetén a tartók átmetszik egymást). Viszont, ha a skálatartományokat képező ponthalmazok gyakorlati szempontból jelentős része kielégíti a jó elrendezés feltételét, érdemes lehet a fentemlített, jó elrendezésre vonatkozó követelményt értelemszerűen gyengíteni azáltal, hogy azt csak a skálatartományoknak előre lerögzített jelentősebb részhalmazára vonatkozóan követeljük meg. A gyengített feltételt kielégítő konvex burkot nevezzük gyakorlati értelemben *jó elrendezésűnek.*

Legyen a nomogramnak valamely kiindulásul választott alakja $\mathcal{N}$, és legyen T az a projektív transzformáció, mely $\mathcal{N}$-et a végleges $\mathcal{N}'$ nomogramváltozatba viszi át. Legyen továbbá w az $\mathcal{N}$ síkjának az az egyenese, amely a T projektív transzformációnál a képsík végtelen távoli egyenesébe megy át.

Az A) követelmény ekvivalens azzal, hogy az $\mathcal{N}'$ nomogramnak legyen $\mathcal{G}'$ véges konvex burka, azaz a kiindulásul választott nomogramot csak olyan T transzformációnak szabad alávetni, amelynél w nomogram valamely $\mathcal{G}$ konvex burkától diszjunkt.

Foglalkozzunk ezek után olyan nomogramokkal, melyeknek van legalább gyakorlati értelemben jó elrendezésű $\mathcal{G}^*$ konvex burka.

A nomogram transzformációjánál hasznos tájékoztatást ad a következő szabály :

Az $\mathcal{N}$ nomogram T *leképezésénél kapott $\mathcal{N}'$ nomogram akkor és csak akkor tesz eleget fenti A) és B) feltételeknek, ha w-nek $\mathcal{G}^*$-gal nincs közös pontja.*

Ugyanis mint mondottuk, $\mathcal{N}'$ korlátossága (A) feltétel) ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{N}$-nek van egy w-től diszjunkt konvex burka. Másrészt pedig a konvex burok jó elrendezése projektív invariáns tulajdonság, és igy a B) feltétel teljesülése ekvivalens azzal, hogy ez a konvex burok épp $\mathcal{G}^*$.

Ebből következik, hogy az első vázlatból jó elrendezésű, korlátos nomogramot kapunk, ha a $\mathcal{G}$ burkon kívüli w egyenest transzformálunk végtelen távolivá. Ez megkönnyíti számunkra a tájékozódást akkor is, ha az első vázlatnak végtelenben fekvő elemei (pontjai vagy egész skála) vannak és benne a skálák sorrendje nem megfelelő.

*

Sajnos, elég gyakoriak az olyan ábrázolható függvénykapcsolatok, melyek nomografikus ábrázolásánál a jó elrendezésre vonatkozólag még a gyengített feltételek sem teljesíthetők. A következőkben bemutatunk két gyakran előforduló nomogramtípust, melynek nincs jó elrendezésű konvex burka. Amennyiben a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ skálatartomány összefügg egymással, összeghalmazuknak a nomogram korlátossága miatt pontosan egy konvex burka van. Jelöljük ezt $\mathcal{G}_{12}$-vel. Könnyen belátható, hogy ekkor a jó elrendezésű konvex burok definíciója értelmében a nomogramnak nincs jó elrendezésű konvex burka, még gyakorlati értelemben sem, ha a $\mathcal{Z}_3$ tartomány minden pontja $\mathcal{G}_{12}$ külsejében vagy határán helyezkedik el.

Ez az eset áll fenn pl. az

$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\, g_3 + h_3 = 0 \tag{9}$$

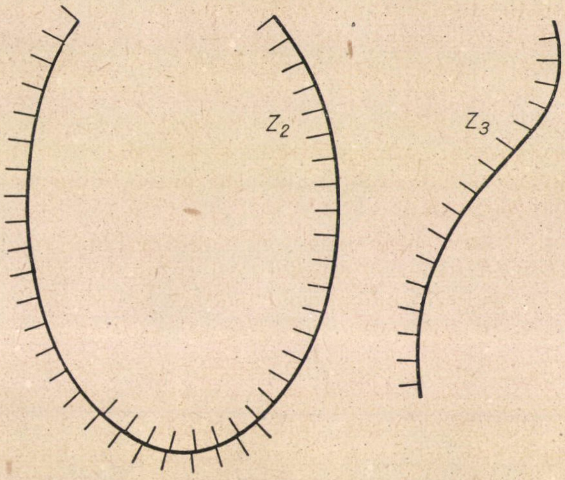
kapcsolatok CLARK-féle nomogramja esetén, amelynél z_3 a keresett változó és amely kielégíti a következő két feltételt :

1. Van olyan $z_1 = z_1^0$ és $z_2 = z_2^0$ értékpár, melyre $f_1 = f_2$ és

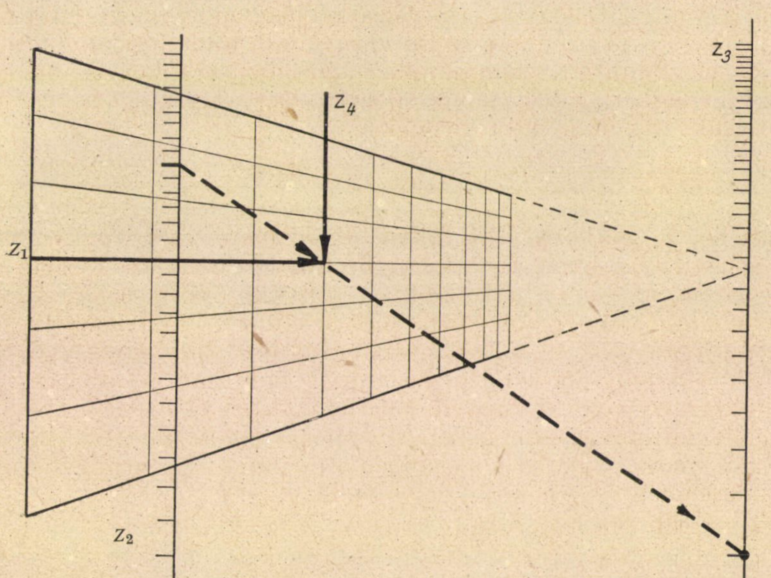
2. minden z_3 értékre fennáll az

$$f_3 h_3 < g_3^2$$

egyenlőtlenség. (Ez az egyenlőtlenség biztosítja, hogy a z_3 skála egésze a z_1, z_2 változók közös kúpszelet-tartójának külsejében legyen.) (Lásd. 8. ábra.)



8. ábra



9. ábra

Továbbá például nincsen gyakorlati értelemben sem jó elrendezésű konvex burka az

$$f_2 - f_1 + f_3 f_4 = 0 \tag{10}$$

kapcsolat Cauchy-típusú pontmezős nomogramjának, melynek egy-egy egyenes skálatartója van a z_2 és z_3 változók számára és egy pontmezője a z_1 és z_4 változók számára (z_3 értéke az eredmény), továbbá

1. van olyan nomogramban ábrázolandó $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ és $z_3 = z_3^0$ értékhármas, melyre

$$f_1 = f_2 \quad \text{és} \quad f_4 = 0$$

és

2. f_4 alulról vagy felülről korlátos.[2] (Lásd: 9. ábra az előző oldalon.)

Megjegyezzük, hogy mindkét példában $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ (és $z_4 = z_4^0$) értékekre e nomogram nem használható; ezen értékek környezetében a nomogram használata igen nagy leolvasási hibával jár. Ennek oka a második példában az ábrázolandó kapcsolat struktúrájában keresendő, mert a képletet

$$f_3 = \frac{f_1 - f_2}{f_4}$$

alakban írva, a jobboldal fenti értékekre értelmetlenné válik.

Az első példában ezzel szemben az a leolvasásnál fellépő zavar a nomografikus ábrázolásmódból adódik, amennyiben a (9) kapcsolat helyett — mint ismeretes — az

$$(f_1 - f_2)\,[f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\,g_3 + h_3] \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ 1 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

kapcsolatot ábrázoljuk. Így, bár az eredeti kapcsolat $f_1 = f_2$-re nem válik triviálissá, az $f_1 - f_2$-vel bővített kapcsolat már igen. Vagyis az ábrázoláshoz szükséges $f_1 - f_2$ tényezővel való bővítés csempészi be az említett leolvasási zavart.

4. §. A nomogram kivitelezésére vonatkozó gyakorlati követelményekről

A nomogram használata esetén az eredménynek csak megközelítő értékét kapjuk meg. Azonban minden nomogramtól megkívánjuk, hogy a leolvasással elérhető pontosság a gyakorlat szempontjából kielégítő legyen és hogy a nomogram méretei ne legyenek olyan nagyok, hogy annak használatát komolyan nehezítsék, vagyis, ha a nomogramot olyan nagyságban készítjük el, hogy adott alakú és méretű papírlapon elhelyezhető legyen, akkor a leolvasási hiba nagysága előírt korlát alatt maradjon.

[2] Enélkül a z_3 skála beleeshetne a (z_1, z_4) pontmezőbe és ekkor a nomogramnak esetleg lehetne *gyakorlati értelemben* jó elrendezésű konvex burka.

A *pontsoros nomogramok* használatánál a z_3 értékében mutatkozó hiba általában két komponensből adódik:

a) a nomogram pontatlan elkészítéséből, a papír utólagos deformációjából, a vonalzó nem egyenes voltából származó „objektív" hiba (ezzel itt nem foglalkozunk);

b) a leolvasás pontatlanságából származó „szubjektív" hiba. Ennek forrásai: a leolvasásnál használt vonalzó pontatlan beállítása, a z_3-skálán való leolvasásnál a vonalzó élének véges vastagsága miatt fellépő parallaxis, a z_3-skála tartójának véges vastagsága, továbbá a z_3-skála beosztásainak véges vastagsága, illetőleg az osztások közötti interpoláció hibája.

Pentkovszkij [2] és Hajós [3] foglalkozott nomogramok leolvasási hibáival. Az általuk megadott képleteket jelen cikk tartalmának megfelelően átfogalmazva és egyesítve a következőképpen fejezhető ki a nomogram leolvasásánál fellépő különböző hibaforrások által okozott hiba legnagyobb értéke:

$$\Delta z_3 = \frac{dz_3}{ds}\Delta s, \tag{11}$$

ahol

$$\Delta s = \frac{p+v}{\sin\alpha} + d\operatorname{cotg}\alpha + \delta \tag{12}$$

(10., 11. ábrák). Itt Δz_3 jelenti a leolvasásnál a z_3 változó értékében jelentkező hibát;

s a z_3 skálán a skála valamely rögzített pontjától mért ívhosszat;

$\frac{dz_3}{ds}$ a $z_3 = z_3(s)$ függvénynek az s ívhossz szerinti differenciálhányadosát, amely a skála sűrűségét méri.

Az alábbiakban olyan skálákkal vagy skálarészekkel foglalkozunk, amelyekre $\frac{dz_3}{ds}$ állandó előjelű. s pozitív irányának megfelelő választásával, tehát $\frac{dz_3}{ds} > 0$. Ez azonban a lényeget illetően nem jelent semminemű megszorítást.

Δs jelenti a pontos és a leolvasott z_3 értékhez tartozó skálapontok távolságát.

Jelölje R a leolvasásnál a z_1 és z_2 értékekhez tartozó skálapontokon átfektetett i egyenesnek és a z_3 skálának metszéspontját. (Az R-nél található z_3 érték adja meg a kiválasztott z_1-hez és z_2-höz tartozó eredményt.) Jelölje e a z_3 skála R-ben meghúzott érintőjét. Akkor a (12) képletben

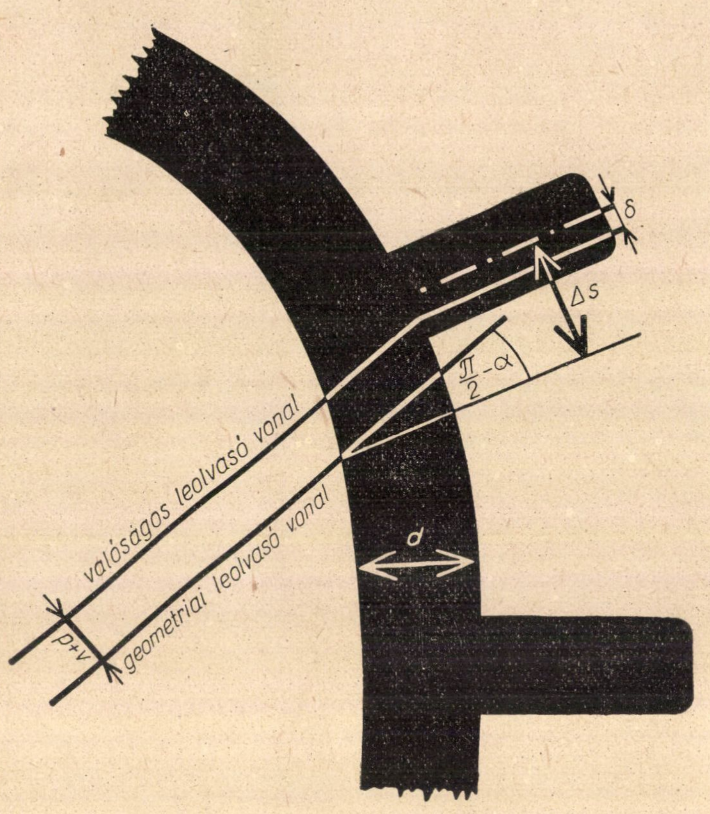
α az i és e egyenesek hajlásszöge;

p a vonalzó véges élvastagsága miatt fellépő parallaxis;

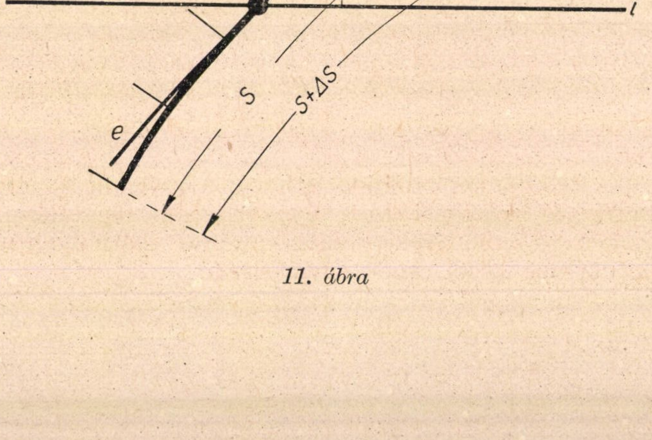
δ a z_3-skála osztásvonalának véges vastagsága miatt, vagy az interpolációs hiba miatt fellépő eltolódás;

d a z_3-skála vastagsága;

v a vonalzó pontatlan beállításának következtében R-nél i-re merőleges irányban fellépő eltolódás.



