$$u = \overline{AB},\ v = \overline{AC},\ w = \overline{EF},$$

u egyenletéből $\quad U \equiv y,$

v egyenletéből $\quad V \equiv x,$

w egyenletéből $\quad W \equiv x + \frac{10}{3}.$

Így a nomogramot befoglaló téglalap méreteinek figyelembevételével a transzformációs képletek

$$x' = a\frac{x}{x+\frac{10}{3}},\quad y' = \frac{b}{15}\,\frac{y}{x+\frac{10}{3}}.$$

*

Köszönetet mondok CZIPSZER JÁNOSnak, aki a 2. § megírásánál volt segítségemre, HAJÓS GYÖRGY akadémikusnak és BÉKÉSSY ANDRÁSnak a kézirat átnézésekor tett számos alapvető kérdést érintő megjegyzéséért, továbbá HORÁNYI ILONÁnak, SAS TIBORNÉnak és MESZLÉNYI MÁRIÁnak, akik a példák kidolgozásával és az ábrák gondos elkészítésével voltak segítségemre.

IRODALOM

[1] R. SOREAU: *Nomographie ou traité des abaques.* Paris, 1921. (II., pp. 115—118.)

[2] M. B. ПЕНТКОВСКИЙ: *Номография.* Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949. (pp. 24—32.)

[3] HAJÓS GY.: „A nomográfia alkalmazhatóságának határairól." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1**(1951) 268—273.

(Beérkezett: 1956. II. 15. — Átdolgozva: 1956. VI. 6.)

FÜGGELÉK

A PROJEKTÍV ÉRTELEMBEN ÁLTALÁNOSÍTOTT KONVEX BURKOK SZÁMÁRÓL

CZIPSZER JÁNOS

1. §.

Segédtétel. Legyen $\mathcal{H}$ egy zárt halmaz a projektív síkon. Két különböző, $\mathcal{H}$-ra nézve külső e és f egyeneshez akkor és csak akkor tartozik ugyanaz a konvex burok, ha $\mathcal{H}$ teljesen az e és f egyenesek által meghatározott egyik, Ω_1 vagy Ω_2 szögtérben fekszik.

Bizonyítás: Jelöljük $\mathcal{G}_e$-vel és $\mathcal{G}_f$-fel az e, illetve az f egyeneshez tartozó konvex burkot. Ha $\mathcal{G}_e = \mathcal{G}_f$, akkor $\mathcal{G}_e$-nek sem e-vel, sem f-fel nincs közös pontja, s így $\mathcal{G}_e$ és vele együtt $\mathcal{H}$ is teljesen Ω_1-be vagy Ω_2-be esik.

Ha $\mathcal{H}$ Ω_1-be esik, akkor — e-t végtelen távoli egyenesnek tekintve — ez azt jelenti, hogy a korlátos $\mathcal{H}$ halmaz f egyik oldalán fekszik, s így az ő közönséges értelemben vett konvex burkának, G_e-nek nincs f-fel közös pontja. $\mathcal{G}_f$ értelmezése alapján innen következik, hogy $\mathcal{G}_f \supset \mathcal{G}_e$. e és f felcserélésével adódik, hogy $\mathcal{G}_e \supset \mathcal{G}_f$, és így valóban $\mathcal{G}_e = \mathcal{G}_f$.

Így a $\mathcal{H}$ külsejében fekvő egyeneseket osztályokba lehet sorolni úgy, hogy két különböző egyenes csak akkor tartozzék egy osztályba, ha $\mathcal{H}$ teljesen az általuk meghatározott egyik szögtérben fekszik. Ezen osztályok számossága megegyezik $\mathcal{H}$ konvex burkainak a számosságával.

2. §.

Tetszőleges halmaz konvex burkainak számosságáról. Könnyen belátható, hogy az előzőkben említett egyenes-osztályok nyílt halmazok, azaz minden egyenessel együtt annak bizonyos egyenes-környezetét is tartalmazzák. Ámde diszjunkt nyílt (egyenes-) halmaz a projektív síkon csak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok lehet (ugyanis mindegyik tartalmaz legalább egy racionális koordinátájú egyenest), és így egy halmaz konvex burkainak a halmaza is csak legfeljebb megszámlálható.

3. §.

n pontból álló ponthalmaz konvex burkainak száma. n pontból álló ponthalmaz konvex burkainak a száma 1. § szerint megegyezik azon egyenes-osztályok számával, melyeket úgy értelmezünk, hogy két különböző egyenes különböző, vagy ugyanazon osztályba tartozik aszerint, amint a ponthalmaz pontjait elválasztják vagy sem. Így a szóban forgó konvex burkok számának meghatározása éppen duális megfelelője annak a problémának, hogy n egyenes hány tartományra osztja a projektív síkot.[6] Szemléletessége miatt inkább az utóbbi problémával foglalkozunk.

Jelentse ν_P az adott egyenesek közül a sík P pontján áthaladóknak a számát. Bármely két egyenes metszéspontját csomópontnak nevezzük. $N(n)$-nel jelöljük a tartományok számát. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

$$N(n) = \binom{n}{2} + 1 - \sum \binom{\nu_P - 1}{2}, \tag{25}$$

ahol P befutja az összes csomópontot. Formulánk $n = 1$