10. ábra

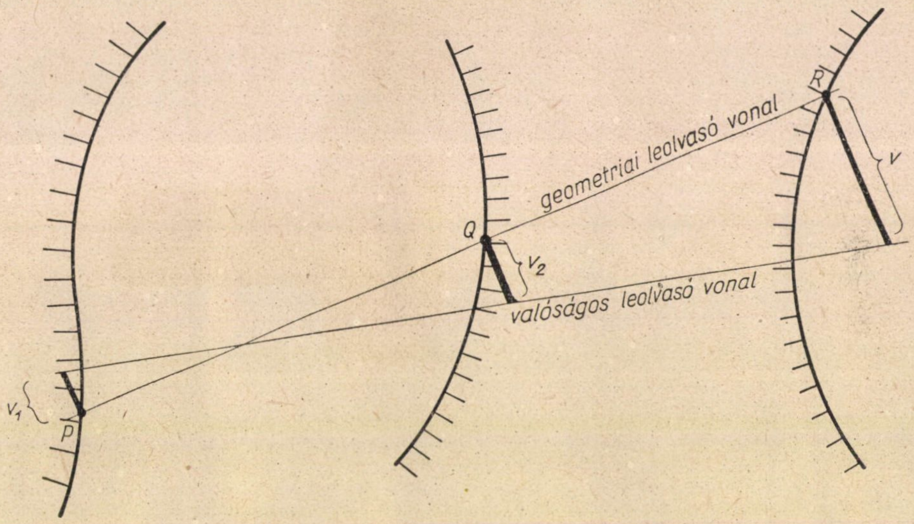


11. ábra

PENTKOVSZKIJ v értékét a vonalzónak a z_1 és z_2 skálákon mutatkozó beállítási hibájából számítja ki. Ha a leolvasásnál a z_1 skálán fekvő P, a z_2 skálán fekvő Q és a z_3 skálán fekvő R pontokat kötjük össze az i egyenessel, akkor kedvezőtlen esetben, azaz, ha a z_1 skálán jelentkező v_1 és a z_2 skálán jelentkező v_2 vonalzóbeállítási hiba összegeződik:

(13) $$v = \frac{v_1 \cdot \overline{QR} + v_2 \cdot \overline{PR}}{\overline{PQ}},$$

ahol v_1 és v_2 az i egyenesre (»geometriai leolvasó vonal«) merőleges eltolódásokat jelentenek (lásd 12. ábra). Itt $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{QR}$ távolságokat jelentenek. v_1 és v_2 kismértékben függ ugyan az i egyenesnek a z_1 illetőleg z_2 skálatartó



12. ábra

érintőjével bezárt szögétől az illető skálák véges vonalvastagsága miatt, mi azonban ezt a körülményt nem vesszük figyelembe. Fel fogjuk tenni, hogy $v_1 = v_2 =$ állandó. Ha az R pont P és Q között van, akkor (13)-ból

(13.a) $$v = v_1,$$

ha azonban a felvett pontok sorrendje pl. PQR, akkor

(13.b) $$v = \frac{\overline{PR} + \overline{QR}}{\overline{PR} - \overline{QR}} v_1 > v_1 .$$

A (13.a) és (13.b) képletekből látható, hogy míg jó elrendezésű nomogramok esetén a leolvasási hiba gyakorlatilag független a PQ távolságtól, addig nem jó elrendezésű nomogrammnál akármilyen nagy lehet, ha a P és Q pontok elég közel esnek egymáshoz.

Ezért, ha egyéb, nyomósabb szempontok nem szólnak ellene, mindig érdemes arra törekedni, hogy az eredményskála a többi között helyezkedjék el, azaz a nomogram jó elrendezésű legyen.

Δz_3-nak (11) és (12) által meghatározott értéke nemcsak a leolvasó gyakorlottságától, jó szemétől, diszpozíciójától, továbbá a nomogram rajztechnikai kivitelétől, stb. függ, hanem a nomogram geometriai konstrukciójától is. Ez utóbbitól függenek ugyanis $\frac{dz_3}{ds}$, α és részben v is.

A gyakorlat általában előír valamilyen H hibakorlátot, amely még z_3 függvénye lehet:

$$|\Delta z_3| \leq H(z_3).$$

Legtöbbnyire két előírás szokásos: 1. $H(z_3)$ állandó (a hiba abszolút értéke van korlátozva), vagy pedig 2. $H(z_3)$ arányos z_3-al (a relatív hiba abszolút értéke van korlátozva).

A nomogram szerkesztésénél szemünk előtt lebegő szempont, hogy

$$F(z_1, z_3) = \frac{\Delta z_3}{H(z_3)} = \frac{\frac{dz_3}{ds}}{H(z_3)} \Delta s \tag{14}$$

a lehető legkisebb legyen, azaz ha a különböző (z_1, z_3) számpárok egyenlő fontosságúak (pl. a nomogramot ábrázolandó értéktartományon belül bármely (z_1, z_3) értékpár egyenlő valószínűséggel fordulhat elő), akkor $\max\limits_{(z_1, z_3)} F(z_1, z_3)$ minimális legyen az előírt kapcsolat és nomogramterjedelem mellett.

Meg kell jegyeznünk, hogy vannak olyan ábrázolható kapcsolatok, ahol a leolvasási hiba nem korlátos és semilyen transzformációval sem tehető korlátossá. Így pl. a $z_3 = z_1/z_2$ kapcsolat egyenletes z_1 és z_2 skálájú, jól elrendezhető, úgynevezett Z nomogramján, vagy az

$$\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}.$$

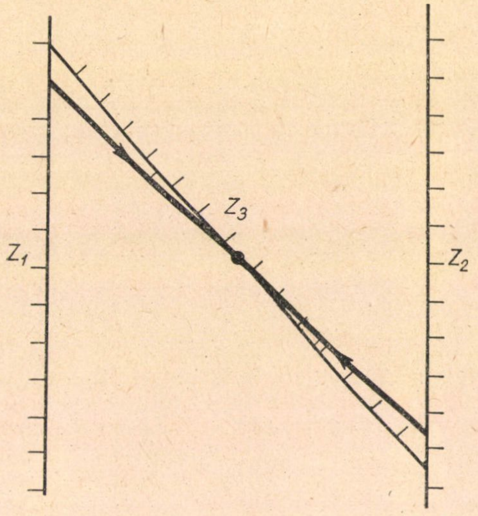
kapcsolat egyenletes z_1, z_2, z_3 skálájú, jól el nem rendezhető nomogramján, ha mindkét esetben $z_2 = 0$ és $z_1 = 0$ bennefoglaltatik a változók értéktartományában (13., 14. ábra). Ilyenkor csak olyan hibakorlátot írhatunk elő, amely z_1-től is függ, pl.

$$|\Delta z_3| < H^*(z_3, z_1) = H(z_3) K(z_1).$$

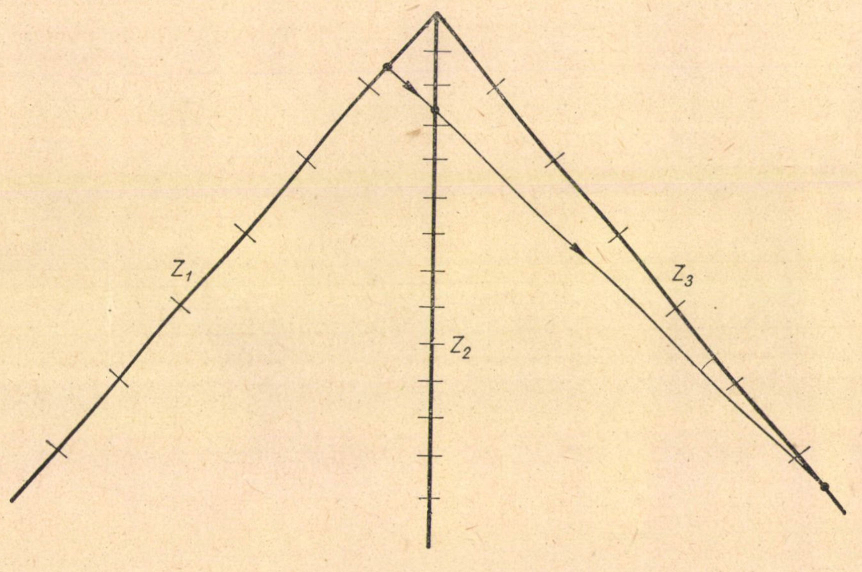
$K(z_1)$ olyan függvény, mely $z_1 \to 0$ esetén a szükséges rendben végtelenhez tart. Fenti példáinknál pl.

$$K(z_1) = \begin{cases} \dfrac{m}{z_1}, & \text{ha } |z_1| < m \\ m, & \text{ha } |z_1| \geq m, \end{cases}$$

választható, esetenként alkalmasan választott m értékkel.



13. ábra



14. ábra

Pontmezős nomogramok esetén a hibaforrások száma megnövekszik. v értékét növeli, ha a $\mathcal{Z}_1$ vagy $\mathcal{Z}_2$ skálatartományoknak legalább egyike pontmező. Ha ugyanis pl. a $\mathcal{Z}_1$ skálatartomány a z_1 és z_4 változók skáláját tartalmazza, akkor 1. a vonalzó beállításánál a z_1 és z_4 skálák vonalai között egyidejűleg kell interpolálni és 2. a z_1 és z_4 skálák vonalainak esetleges éles metszése is pontatlanná teszi a vonalzó beállítását.

Ugyanígy δ értékét növeli, ha a $\mathscr{Z}_3$ skálatartomány pontmező, különösen, ha a z_3 és z_6 skálák vonalai élesen metszik egymást.

Ezért pontmezős nomogramok tervezésénél arra is kell ügyelni, hogy *az egyes pontmezőkön belül a görbeseregek lehetőleg ne messék egymást élesen.*

5. §. Az eredményskála sűrűségének szabályozása egyenes tartó esetén

A (14) képletben szereplő $F(z_1,z_3)$ függvény $\frac{1}{H(z_3)}\frac{dz_3}{ds}$ tényezője lényegében a $z_3(s)$ skálafüggvénytől függ, a z_3 skála tartójának alakjától és a többi skálától azonban független. A Δs tényezőnek a nomogrammban előforduló legnagyobb értéke viszont a (12) képlet alapján a skálák sűrűségétől függetlennek tekinthető és csak a skálatartók geometriai viszonyaitól függ. Ha a nomogram eredményskálájának tartója egy r egyenes, a „jó" nomogramhoz vezető projektív transzformáció meghatározására szolgáló szerkesztés az $F(z_1,z_3)$ függvény két tényezőjének ezen sajátosságát felhasználva különösen jól hozzá idomítható az előző paragrafusban említett gyakorlati követelményekhez.

Célunk, hogy olyan projektív transzformációt szerkesszünk, mely a nomogram triviális változatát az $F(z_1,z_3)$ függvény minimumát megközelítő változatba viszi át. A nomogram gyakorlatilag legjobb változatának megközelítését egyenes z_3 tartó esetére kényelmi szempontból két szakaszban végezhetjük ; először a z_3 skála skálafüggvényét igyekszünk alkalmas transzformációs paraméterekkel — a nomogramm többi skálájával és a többi transzformációs paraméterrel mit sem törődve — kedvezően befolyásolni, majd az eredményskála sűrűségi viszonyait többé nem bolygatva a még szabadon hagyott transzformációs paraméterek megfelelő megválasztásával a nomogramskálák tartóinak geometriai viszonyaira gyakorolunk befolyást.

Eljárásunk első, a z_3 skála sűrűségét szabályozó szakaszában a z_3 skálán mérhető hosszak mérésére hosszegységet választunk, azaz őket egy rögzített hosszúsághoz viszonyítjuk. Ettől a hosszúságtól meg kell követelnünk, hogy lehetőség szerint független legyen a kiindulásul választott $\mathfrak{N}$ nomogramot a végleges $\mathfrak{N}'$ változatba átalakító $\top$ projektív transzformáció megválasztásától. Ilyen volna pl. az $\mathfrak{N}'$ számára megadott területrész D legnagyobb átmérője. A tervezés egyszerűsítése érdekében Pentkovszkij ehelyett a z_3 skálához rögzített hosszat választ : a z_3 skála g hosszát[4]. Ez azonban nem független a $\top$ transzformációtól. Ennélfogva módszerének alkalmazásánál előfordulhat, hogy a z_3 skála *viszonylagos* sűrűsége $\mathfrak{N}'$-ben kielégítő, a z_3 skála azonban oly rövidnek adódik D-vel összehasonlítva, hogy a leolvasási hiba mégis lényegesen nagyobb, mint egy olyan $\top^*$ alkalmazása mellett, amely a skála viszonylagos sűrűsége szempontjából nem olyan jó, de hosszabb z_3 skálát eredményez. Ezért célszerűbbnek látjuk, hogy a g hossz helyett

[4] Pentkovszkij [1] (48. §.) a skálák jellemzésére bevezeti a karakterisztika fogalmát. A mi jelöléseinkkel a z_3 skála karakterisztikája

$$K = \left[\frac{g}{H(z_3)}\frac{dz_3}{ds}\right]^{-1}.$$

Egyenes skálák esetén meglehetősen bonyolult képletet közöl a K minimumát adó projektív transzformáció bizonyos esetekben való meghatározására.

az r egyenesnek $\mathcal{N}'$ véges $\mathcal{G}'$ konvex burkával való $\overline{I'J'}$ közös szakaszának h hosszát vezessük be mértékegység gyanánt. A gyakorlatban megvalósított nomogrammoknál h meghaladja D felét-háromnegyedét. (Az esetek nagyrészében h hozzávetőlegesen megegyezik az $\mathcal{N}'$ számára rendelkezésre álló téglalap-alakú síkrész egyik oldalával.) T meghatározásának második szakaszában ezt könnyűszerrel biztosíthatjuk, tehát erre az első szakaszban nem kell ügyelnünk. Így h gyakorlatilag állandónak tekinthető, azaz független T-től, legalábbis az egyáltalában szóbajövő T transzformációk esetében. Másrészt h pusztán a skálák geometriai viszonyaitól függ, a z_3 skála sűrűségétől független, így h kellő nagyságának biztosítása valóban a második szakaszra hagyható. Ezek alapján a T megválasztására javasolt eljárásunk pontosabban a következő két szakaszból áll:

1. Az r egyenest egy t projektív transzformációval úgy képezzük le egy r' egyenesre, hogy ezáltal a dimenzió nélküli

$$\varphi(z_3) = \frac{h}{H(z_3)}\,\frac{dz_3}{ds} \tag{15}$$

mennyiség lehetőség szerint egyenletesen kicsiny legyen. Ez a követelmény a t transzformációt és az r' egyenesen fekvő skálát *hasonlósági transzformációtól eltekintve* határozza meg. Másszóval: *ebben a lépésben r' végtelen távoli pontjának az r egyenesen fekvő W megfelelőjét határozzuk meg.*

2. Ezután a t leképezést a triviális nomogrammváltozat Σ síkjának valamely Σ' síkra való olyan T projektív transzformációjába ágyazzuk, amellyel *a)* a Σ' síkban ábrázolt nomogramon a szintén dimenzió nélküli

$$\sigma = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{p+v}{\sin\alpha} + d\cot g\,\alpha + \delta\right] \tag{16}$$

mennyiség a lehetőséghez képest kicsiny, és *b)* a nomogram a sík előírt területrészen helyezhető el. Az esetek egy nagy részében eljárásunk e második szakaszában elegendő a nomogramskálák tartóinak geometriai viszonyait tekintetbe venni anélkül, hogy akár a z_3, akár a z_3 skála sűrűségi viszonyaira ügyelnénk. (Kivételes esetekben azonban ez is szükségessé válhat.) Az itt javasolt módszer lépéseinek illusztrálására először az r egyenes transzformációját diszkutáljuk, majd a következő paragrafusban a t transzformációnak a T transzformációba való beágyazását két egyszerű nomogramtípuson szemléltetjük.

Eljárás a t transzformáció meghatározására. Vegyünk fel az r egyenesen történő helymeghatározásra tetszés szerinti rögzített kezdőpontot és r-nek a $\mathcal{G}$ burokba eső részén tetszés szerinti $\overline{KL}$ szakaszt. A t leképezés által nyert pontokat és koordinátákat vesszővel jelöljük. r' végtelen távoli W' pontjának megfelelője az r egyenesen W. Az II', JJ', WW' pontpárok meghatározzák az egyenes projektív leképezését és koordinátáikkal meghatározható a $\overline{K'L'}$ szakasz előjelével együtt:

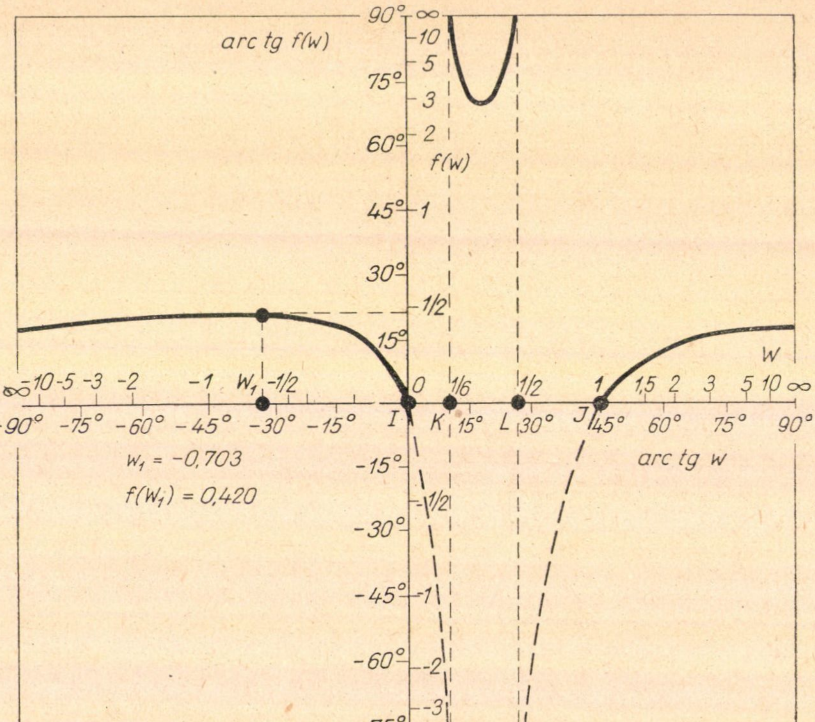
$$\frac{\overline{K'L'}}{\overline{I'J'}} = \frac{(l\,j\,i\,w)}{(i\,k\,l\,w)} = \frac{k-l}{i-j}\,\frac{(w-i)(w-j)}{(w-k)(w-l)} \equiv f(w;i,j,k,l)\,, \tag{17}$$

ahol a kis betűk a megfelelő nagy betűvel jelzett pontok koordinátáit jelentik. Az összefüggés közvetlenül igazolható a benne szereplő kettősviszonyok részletes kiírásával, ha tekintetbe vesszük, hogy W' az r' egyenes végtelen távoli pontja. Az $f\,(w\,;\ i,\, j,\, k,\, l)$ függvény — melyet, amennyiben ez félreértést nem okozhat, röviden $f(w)$-vel jelölünk — az r egyenes projektív transzformációjával szemben természetesen érzéketlen. Az $f(w)$ függvény menete a következő táblázattal adható meg, ha a megadott pontok ciklikus sorrendje $IKLJ$:

	w	i		k		l		j		i
$f(w)$	Előjele	0	—	$\mp\infty$	+	$\pm\infty$	—	0	+	0
	Növekedés-csökkenés	↘	↘		↘↗		↗	↗	↗↘	↘

Elemi következtetésekkel megmutatható, hogy az $f(w)$ függvénynek pontosan két szélső értéke van, amelyek w abszisszája az

$$(18)\quad [(i+j)-(k+l)]\,w^2 - 2\,(ij-kl)\,w + [ij\,(k+l) - kl\,(i+j)] = 0$$



15. ábra

egyenlet két megoldása, melyek közül az egyik a $\mathcal{G}$-be eső IJ szakaszra esik, a másik a $\mathcal{G}$-n kívüli szakaszra. Ez utóbbi mindig maximum (l. 15. ábra).

Most rátérünk a nomogramskálák valamely fenti 1. követelményt kielégítő † transzformációjának meghatározására.

A ,,legjobb'' W pont a § elején mondottak értelmében a következőképpen jellemezhető:

A W pont által (hasonlósági transzformációtól eltekintve) definiált † transzformációnak alávetett z_3 skálához tartozó $\varphi(z_3)$ függvény maximuma a ,,legjobb'' W esetén legkisebb.

Pentkovszkij az előbb idézett helyen lényegében ezt a szélső értéket határozza meg, ami meglehetősen bonyolult képletekre és előírásokra vezet. Ehelyett itt egyszerűbb eljárást javasolunk, mely gyakorlatilag teljesen kielégítő eredményekre vezet. Lemondva a ,,legjobb'' W meghatározásáról, meghatározzuk $\varphi(z_3)$-nak a z_3 skála véges számú szakaszán felvett átlagértékeit és e véges számú érték közül keressük ki a legnagyobbat. Feladatunk most annak a W pontnak a meghatározása, melyre e maximum a legkisebb.

Részletesebben: a z_3 skála ábrázolandó $R_1\,R_{n+1}$ szakaszát az I, R_1, $R_2, \ldots R_{n+1}$, J sorrendű R_ν pontokkal n részre osztjuk (a kiindulásul választott nomogrammváltozat alakjának, a pontossági követelmény természetének és egyéb szempontoknak figyelembevételével általában $n = 2$, esetleg 1 vagy 3 választás ajánlható).

A minimálissá teendő $\varphi(z_3) = \dfrac{h}{H(z_3)} \dfrac{dz_3}{ds}$ függvény integrálközepe az $\overline{R_\nu R_{\nu+1}}$ szakaszon

$$\bar{\varphi}_\nu = \frac{\Phi(z_3^{(\nu+1)}) - \Phi(z_3^{(\nu)})}{f(w\,;i,j,r_\nu,r_{\nu+1})},$$

ahol

$$\Phi(z_3) = \int^{z_3} \frac{dt}{H(t)},$$

a W pont helyzetétől, illetőleg az alkalmazott projektív transzformációtól független érték. Így pl. ha $H(z_3)$ állandó (a hiba nagyságát korlátozzuk), akkor

$$\Phi(z_3) = a\,z_3 + b\,, \tag{19}$$

és ha $H(z_3)$ arányos z_3-mal (a hiba százalékos értékét korlátozzuk), akkor

$$\Phi(z_3) = a' \log z_3 + b'\,, \tag{20}$$

(a, b, a', b' állandók).

(17)-tel összhangban a $\bar{\varphi}_\nu$ számok reciprok értékeit hasonlítjuk össze. Ezért ábrázoljuk az

$$F_\nu(w) = \frac{f(w\,;i,j,r_\nu,r_{\nu+1})}{\Phi(z_3^{(\nu+1)}) - \Phi(z_3^{(\nu)})}$$

függvényeket és jelöljük ki az

$$F(w) = \min_{\nu=1,2,\ldots n} F_\nu(w)$$

függvényt. Az $F(w)$ függvénynek a $\mathcal{G}$-n kívüli $\overline{IJ}$ szakaszon pontosan egy tartományi maximuma (az egész szakaszon felvett legnagyobb érték) van, amelyhez tartozó w értéket w_m-el jelöljük.

A $\varphi(z_3)$ függvény csökkentése érdekében általában szükséges és elegendő a T projektív transzformációt úgy választanunk, hogy az r' egyenes végtelen távoli pontjának az r egyenes w_m koordinátájú W pontja feleljen meg.

Ha pl. $n = 2$, jelölje w_1 az $f(w\,;\,i,j,r_1,r_2)$, w_3 pedig az $f(w\,;\,i,j,r_2,r_3)$ függvény (18)-ból kiszámítható (lokális) maximumának helyét, és legyen $\bar{w}$ az $F_1(w) = F_3(w)$ egyenlet megoldása. (A szimmetrikusabb jelölés kedvéért az $\overline{R_2R_3}$ szakaszhoz tartozó mennyiségeket itt $\nu = 3$ indexszel látjuk el.) $\bar{w}$ értéke az

$$(R_1 R_3 R_2 W) = -\lambda \tag{21}$$

feltételből határozható meg, ahol

$$\lambda = \frac{\Phi(z_3^{(2)}) - \Phi(z_3^{(1)})}{\Phi(z_3^{(3)}) - \Phi(z_3^{(2)})}.$$

Ha W_1 és W_3 elválasztja a $\overline{W}$ pontot $\mathcal{G}$-től, akkor $w_m = \bar{w}$, egyébként $w_m = w_1$ vagy w_2 aszerint, hogy $F_1(w_1)$ kisebb, vagy nagyobb $F_3(w_3)$-nál.

A W pont különösen egyszerűen határozható meg, ha $I = R_1$, $J = R_{n+1}$. Ez a helyzet pl. akkor, ha bármely, a nomogrammon ábrázolt $z_1 z_2$ értékpárhoz tartozó z_3 érték szerepel a z_3 skálán. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy a z_3 skála „teljes". Akkor az eredményskálának ebben az esetben rögzített hosszát legjobban akkor használjuk ki, ha a skálát lehetőleg az

$$s = \Phi(z_3)$$

egyenletnek megfelelően szerkesztjük. Ez könnyen belátható, hiszen az eredményskála hossza akkor használható ki jól, ha $\varphi(z_3) \approx$ állandó. Ebből $\varphi(z_3)$ és $\Phi(z_3)$ értelmezését felhasználva következik állításunk. — Tehát (18) és (19) alapján $H(z_3) = c$ esetben az egyenletest, $H(z_3) = c' \cdot z_3$ esetben a logaritmikust megközelítő eredményskálára kell törekednünk, *ha az teljes* (c, c' állandók). A fenti alternatíva alapján következik, hogy $n = 2$ választás mellett „legjobb" W gyanánt ilyenkor mindig az $F_1(w) = F_3(w)$ egyenlet (19) által definiált megoldása adódik. Tehát $H(z_3) = c$ (abszolút hibakorlát) esetén

$$z_3^{(2)} = \frac{z_3^{(1)} + z_3^{(3)}}{2}$$

felvétellel, $H(z_3) = c' \cdot z_3$ (relatív hibakorlát) esetén $z_3^{(2)} = \sqrt{z_3^{(1)} z_3^{(3)}}$ felvétellel $\lambda = +1$ adódik, azaz a W pont az R_2 ponttal R_1-et R_3-tól harmonikusan választja el.

6. §. Példák a skálák geometria viszonyainak szabályozására

Az ismertetett szerkesztés a † projektív transzformációt affin transzformációtól eltekintve egyértelműen meghatározza azáltal, hogy rögzíti az r egyenes képének végtelen távoli pontjához rendelt r egyenesbeli W pontot. Ebben a paragrafusban egyszerű speciális esetekben meghatározzuk a rögzített W pont esetén nyerhető „optimális" nomogramváltozatot.

Legyenek T_1 és T_2 a Σ-síknak a Σ', illetve a Σ'' sikra való olyan projektív transzformációi, melyek a W pontot a Σ', illetve Σ'' sík egy-egy végtelen távoli pontjába viszik át. Jelöljük a T_1 által létesített képeket egy, a T_2 által létesítetteket két vesszővel. Az r egyenes r' és r'' képeivel parallel Σ', illetőleg Σ'' síkbeli egyenessereg egymásnak felel meg. (Természetesen, ha a Σ', illetőleg Σ'' sík végtelen távoli egyeneseit is a sereghez számítjuk.) Ennélfogva a $T^* = T_2^{-1}\, T_1$ transzformáció az r'-vel parallel egyeneseket újra parallel egyenesekbe viszi át és rajtuk affin leképzést létesít.

Ebből pl. következik, hogy egymást egy pontban metsző egyenes skálatartók esetén egyedül az előző § előírásai szerint megszerkesztett W pont ismeretében eldönthető, hogy célszerű-e parallel skálájú nomogrammot szerkeszteni. (Célszerű, amennyiben a W által definiált projektív transzformációk „közel" párhuzamos skálájú nomogramot eredményeznek, vagyis ha a W pont „közel" van a skálatartók W_0 metszéspontjához. Pontosabban, ha $|(WIJW_0)| \ll 1$. Ebben az esetben olyan † transzformációt alkalmazunk, amely nem a W, hanem a W_0 pontot transzformálja végtelen távolivá).

Ha az összehasonlítandó nomogramok skálasorrendje megegyezik azaz a véges konvex burkok egymásnak felelnek meg, akkor a z_3 skála egyenese a véges konvex burokból szintén egymásnak megfelelő szakaszokat metsz ki. Ezeknek egymásra való leképezése hasonlósági transzformáció. Ennélfogva a nomogramokban a $\varphi(z_3)$ mennyiségek egyenlők, és így a legjobb nomogramváltozat meghatározása szempontjából csak a σ mennyiség irányadó.

A. *Parallel egyenes tartójú nomogramok*

Tegyük fel, hogy valamely T_1 projektív transzformációval nyert $\mathcal{N}_1$ nomogram tartói párhuzamosak. Vizsgáljuk meg, hogy ha adva van a nomogram számára rendelkezésre álló területrész — melyet egyszerűség kedvéért egységoldalú négyzetnek választunk — az összes lehetséges leképezésekkel elérhető változatok közül melyik a gyakorlatilag legjobb. A nomogram két szélső tartója a négyzet két átellenes oldalára esik és a legnagyobb tartó hossza egységnyi. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kiindulásul választott T_1 transzformációval nyert $\mathcal{N}_1$ változat mindkét szélső tartója egységnyi. A középső tartó pontjai nem eshetnek a két szélső tartó által meghatározott véges négyszögtartomány külsejébe. Ha ugyanis a középső tartónak volna ilyen kieső pontja, az nem lehetne kollineáris $z_1 z_2 z_3$ ponthármas tagja.

Előrebocsátjuk, hogy ha a két szélső tartó által meghatározott trapéz mindig egyenlőszárú akkor a különböző nomogramváltozatok összehasonlításánál az α szög figyelembevételétől eltekintünk, minthogy annak a nomogram pontosságára gyakorolt befolyása a szokásos elrendezésnél kicsi.

Csak olyan T* transzformációk jöhetnek szóba, melyek a nomogramot befoglaló négyzet belsejét egy olyan trapéz belsejére képezik le, mely a négyzetnek valódi résztartománya. Ennélfogva a nomogram két skálatartója biztosan rövidül, a harmadik változatlan, egységnyi hosszúságú marad. Ebből következik, hogy ha az *eredményskála középen* van, a nyert nomogramban $h < 1$. Azonban ennél az elrendezésnél σ értéke csak α és h függvénye (v állandónak tekinthető), α hatásától eltekintünk, tehát a *legjobbnak tekinthető változatban a két szélső tartó hossza egyenlő.*

Ha az *eredményskála a szélen van,* és T* az eredményskála hosszát hagyja változatlanul, ezáltal a z_1 és z_2 skála tartói közelednek. Ebben az esetben tehát $h = 1$, de v értéke növekszik a transzformáció során, azaz σ értéke is növekszik. Ha a másik szélső skála, pl. z_1 marad változatlan, már nem következtethetünk ilyen egyszerű módon. Ekkor ugyanis T* a h hossz csökkenésével együtt v értékét is csökkenti, minthogy ekkor a z_1 és z_2 skálák távolodnak egymástól. Így a (16) képletben szereplő v/h értékére nem mondhatunk konkrét számolás nélkül biztosat. Legyenek a skálák összetartozó végpontjai valamely derékszögű koordinátarendszerben a transzformáció elvégzése előtt és után

	T* előtt	T* után
z_1	$(0, 0)$	$(0, 0)$
	$(0, 1)$	$(0, 1)$
z_2	$(a, 0)$	$(a', 0)$
	(a, b)	(a', b')
z_3	$(1, 0)$	$(1, 0)$
	$(1, 1)$	$(1, c')$

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b \leqq 1; \quad 0 < a' < 1, \quad 0 < b' < 1, \quad 0 < c' \leqq 1)$$[3]

A $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ fixpontokkal rendelkező T* (vagyis a skálatartókat párhuzamosan hagyó) transzformációk analitikusan a következő képletekkel adhatók meg:

$$x' = \frac{(m+1)\,x}{x+m}, \quad y' = \frac{m\,y}{x+m}.$$

Innen $h = c' = \dfrac{m}{m+1}$.

A z_2 és z_3 skála távolsága

$$a' = \frac{(m+1)\,a}{m+a}.$$

[3] Tekintve, hogy az α szög befolyásától eltekintünk, a leolvasási hiba csak a skálák hosszától és távolságától függ. Ezért egy-egy végpontjuk az általánosság megszorítása nélkül felvehető az abszcissza-tengelyen.

A z_1 és z_2 skála távolsága

$$1 - a' = \frac{m(1-a)}{m+a}.$$

(13) felhasználásával

$$v = \frac{(1-a')+1}{a'} v_1 = \frac{2m + a - ma}{(m+1)a} v_1 ;$$

$$\frac{v}{h} = \left[1 + \frac{2m(1-a)+a}{ma}\right] v_1 . \tag{22}$$

Mármost egyrészt az x' koordinátának $0 \leq x \leq 1$ szakaszon való korlátosságából, másrészt a $c' < 1$ feltételből egyszerűen adódik, hogy $m > 0$. Akkor pedig (22) alapján

$$\frac{v}{h} > v_1, \quad \text{és a fortiori} \quad \frac{p+v+\delta}{h} > p + v_1 + \delta,$$

és így a T* transzformációval nyert nomogramra vonatkozó kifejezéseket csillaggal megkülönböztetve $\alpha = 90^\circ$ esetén

$$\sigma^* > \sigma .$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy *a párhuzamos skálatartójú nomogramok* bármely skálasorrend mellett *akkor a legpontosabbak, ha a szélső skálák a nomiogram számára biztosított négyzet csúcspontjai.*

Természetesen az állítás akkor is igaz marad, ha négyzet helyett téglalapalakú területet adunk meg a nomogram számára.

A gyakorlatban előforduló parallel egyenes tartójú nomogramok szinte mindig eleget tesznek ennek az egyszerű feltételnek.

Felvetődik itt az a kérdés, hogy a tárgyalt két elrendezés : „eredményskála középen" azaz a jóelrendezésű nomogram, és „eredményskála a szélen" közül mikor melyik praktikusabb. Magától értetődik, hogy amennyiben a z_3 skála teljes, előnyösebb, ha az eredményskála közepén van. Ha viszont az eredményskála nem teljes, sőt a jó elrendezésű nomogramban nagyon rövidnek adódik, elképzelhető (amint a számítás meg is fogja mutatni), hogy a téglalapalakú nem jó elrendezésű változat jobb eredményt ad a hosszú skálatartó miatt — a sokkal nagyobb v-érték ellenére is.

Az összehasonlítandó két nomogrammváltozatban most a $\varphi(z_3)$ értekek sem egyeznek meg, miután a skálasorrend és így a véges konvex burok különböző. Miután T* a z_3 skálát arányosan nyújtja, a $\varphi(z_3)$ értékek fordítva arányosak a z_3 skálák g hosszával.

Tekintsük az egyik T* projektív transzformációt, mely a „négyzetalakú" jó elrendezésű nomogramot szintén „négyzet-alakú" nem jó elrendezésűvé alakítja. Legyenek a két nomogram skálatartóinak összetartozó végpontjai

	Jó elrendezésű nomogram	Nem jó elrendezésű nomogram
z_1	(0, 0)	(0, 0)
	(0, 1)	(0, 1)
z_2	(1, 0)	(d, f)
	(1, 1)	(d, e)
z_3	$(a, 0)$	(1, 1)
	(a, b)	(1, 0)

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b \leqq 1, \quad 0 < d < 1, \quad 0 \leqq e < f \leqq 1).$$

T* analitikusan meghatározható a z_1 és z_3 skálák adataival:

$$x' = \frac{bx}{(b+1)x - a}, \quad y' = \frac{bx - ay}{(b+1)x - a}.$$

Ebből

$$d = \frac{b}{b+1-a}, \quad e = \frac{b-a}{b+1-a}, \quad f = \frac{b}{b+1-a}.$$

d, e és f ismeretében kiszámítható v/g értéke. Ennél a számításnál — miután a v_1 értékéhez való viszonyát amúgy sem ismerjük — a p parallaxist és a δ interpolációs hibát egyelőre elhanyagoljuk.

	h	v/v_1	v/g
A jó elrendezésű nomogramon	b	1	$\frac{1}{b} v_1$
A nem jó elrendezésű nomogramon	1	$\frac{2-d}{d} = \frac{b+2-2a}{b}$	$\frac{b+2-2a}{b} v_1$

Következésképpen ez a nem jó elrendezésű nomogram akkor előnyösebb a jó elrendezésűnél, ha

$$\frac{b+2-2a}{b} < \frac{1}{b},$$

azaz

$$b < 2a - 1.$$

Azonban a jó elrendezésű nomogramm z_3 skálájának a szélső skálák által meghatározott négyzet mindkét átlójával van közös pontja. (Ellenkező esetben ugyanis az egyik szélső skálának lenne felesleges szakasza). Ennélfogva, ha most már elhagyjuk azt a megszorítást, hogy a skálák egy-egy végpontja az x-tengelyre essék és a jelenti általában a jó elrendezésű nomogramban z_3 tartójának z_1, illetve z_2 tartóitól való távolságai közül a nagyobbikat, b a z_3 skála hosszát, akkor reális nomogramok esetében

$$b \geqq 2a - 1$$

mindig teljesül. p és δ elhanyagolása esetén tehát mindig a jó elrendezésű nomogram adódik előnyösebbnek.

Levezetésünkben a p és δ értékeket is figyelembe véve az egyik nem jó elrendezésű nomogram előnyösebbnek adódik a jó elrendezésűnél, ha

$$b < 2ka + 1 - 2k,$$

ahol

$$k = \frac{v_1}{v_1 + p + \delta} < 1.$$

Ebből látható, hogy ha a jó elrendezésű nomogrammban

a) az eredményskála „csak valamivel" nyúlik túl a szélső tartók téglalapjának átlóin, akkor az egyik nem jó elrendezésű nomogram előnyösebb,

b) ha az eredményskála „majdnem" teljes, akkor a jó elrendezésű nomogram előnyösebb.

Azonban pontos határvonalat nem tudunk vonni a jó és nem jó elrendezésű nomogramok között, amíg k értékére valami feltevéssel nem élünk.

B. *Közös ponton átmenő egyenes tartójú nomogramok*

Az α szög hatásának figyelembe vételére jó például szolgálnak azok a közös ponton átmenő egyenes tartójú nomogramok, melyek skáláinak közös végpontja van, a z_3 skála a z_1 és z_2 skála közé esik, és rajta csak hasonlósági transzformáció engedhető meg. A skálák végpontjait a nomogram számára rendelkezésre álló területrész szabja meg:

$$z_1 \text{ skála} \dots A(-a, 0), \quad C(\xi, m);$$

$$z_2 \text{ skála} \dots C(+a, 0), \quad C(\xi, m);$$

$$z_3 \text{ skála} \dots D(\eta, 0), \quad C(\xi, m),$$

vagy a $\overline{CD}$ szakasz egy $\overline{CD_1}$ része. a, m állandó, ξ, η változtatható értékek és

$$-a < \eta < +a,$$

$$-a < \xi < +a.$$

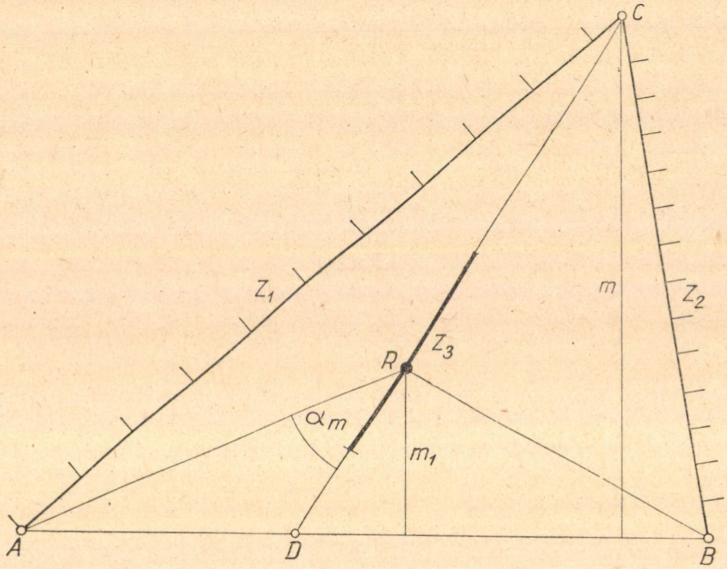
Meghatározzuk azt a nomogramváltozatot, melyre egy rögzített z_3 értékhez tartozó maximális σ érték a legkisebb. Minthogy az eredményskála középen van, $v = v_1 =$ állandó. Ennélfogva a σ érték az α szögtől és a h hosszúságtól függ.

Határozzuk meg először $\frac{1}{h \sin \alpha}$ fenti maximum-minimum értékét.

1. Ha A, B, C, D rögzített, a CD egyenesen fekvő tetszőleges R ponthoz tartozó legnagyobb σ értéket akkor kapjuk, amikor α a legkisebb, azaz

$$\alpha_m = \min\,[\,ARD\sphericalangle,\ BRD\sphericalangle\,]$$

(16. ábra). Legyen először $\overline{CD}$ iránya rögzített. Akkor, miközben C végigfut az $y = m$ egyenesen, R egy $y = m_1$ egyenesen mozog ($m_1 =$ konst.). α_m legnagyobb értékét $ARD\sphericalangle = BRD\sphericalangle$ mellett éri el. Minthogy közben $h = \overline{CD}$ állandó, σ is ebben a helyzetben maximális.



16. ábra

2. Változzék most $\overline{CD}$ iránya és C helyzete egyidejűleg, de oly módon, hogy közben mindig $\overline{RD}$ legyen az $ARB\sphericalangle$ szögfelezője. Akkor

$$h = \frac{m}{\sin CDB\sphericalangle}.$$

Az $ARD\,\triangle$-ből

$$\frac{\sin ARD\sphericalangle}{\sin CDB\sphericalangle} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AR}}.$$

A háromszög szögfelezőire vonatkozó ismert elemi geometriai tétel szerint

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BR}},$$

vagy

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AR} + \overline{BR}}.$$

Innen

$$\sin \alpha_m = \sin ARD\sphericalangle = \sin CDB\sphericalangle \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AR} + \overline{BR}}.$$

Végül h és $\sin \alpha_m$ kiszámított értékének felhasználásával

$$\frac{1}{h \sin \alpha_m} = \frac{\overline{AR} + \overline{BR}}{2am}.$$

Ennélfogva $\frac{1}{h \sin \alpha_m}$ minimális értékét akkor éri el, amikor a fix m_1 magasságú $ARB\,\triangle$-re nézve $\overline{AR} + \overline{BR}$ a legkisebb. Ez pedig akkor következik be, amikor $\overline{AR} = \overline{BR}$ vagyis amikor $C(0, m)$ és $D(0, 0)$, és így az ábra szimmetrikus a z_3 tartóra. Ugyanekkor azonban

$$\frac{\operatorname{cotg} \alpha_m}{h} = \frac{1}{h \sin \alpha_m} \cdot \cos \alpha_m$$

is minimális, hiszen a $\overline{CD}$ egyenesnek a szimmetriatengelyből való bármely elmozdításánál α_m csak csökkenhet és így $\cos \alpha_m$ csak nőhet. Ha a δ interpolációs hiba kismértékű csökkenését figyelmen kívül hagyjuk, akkor kimondhatjuk, hogy *a z_3 skála bármely pontjában a fellépő maximális leolvasási hiba akkor lesz a legkisebb, amikor a z_3 skála az ábra szimmetriatengelyébe esik.*

7. §. Nomogramtervezési eljárás általános nomogramokra

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan építhető fel az eddig ismertetett fogalmakból és módszerekből egy olyan nomogramtervezési eljárás, amely egyesíti magában a szerkesztés gyorsaságának és áttekinthetőségének előnyét a numerikus számolás által elérhető pontossággal. Elérendő célként lebeg szemünk előtt, hogy lehetőleg mechanikus szabályok alkalmazásával, automatikusan kiadódjék az adott függvénykapcsolat esetén legcélszerűbb nomogram-elrendezés. (Ha egy képlet többféle típusú nomogrammal ábrázolható, ezek közt természetesen nem tud az eljárás válogatni.)

Az alábbiakban ismét csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, amelyekben

1. az egyes skálatartományok összefüggőek,
2. a nomogramnak van egy kitüntetett z_3 „eredmény”-skálája, (az ehhez tartozó skálatartományt továbbra is $\mathscr{Z}_3$-mal jelöljük) és
3. a nomogramnak van konvex burka.

Ezek a feltételek a gyakorlati eseteknek nagy részében teljesülnek.

A javasolt módszer lépései a következők:

A) Felvázoljuk a nomogram triviális változatát ($\mathscr{N}$, amely a Σ síkban van elhelyezve). Kiválasztjuk a nomogramnak azt a konvex burkát, melyet a végleges nomogram korlátos konvex burkába szándékozunk transzformálni.

B) Szerkesztéssel meghatározzuk azt a T projektív transzformációt, mely $\mathscr{N}$-et a gyakorlat által előírt pontossági, továbbá a nomogram kívánatos alakjára, terjedelmére vonatkozó, és esetleg egyéb feltételeket lehetőleg jól kielégítő $\mathfrak{N}'$ nomogramra képezi le.[5)]

C) Ha $\mathfrak{N}'$ még javításra szorul, módosítjuk a szerkesztésre vonatkozó feltételeket, és a *B)* pontbeli eljárást ismét a nomogram triviális változatából kiindulva megismételjük. Esetleg a nomogramnak egy másik konvex burkából indulunk ki.

D) Ha már nem kívánjuk a nomogram alakjának további módosítását, akkor az 1. §-ban ismertetett módon a Σ és Σ' síkbeli koordinátarendszerek felvétele után a szerkesztés alapján megállapíthatók a T transzformáció analitikus geometriai formulái és a kellő pontossággal meghatározhatók a nomogram pontjainak koordinátái.

Az eljárás gerincét képezi a tervezés *B)* alatt vázolt szakasza, vagyis, hogy az $\mathfrak{N}'$ nomogram használhatóságára vonatkozó, a 4. §-ban megfogalmazott követelményekből kiindulva a transzformációt egyértelműen meghatározó geometriai feltételeket állapítunk meg, ezek alapján szerkesztéssel meghatározzuk a T-t definiáló adatokat és elvégezzük a leképezést. Természetesen a 4. §. követelményei nem minden függvénykapcsolat esetén elégíthetők ki egyenlő mértékben és egyforma módszerrel, azért nem is lehet a szerkesztés számára univerzális érvényű törvényeket felállítani, legfeljebb az egyes esetekre individuálisan alkalmazható irányvonalakat tudunk megszabni.

Az alábbiakban T egyértelmű meghatározására a gyakorlatban előforduló nomogramok egy nagy csoportjának tervezésénél alkalmazható geometriai feltételeket szabunk és megmutatjuk a feltételek szerkesztéssel való kielégítésének módját.

1. A z_3-skála sűrűségére vonatkozó feltétel. Az 5. §-ban megtárgyaltuk a z_3 tartó W pontjának szerkesztését, amennyiben a z_3 tartó egyenes. Ellenkező esetben válasszunk ki az 5. §-ban tárgyalt elvek szerint a z_3 skálán $n+1$ (általában 3) pontot. (Ha a z_3 skálán egyenletes beosztás kívánatos, a $z_3^{(\nu)}$ értékek lehetnek számtani sor tagjai, ha logaritmikus beosztás előnyös, képezhetnek mértani sort.)

Ezután a z_3 skála kijelölt pontjait egy közös t egyenesben fekvő T_ν $(\nu = 1, \ldots, n+1)$ pontokkal közelítjük, majd a $\Phi(z_3^{(\nu)})$ értéket rendelve a T_ν ponthoz, elvégezzük az 5. §-ban javasolt szerkesztést a W pont meghatározására.

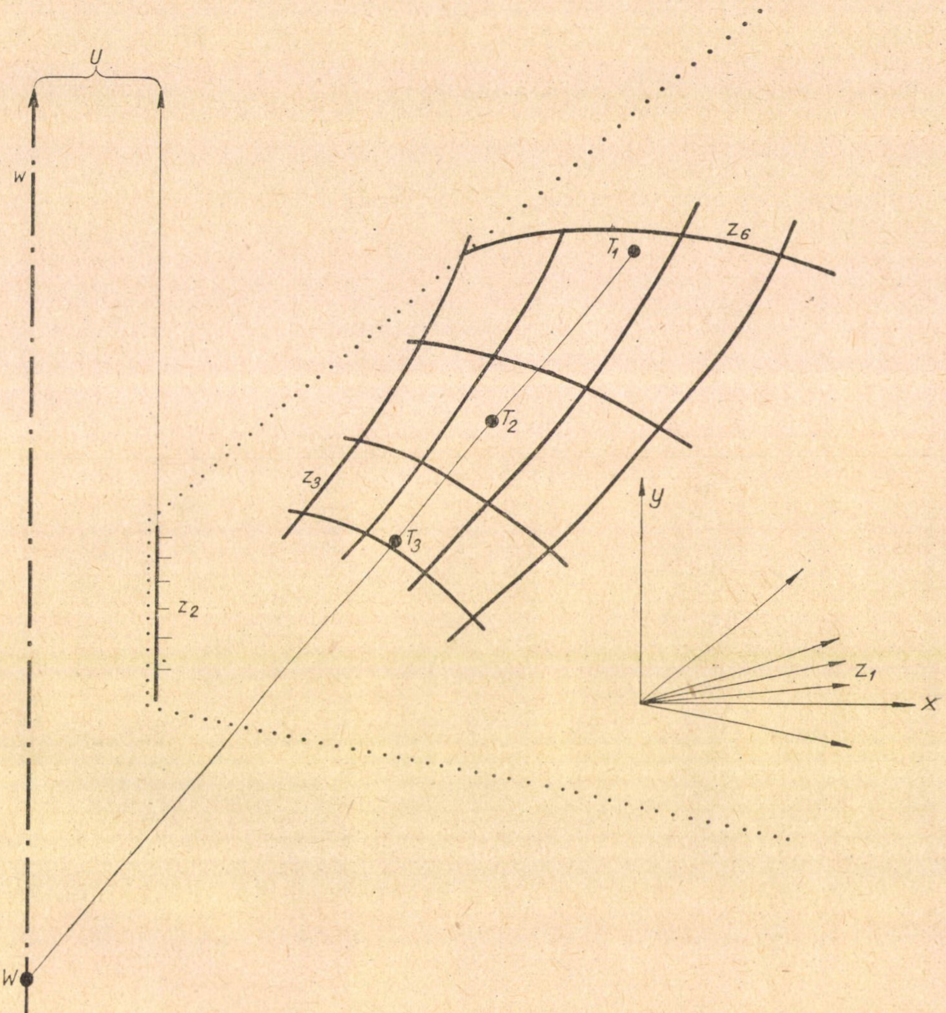
A W pont ilyen meghatározása természetesen nagyfokú bizonytalanságot és önkényességet rejt magában, és amellett a z_3 skála erős görbültsége igen bizonytalanná teheti az eljárást. A nomogramtervező érzékére, tapasztalatára kell bíznunk a felvett $n+1$ pont számát, elrendezését, továbbá görbe skála esetén a z_3 skálának egyenessel való közelítését. Még egyenes skála esetén is kétes, hogy a (14) szerinti $F(z_1, z_3)$ függvényre vonatkozó szélsőértékfeladat megoldásához milyen közel van az általunk javasolt közelítő megoldás.

Az egyenessel való közelítés jósága pl. csak a transzformált, kész nomogramon ellenőrizhető. Mindenesetre a tájékozódást megkönnyíti, hogy W ismeretében már látható, hogy a z_3 skála mely részei kb. milyen mértékben hosszabbodnak vagy rövidülnek. Ez a skála kis környezetének hosszabbodá-

---

5) Tetszőleges halmaz T által létesített képét a halmaz jele mellé írt vesszővel jelöljük.

sára vagy rövidülésére is ad némi támpontot. Ezenkívül W körülbelüli ismerete és a választott $\mathcal{G}$ konvex burok ad némi tájékoztatást a Σ' sík végtelen távoli egyenesének Σ síkbeli w megfelelőjéről. w becslésszerű ismerete alapján többnyire megbecsülhető a végleges nomogram alakja. $\mathcal{N}'$-ben távoli z_1



17. ábra

és z_2 skálarészekhez tartozó z_3 skálapontokat nem szükséges olyan pontosan közelíteni, mint ha a megfelelő z_1 és z_2 skálarészek közel esnek. (Az éles metszések veszélye miatt). Ezáltal a közelítés pontosságát (érzék szerint) súlyozni tudjuk.

Még nehezebb feladat a t egyenes jó kijelölése, ha $\mathcal{Z}_3$ pontmező.

2. Kiegészítő szempontok. Ha w' a Σ' sík végtelen távoli egyenese, akkor w illeszkedik a W pontra. A w egyenes egy második, W^* pontjának választása — sajnos — még w választásánál is bizonytalanabb alapokon nyugszik. W^* megválasztására a következő szempontok adhatók:

a) Ha a nomogramnak z_1 és z_2 skálái egyenes tartójú pontsorok (Cauchy-féle nomogram), legyen $\mathcal{N}$-beli tartójuk metszéspontja U. Ha a $\overline{WU}$ egyenes nem metszi $\mathcal{G}$-t, $w = \overline{WU}$ választással párhuzamos skálatartójú nomogramot szerkeszthetünk. (17. ábra.)

Hasonló a helyzet, ha a nomogramnak egy skálapárja olyan pontmezőt alkot, melynek egyik görbeserege sugársor. Legyen ennek tartója V. Ha a $\overline{VW}$ egyenesnek nincs közös pontja $\mathcal{G}$-vel, $w = \overline{VW}$ választással a sugársor képe párhuzamos egyenesekből fog állni.

b) A

$$z_1 = \frac{f_{25} - f_{36}}{g_{25} - g_{36}},$$

alakú ötödrendű függvénykapcsolat esetén a nomogram triviális változatának z_1 skálája a végtelen távoli egyenesen van és $y/x = z_1$ egyenlettel van meghatározva [2. § (4.c)].

A nomogram megrajzolása, vagy kapcsolása szempontjából kívánatos lehet egyenletes z_1-skála elérése. A T transzformáció $\mathcal{N}$ végtelen távoli z_1 skáláját akkor viszi át egyenletes skálába, ha w párhuzamos az y tengellyel. Amennyiben a már megszerkesztett vagy felvett W ponton átmenő, y-tengellyel parallel egyenes nem metszi $\mathcal{G}$-t, egyenletes z_1 skála elérhető (18. ábra).

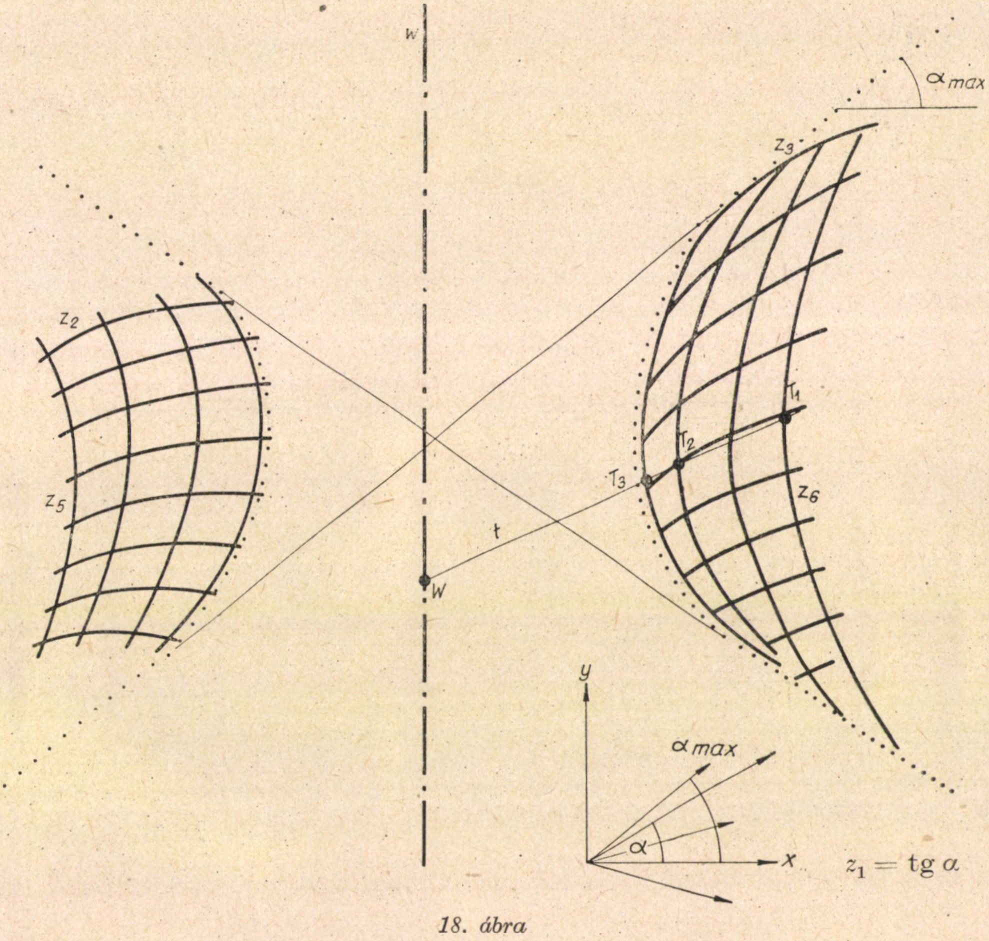
Az *a)* és *b)* esetekben a projektív transzformáció analitikus formulái egyszerű geometriai számítással a szerkesztés tényleges elvégzése nélkül is meghatározhatók.

Ha az előbbi speciális alakú nomogramok egyike sem szerkeszthető meg, a *c)* vagy *d)* pontban ismertetett módon járhatunk el.

c) Tegyük fel, hogy $\mathcal{G}$ oly módon burkolható egy a, b, c, d négyoldallal, hogy annak a oldala a $\mathcal{Z}_1$, b oldala a $\mathcal{Z}_2$ skálatartományhoz jól simul. a és b legyenek a $\mathcal{G}$ által meghatározott négyszögtartomány szemközti oldalai. Legyen a és b metszéspontja F, c és d metszéspontja E (lásd a 2. ábrát), legyen $\overline{EF}$ $\mathcal{G}$-nek külső egyenese. Ha az 5. §. előírása alapján megszerkesztett W „közel" van $\overline{EF}$-hez, választható $w = \overline{EF}$. Ezáltal speciális esetként kapjuk a Soreau-féle nomogramszerkesztési eljárást, de azzal a többlettel, hogy egyben áttekinthető képet kapunk ennek a z_3 skála viszonylagos sűrűségére vonatkozó feltétellel való kompatibilitásáról. Ha ez nem áll ugyan fenn, de becslésünk szerint a kész nomogram $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ skálatartományai nem kerülnek túlságosan közel egymáshoz, a parallelskálás nomogramoknál kapott eredmények jobb híján alkalmazhatók, azaz úgy transzformálhatjuk a nomogramot, hogy $c' \parallel d'$ legyen. Ekkor $w = \overline{WF}$.

Általánosabban: Tegyük fel, hogy a $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_2$ skálatartományok $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ konvex burkai egymást nem tartalmazzák. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ekkor legalább két közös támaszegyenesük van. Válasszuk ezek közül azt az $\overline{m\,n}$ párt, amely a $\mathcal{G}$ konvex buroknak is támaszegyenese. (A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ilyen pár mindig pontosan egy van.) A c és d egyenesek szerepét most $\bar{m}$ és $\bar{n}$ tölti be, azaz, ha $\bar{m}$ és $\bar{n}$ metszéspontja E, akkor a T transzformációt ismét $W = \overline{WE}$ feltétellel szerkesztjük.

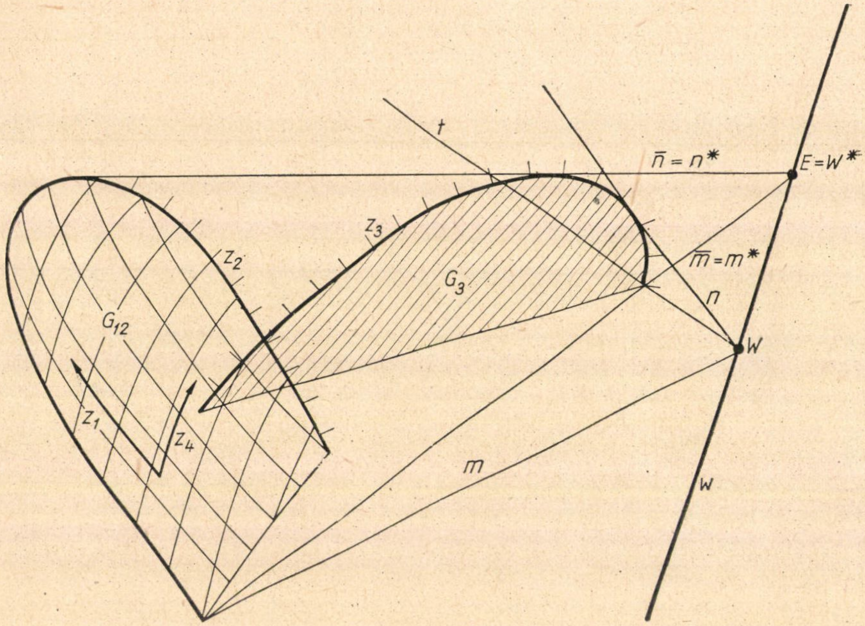
Az eljárás előnye, hogy nem jó elrendezésű nomogram is tervezhető vele. Ekkor azonban $\bar{m}$ és $\bar{n}$ a $\mathscr{Z}_1 + \mathscr{Z}_2$ halmaz $\mathscr{G}_{12}$ és a $\mathscr{Z}_3$ halmaz $\mathscr{G}_3$



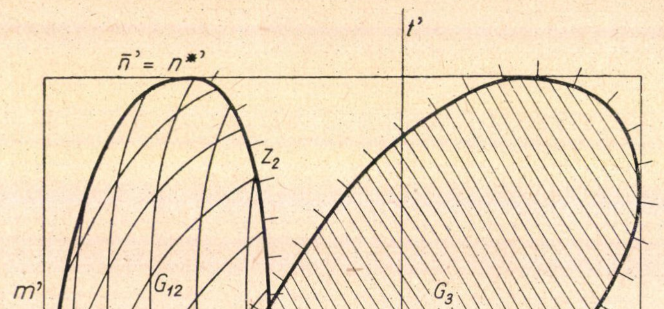
18. ábra

konvex burkának közös támaszegyenesei. (19.a, 19.b ábrák). Hátránya lehet, hogyha a nyert nomogramon pl. $\bar{m}$-nak rövid a $\mathscr{G}$-vel közös szakasza, a megfogalmazott feltétel semmitmondóvá, céltalanná válik.

d) Centrális $\mathscr{Z}_3$. Jó elrendezésű $\mathscr{G}$ konvex burok esetén egyéb szempont híján elég arra törekednünk, hogy a skálák végleges nagyságában és elhelyezkedésében feltűnő aránytalanságok ne legyenek; a w egyenes felvételénél megmaradt egy szabadsági fokot erre használjuk fel. Ez különösen akkor ésszerű a 6. §. utolsó példája kapcsán mondottakkal összhangban (egy pon-

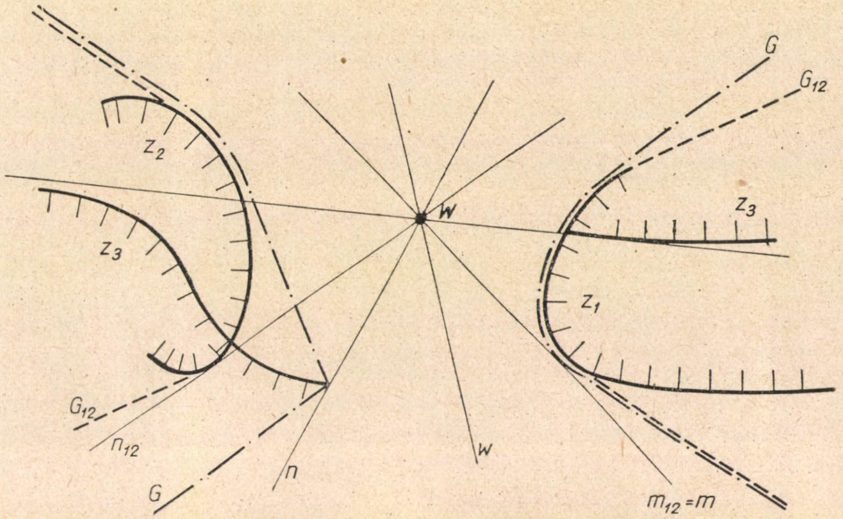


19.a ábra

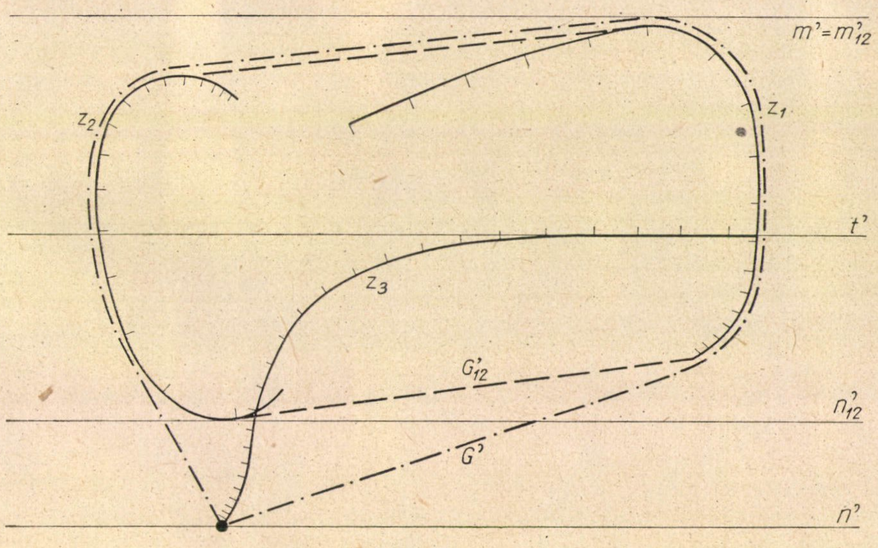


19.b ábra

ton átmenő egyenes skálás nomogramok), ha a $\mathscr{Z}_1$ és $\mathscr{Z}_2$ skálatartományok egy helyen nagyon közel kerülnek egymáshoz a végleges nomogramon.



20.a ábra



20.b ábra

Legyen a $\mathscr{Z}_1 + \mathscr{Z}_2$ halmaznak w-hez tartozó konvex burka $\mathscr{G}_{12}$, és $\mathscr{G}_{12}$-nek a W ponton keresztülmenő két támaszegyenese m_{12} és n_{12} (20.a és 20.b ábra). A T leképezésnél t, m_{12} és n_{12} párhuzamos egyenesekbe mennek át. Írjuk elő az

(23) $$(m'_{12}\, n'_{12}\, t) = \mu$$

osztóviszony értékét úgy, hogy ezáltal a $\mathscr{Z}_3$ skálatartomány képének központi fekvését biztosítsuk a $\mathscr{G}_{12}$ konvex burokhoz képest. (Ehhez általában $\mu = 1$ választás célszerű.) (23) másképpen

$$(m'_{12}\, n'_{12}\, t'\, w') = -\mu$$

alakban írható, ahol w' a Σ' sík végtelen távoli egyenese. A T^{-1} transzformáció alkalmazásával a (23) feltétel

$$(24) \qquad (m_{12}\, n_{12}\, t\, w) = -\mu$$

alakra hozható, aminek alapján w megszerkeszthető. (20a. és 20b. ábra)

A $\mathscr{Z}_3$ skálatartomány központi fekvését azért is célszerű biztosítani, hogy elkerüljük annak a $\mathscr{Z}_1$ vagy $\mathscr{Z}_2$ skálatartományhoz való túlságos hozzásimulását, ami éles metszéseket eredményezhetne.

3. *A leképezés egyértelmű meghatározása és befejezése.* A w egyenes ismeretében a T projektív transzformáció affin transzformációtól eltekintve meg van határozva.

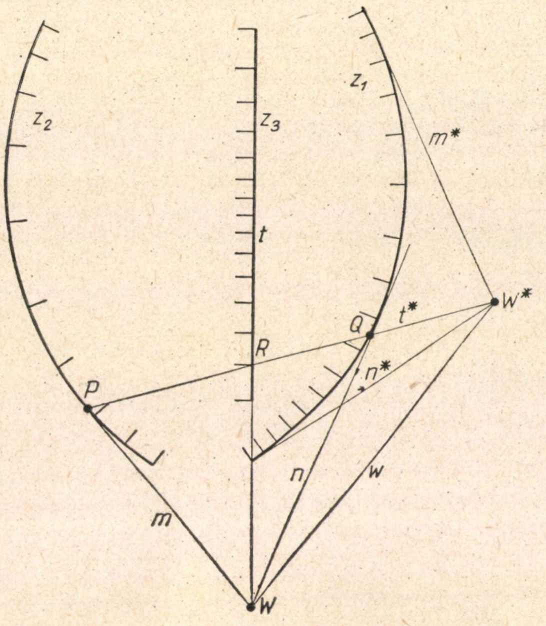
Hogy a leképezést egyértelművé tegyük, választunk még egy W^* pontot w-n.

Legyenek $\mathscr{G}$-nek W-n áthaladó támaszegyenesei m és n, a W^*-n áthaladók m^* és n^*. Az mm^*nn^* négyoldal által elhatárolt, $\mathscr{G}$-t tartalmazó tartomány projektív transzformáltja olyan parallelogramma, melynek $m'\, n'$ és $m^{*\prime} n^{*\prime}$ párhuzamos oldalpárjai. Legyen $m'm^{*\prime}n'n^{*\prime}$ a rajzterjedelem által meghatározott $a \times b$ méretű téglalap (vagy esetleg általánosabban olyan parallelogramma, melynek a, b oldalhosszai és γ hegyesszöge adott). Az mm^*nn^* négyoldalnak az $m'm^{*\prime}n'n^{*\prime}$ parallelogrammára való leképezése a SOREAU-féle módszerrel történhetik. Az $m'm^{*\prime}n'n^{*\prime}$ parallelogramma ,,burkolja", a transzformált nomogramot, abban az értelemben, hogy $\mathscr{G}'$-t tartalmazza és minden egyes parallelogrammaoldal tartalmazza $\mathscr{G}'$-nek, tehát a $\mathscr{Z}_1$, $\mathscr{Z}_2$, $\mathscr{Z}_3$ skálatartományok valamelyikének is legalább egy pontját.

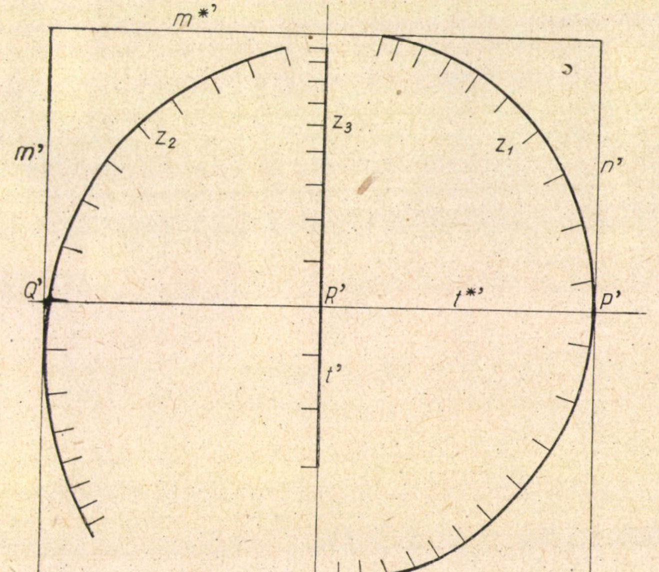
Mint már mondottuk, T-t egybevágósági transzformációkat nem számítva öt számadat határozza meg egyértelműen. Ezek közül kettő (λ és μ) elegendő ahhoz, hogy affin transzformációktól eltekintve meghatározza, a többi három paraméter (a, b, γ) változtatásával a nomogram már csak affin transzformációt szenved.

W^* különböző felvételeivel olyan nomogramokat kapunk, melyek egymásba affin transzformációval átvihetők. Ezek közül ki kell választanunk az éles metszések szempontjából optimális változatot.

Az affin transzformáció végrehajtására tulajdonképpen nem nagyon érdemes tanácsot adni, hiszen a cél: a $\mathscr{Z}_1$ és $\mathscr{Z}_2$ skálatartományoknak $\mathscr{Z}_3$ skálatartományra vonatkoztatott szembenállása nem definiálható egyértelműen. Egy megoldás, hogy a $\mathscr{Z}_1$ és $\mathscr{Z}_2$ tartományokban egy P illetőleg Q pontot választunk, melyekre előírjuk, hogy $\overline{PQ} = t^* \perp t$ legyen. P és Q lehetnek például a leggyakrabban előforduló vagy átlagos változóértékekhez tartozó pontok (21.a és 21.b ábra). Másik lehetőség E megválasztására: Legyen t^* a $\mathscr{G}_1$ és $\mathscr{G}_2$ (illetve $\mathscr{G}_{12}$ és $\mathscr{G}_3$) burkok feljebb definiált, $\overline{m}$ és $\overline{n}$ közös támaszegyeneseinek egyike, ha ennek Σ'-beli képén a $\mathscr{G}$-vel határos szakasz elég hosszúra adódik. (Vesd össze: 19.a és 19.b ábra.)



21.a ábra



21.b ábra

Van egy problematikus része a tervezés A-val jelölt lépésének is : a konvex burok megválasztása, ha a nomogramnak több konvex burka van. Erre a következő szempontok érvényadók :

Ha a $\mathcal{D}_3$ tartomány nem adódik túlzottan kicsinyre ,vagy éppenséggel teljes, mindenképpen a jó elrendezésű konvex burok választandó.

Ha a $\mathcal{D}_3$ tartomány kicsinyre adódnék, nem lehet általános érvényű tanácsot adni. Amennyiben a skálatartományok egy pontra illeszkedő egyenesekkel közelíthetők, a 6. §. első példájában közölt összehasonlítás az 5. §-ban közölt szerkesztés adhat előzetes támpontot a legcélszerűbb konvex burok kiválasztásáról.

Az mm^*nn^* négyszögtartomány ismeretében a leképezés a Soreau által alkalmazott szerkesztéssel befejezhető. Ha a kapott nomogram-alak megfelelő, a szerkesztésből meghatározzuk az alkalmazott projektív transzformációt meghatározó egyenleteket és a transzformációt számítással is elvégezzük. Ellenkező esetben a feltételek módosításával a szerkesztést megismételjük.

*

A javasolt módszer előnyei és hátrányai a következőkben foglalhatók össze :

Előnye a módszernek, hogy

1. A szerkesztés nem korlátozódik egy speciális nomogram-alakra (pl. párhuzamos skálájú nomogram), hanem kiadódik belőle a legcélszerűbb kivitelű alak.

2. Közvetlen és áttekinthető kapcsolat van a nomogram kivitelére vonatkozó követelmények és a szerkesztés között (ellentétben a tisztán számítással végzett projektív transzformáció módszerével), ami a tervezést rutinmunkává teszi.

3. Ennek következtében a szerkesztés gyakran a legelső lépésnél, de legtöbbnyire az első lépés után végrehajtott korrekció során megadja a megvalósítható legjobb nomogram-változatot.

4. Egy projektív transzformáció is lényegesen gyorsabban hajtható végre a szerkesztéses, mint a tisztán számításos módszerrel, mert a triviális nomogram-alakból indul ki és a projektív transzformáció szerkesztése gyorsabban végezhető és áttekinthetőbb, mint a számítás ; a transzformációs lépések pedig nem láncszerűen kapcsolódnak, hanem mindig a triviális alakból indulnak ki.

5. Ugyanezek miatt kisebb a hibalehetőség.

6. A szerkesztéssel szemben támasztott pontossági kikötések minimálisak, mert a szerkesztés nem túl nagy hibája egyáltalán nem befolyásolja a számítással előállított nomogram jóságát, hiszen csak a számítással elvégzett projektív transzformáció képleteiben szereplő konstansokban okoz eltérést.

Hátránya a módszernek, hogy

1. Nem minden esetben alkalmazható egyformán előnyösen. Pl. extrém alakú pontmezős, vagy igen erősen görbült eredményskálák esetén alkalmazása nehézkes lehet, vagy nem vezet jó eredményre.

2. Egyszerűbb esetekben (párhuzamos skálás nomogramok) kerülő utat jelent.

8. §. Kidolgozott példa

Példaként bemutatjuk a

$$\xi^3 - p\xi - q = 0$$

harmadfokú egyenlet nomogramjának tervezési fázisait. Előírt skálaterjedelem: $0 \leqq p \leqq 15$, $0 \leqq q \leqq 50$, $0 \leqq \xi \leqq 5$. A hiba nagyságára vonatkozó feltétel: a ξ-skálán való leolvasásnál előadódó relatív hiba legyen lehetőleg állandó. Ennek megfelelően T_1-et a $\xi = 5$, T_3-t a $\xi = 0{,}2$, T_2-t a $\xi = \sqrt{0{,}2 \cdot 5} = 1$ „közelében" vesszük fel, és a Σ' síkbeli képpontokra a $(T_1' T_3' T_2') = 1$ feltételt szabjuk.

A nomogram triviális alakja (6) szerint a következő egyenletekkel jellemezhető (homogén koordinátákban):

$$\begin{array}{ll} p \text{ skála:} & x_1 = 1, \quad x_2 = p, \quad x_3 = 0; \\ q \text{ skála:} & x_1 = 0, \quad x_2 = q, \quad x_3 = 1 \\ \xi \text{ skála:} & x_1 = \xi, \quad x_2 = \xi^3, \quad x_3 = 1. \end{array}$$

A nomogram $\mathcal{G}$ jó elrendezésű konvex burkát képező négyszög-tartomány csúcspontjai homogén koordinátákban (vesd össze: 22.a ábra):

$$\begin{array}{ll} A(0,\ 0,\ 1) & (q = 0 \text{ skálapont}), \\ B(1,\ 0,\ 0) & (p = 0 \text{ skálapont}), \\ C(0,\ 50,\ 1) & (q = 50 \text{ skálapont}), \\ D(1,\ 15,\ 0) & (p = 15 \text{ skálapont}). \end{array}$$

A t egyenes és a T_1, T_2, T_3 pontok megválasztásával igen nagy körültekintéssel kell eljárni, tekintettel arra, hogy a ξ-tartó erősen eltér az egyenestől. Ezért előzetes becslést végzünk a végleges nomogram alakjára nézve, hogy ezáltal a T pontoknak a végleges nomogramon a ξ skálához való közelségét becsülni tudjuk.

A T_1, T_2, T_3, W pontok koordinátái az Σ síkon legyenek rendre (x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_3), (x_w, y_w). Akkor

$$(y_1\, y_3\, y_2) \gg 1$$

alapján $(y_1 y_3 y_2 y_w) \approx -1$ figyelembevételével becslésszerűen

$$y_w \approx -1.$$

Másrészt egyenlőtlenségünk alapján a t egyenesnek sokkal pontosabban kell közelítenie az R_3 és R_2 pontokat, mint R_1-et. Ebből következík, hogy

$$0 < x_w \leqq 1.$$

Tekintettel arra, hogy w nem metszheti a konvex burkot, a q-skála tartójának végtelen távoli pontja egy olyan $\overline{W}$ pont képe lesz, melyre

$$-1 \leqq y_{\overline{w}} \leqq 0.$$

Ebből már következik, hogy a $q = 1$ pont legfeljebb olyan közel lesz a $q = 0$ ponthoz, mint a $q = \infty$, $p = \infty$ ponthoz, azaz a p és q tartók F' metszéspontjához. A $q = 50$ és $q = \infty$ távolsága igen kicsire adódik w bármilyen választásánál.

Könnyen belátható, hogy a q skálán a C' pont közelében fekvő pontok esetén a leolvasásnál fellépő éles metszések csak úgy kerülhetők el, ha a D' pont szintén igen közel fekszik F'-hez. Azaz, a nomogram ,,háromszög-alakú'' lesz. Figyelembe véve, hogy az éles metszések miatt az F' pont közelében nagyobb leolvasási hiba várható, mint egyebütt, ügyelnünk kell a ξ skála pontjainak a t egyenes pontjaival való jó megközelítésére: előnyben részesítjük a $\xi = 5$ és $\xi = 1$ pontokat, hogy ezáltal a 7. §. utolsó példájában mondottak értelmében t centrális helyzetének biztosításával ezt a ξ skála felső szakaszára is elérjük. Ezért a következő pontokat választjuk:

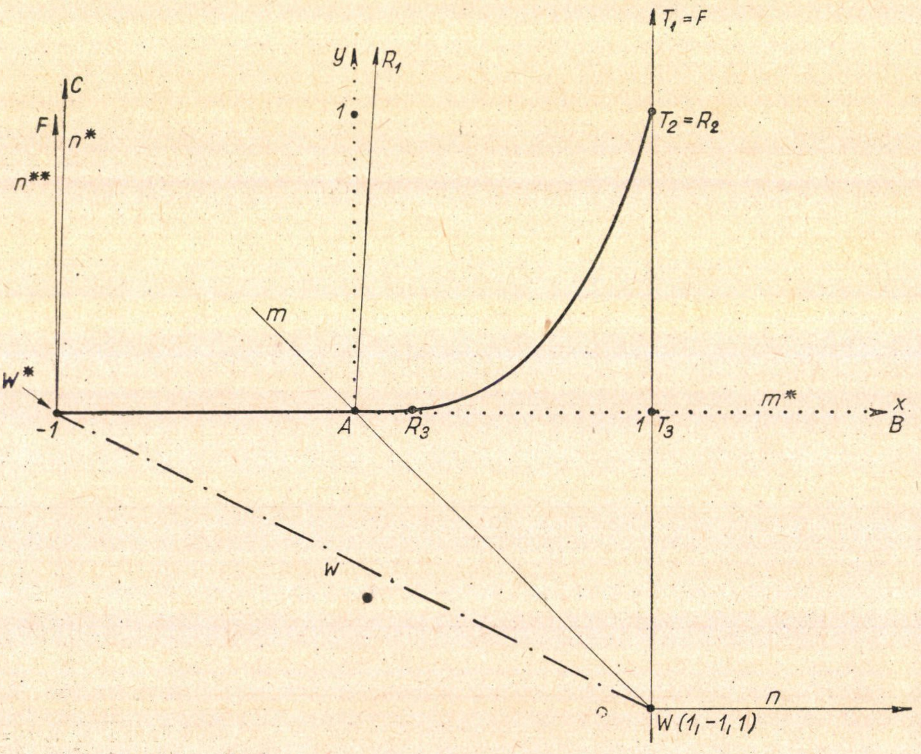
Minthogy a $\xi = 5$ pont a végleges nomogramon F-hez nagyon közel esik, a számítás egyszerűsítése érdekében választható az F pont T_1, azaz a $\xi = 5$ helyett. Egyszerűség kedvéért T_3 legyen a rögzített t egyenes és AC metszéspontja:

$$T_3\,(1, 0, 1).$$

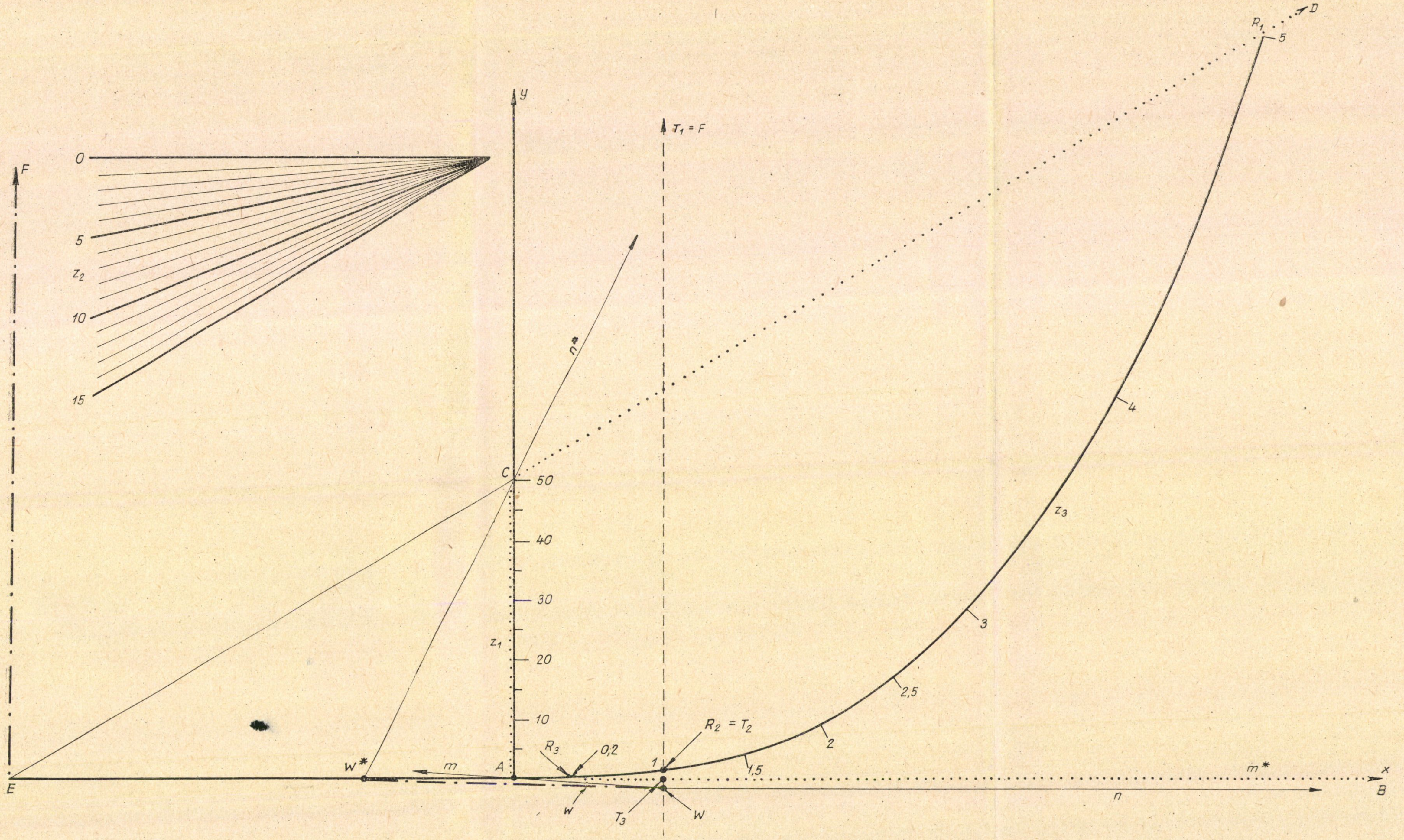
W koordinátáit kiszámíthatjuk a

$$(T_1 T_3 T_2 W) = -1$$

feltétel alapján. Ennek alapján a W pont koordinátái $(-1, 1, 1)$. (22.b ábra)



22.b ábra


y
$T_1 = F$
D
R_1
5
F
0
5
z_2
10
15
n^*
C
50
40
30
z_1
20
10
4
z_3
3
2,5
2
1,5
$R_2 = T_2$
R_3
0,2
1
W^*
m
A
m^*
x
E
B
n
w
T_3
W

22.a ábra

A $\mathcal{G}'$ konvex burok W-hez tartozó m és n támaszegyeneseinek iránytangensei -1 és 0, t iránytangense végtelen. Legyen

$$\mu = -(m\,n\,t\,w) = 1$$

akkor ebből az egyenletből w iránytangense $-\frac{1}{2}\cdot$

Az előző § 3. pontjának megfelelően legyen $t^* = \overline{AB}$, a p és q skálatartók nagyobb „támaszközű" közös támaszegyenese, mely $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{12}$-nek is támaszegyenese. W^* a t^* és w egyenesek metszéspontja : $W^*(-1, 0, 1)$.
$\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}$-nek W^*-hoz tartozó támaszegyenesei :

$$m^* = \overline{AB},\ n^* = \overline{CW^*}$$

A számítást egyszerűsíti, ha n^* helyébe az $n^{**} = \overline{W^*F}$ egyenest írjuk. n^{**} nem támaszegyenese $\mathcal{G}$-nek, de $\mathcal{G}$-n kívül halad és tekintetbe véve w helyzetét, látható, hogy $n^{**\prime}$-nek $\mathcal{G}'$ határától való legkisebb távolsága kicsi a nomogram méreteihez képest.

A leképezési feladatot tehát a következő feladatra vezettük vissza : Az $m\,m^*\,n\,n^{**}$ egyenesek által határolt, az $(1, 1, 1)$ pontot belsejében tartalmazó konvex négyszögtartományt téglalapra képezzük le, melynek párhuzamos oldalpárjai: $m' = \overline{A'B'}$ és n', hosszuk a, továbbá $m^{*\prime}$ és n, hosszuk b (24. ábra).

A Σ síkban felvett derékszögű koordináta-rendszer x'-tengelye legyen a t^* egyenes, y-tengelye (miután a $t^{*\prime}$ és t' egyeneseket az előző §-ban ismertetett előírás szerint egymásra merőlegeseknek vesszük fel). Akkor az $A'B'$ $F =$ $= T'$, T'_3 pontok derékszögű koordinátái

$$A'\left(-\frac{a}{2},\ 0\right),\quad B'\left(+\frac{a}{2},\ 0\right),\quad T'_1(0, b),\ T'_3(0, 0)$$

Továbbá : T'_2 a $\overline{T'_1T'_3}$ szakasz felezőpontja : $T'_2\left(0, \frac{b}{2}\right)$.

Az N' nomogram pontjainak megszerkesztése. Az mm^*nn^{**} négyoldal n^{**} oldalára esik a p és q skálák tartóinak és a t egyenesnek T_1 metszéspontja. T'_1, A' és B' ismeretében a nomogram két egyenes skálájának tartója megrajzolható. Adva van tehát a szerkesztéshez az ABT_1 koordináta-háromszög és a T_2 egységpont képével együtt. Ennek alapján a leképezést egyszerűen végezhetjük el.

A $p = 1$ skálapont képét az $\overline{A'T'_2}$ és $\overline{B'F'}$ egyenesek metszéspontja, a $q = 1$ skálapont képét a $B'T'_2$ és $\overline{A'F'}$ egyenesek metszéspontja adja.

Ismeretes ezenkívül a $p = 0$ skálapont (B'), a $p = \infty$ (F'), $q = 0\,(A')$, $q = \infty$ (F') skálapontok.

Σ-ban a p és q skála egyenletes skálák projektív képei, ennélfogva pontjaik megszerkeszthetők, ha ismeretes három skálapont helyzete. A szerkesztés menete látható a 23. ábrán.

A ξ-skála bekalibrálásával készíthető el a Σ' síkon. Tetszés szerinti $\xi = \xi_1$ értékhez tartozó X pont koordinátái Σ-ban $(\xi_1, \xi_1^3, 1)$. Ennélfogva $\overline{AX}$ a (Σ-ban a végtelen távoli egyenesen elhelyezett) p skálán a $p = \xi_1^2$

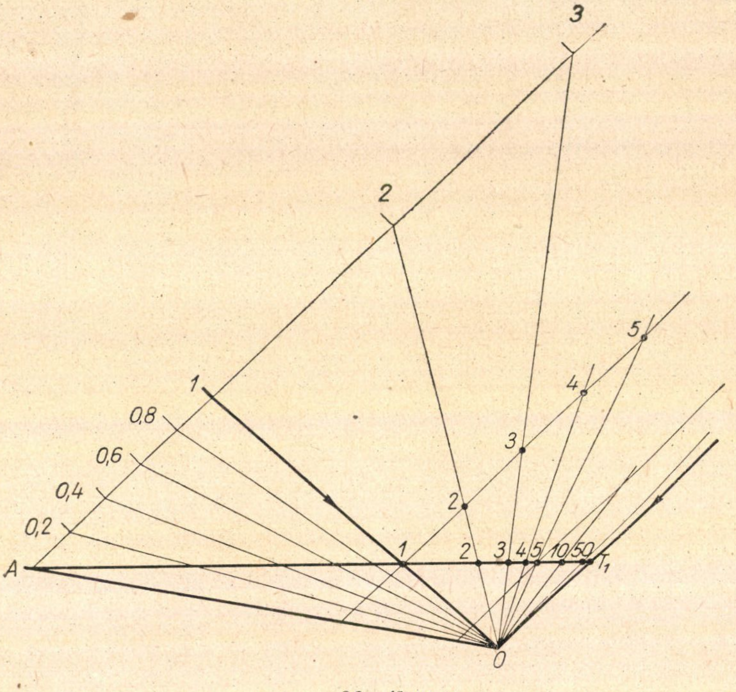
pontot, viszont $\overline{BX}$ a q skálán a $q = \xi_1^3$ értéket metszi ki. Ebből a Σ'-síkbeli ξ-skálának az adott ξ_1 értékhez tartozó X' pontja nyomban adódik.

A projektív transzformáció analitikus geometriai meghatározása. A projektív transzformáció egyenleteinek megállapításához vegyük fel a Σ' síkban az (x', y') koordináta-rendszert most oly módon, hogy az y' tengely a q skálával ($A'C'$ egyenes), az x' tengely pedig az $A'B'$ egyenessel essék egybe. Tehát (22.a ábra) az 1. § szerint az ottani jelölésekkel $u = \overline{AB}$, $v = \overline{AC}, w = \overline{EW}$;

u egyenlete $U \equiv y = 0$,

v egyenlete $V \equiv x - 1 = 0$,

w egyenlete $W \equiv x + 2y - 1 = 0$.

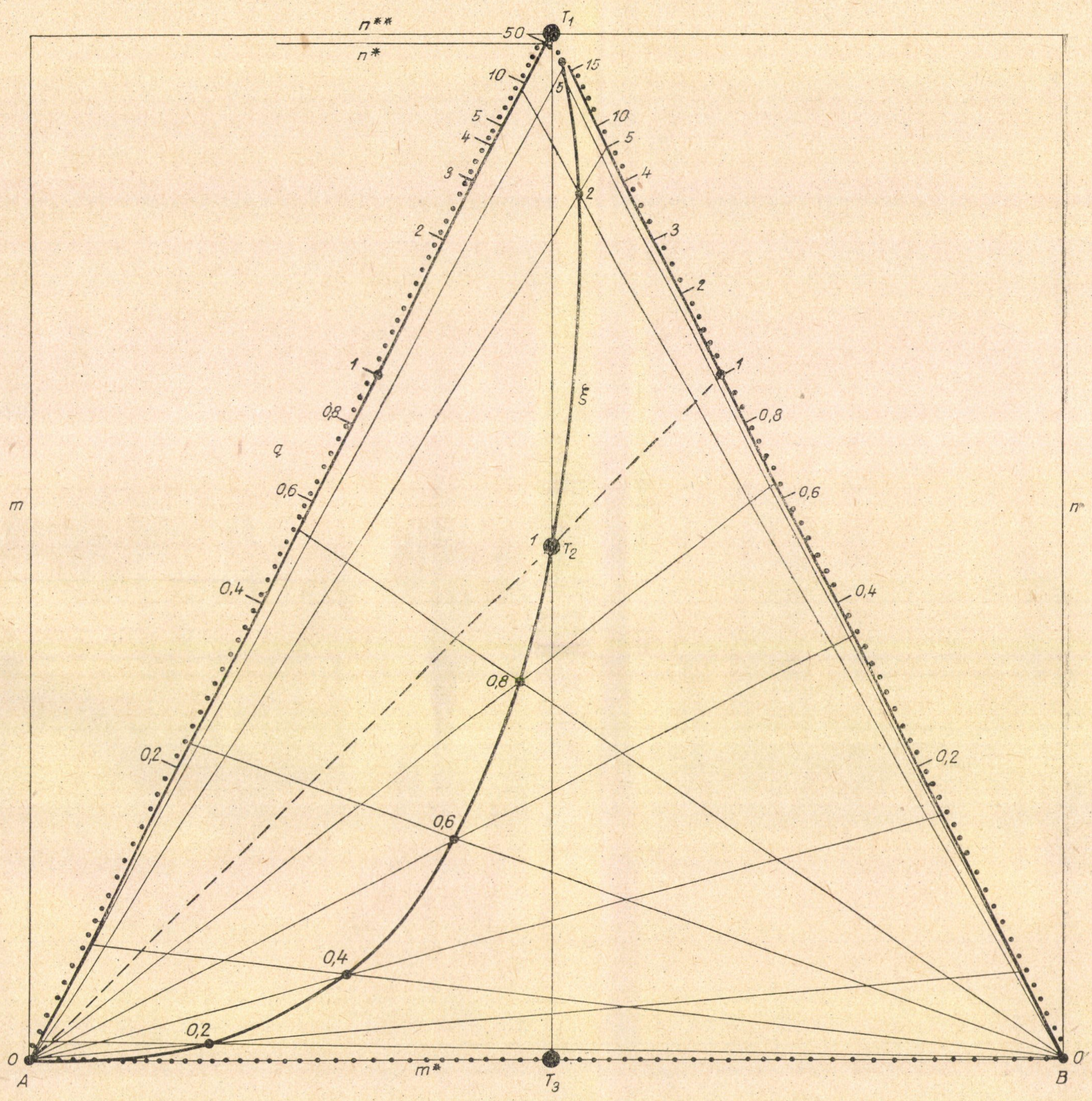


23. ábra

A (2) egyenletek alapján tehát a transzformációs képletek:

$$x' = \alpha \frac{x - 1}{x + 2y + 1} \left(= \alpha \frac{x_1 - x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \right),$$

$$y' = \beta \frac{y}{x + 2y + 1} \left(= \beta \frac{x_2}{x_1 + 2x_2 + x_3} \right).$$



n**
n*
50
T1
10
5
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
15
10
5
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
ξ
q
m
n
T2
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0'
A
B
m*
T3

24. ábra

Helyettesítsük be a

$$B(1, 0, 0) - B'\left(\frac{a}{2}, 0\right),$$

$$T_1(0, 1, 0) - T_1'(0, b)$$

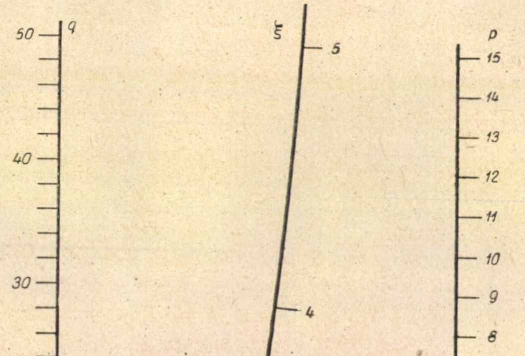
összetartozó pontpárok koordinátáit. Így $\alpha = a/2$, $\beta = 2b$ adódik. Ezekkel a nomogram skáláira az alábbi képletek adódnak, melyek alapján a nomogram pontjainak koordinátái kiszámíthatók és a nomogram megrajzolható:

p skála: a $\overline{B'T_1'}$ egyenesen $y' = b\dfrac{p}{p + \frac{1}{2}}$,

q skála: a $\overline{A'T'}$ egyenesen $y' = b\dfrac{q}{q + \frac{1}{2}}$,

ξ skála: $x' = \dfrac{a}{2}\,\dfrac{\xi - 1}{2\xi^3 + \xi + 1}$, $y' = b\dfrac{2\xi^3}{2\xi^3 + \xi + 1}$.

A teljesség kedvéért megszerkesztjük a $\xi^3 - p\xi - q = 0$ egyenlet nomogramjának párhuzamos egyenestartójú kivitelét is (25. ábra).



25. ábra

$$u = \overline{AB},\ v = \overline{AC},\ w = \overline{EF},$$

u egyenletéből $\qquad U \equiv y,$

v egyenletéből $\qquad V \equiv x,$

w egyenletéből $\qquad W \equiv x + \frac{10}{3}.$

Így a nomogramot befoglaló téglalap méreteinek figyelembevételével a transzformációs képletek

$$x' = a \frac{x}{x + \frac{10}{3}}, \quad y' = \frac{b}{15} \frac{y}{x + \frac{10}{3}}.$$

*

Köszönetet mondok CZIPSZER JÁNOSnak, aki a 2. § megírásánál volt segítségemre, HAJÓS GYÖRGY akadémikusnak és BÉKÉSSY ANDRÁSnak a kézirat átnézésekor tett számos alapvető kérdést érintő megjegyzéséért, továbbá HORÁNYI ILONÁnak, SAS TIBORNÉnak és MESZLÉNYI MÁRIÁnak, akik a példák kidolgozásával és az ábrák gondos elkészítésével voltak segítségemre.

IRODALOM

[1] R. SOREAU: *Nomographie ou traité des abaques.* Paris, 1921. (II., pp. 115—118.)
[2] M. B. ПЕНТКОВСКИЙ: *Номография.* Гостехиздат, Москва — Ленинград, 1949. (pp. 24—32.)
[3] HAJÓS GY.: „A nomográfia alkalmazhatóságának határairól.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1**(1951) 268—273.

(Beérkezett: 1956. II. 15. — Átdolgozva: 1956. VI. 6.)

FÜGGELÉK

A PROJEKTÍV ÉRTELEMBEN ÁLTALÁNOSÍTOTT KONVEX BURKOK SZÁMÁRÓL

CZIPSZER JÁNOS

1. §.

Segédtétel. Legyen $\mathcal{H}$ egy zárt halmaz a projektív síkon. Két különböző, $\mathcal{H}$-ra nézve külső e és f egyeneshez akkor és csak akkor tartozik ugyanaz a konvex burok, ha $\mathcal{H}$ teljesen az e és f egyenesek által meghatározott egyik, Ω_1 vagy Ω_2 szögtérben fekszik.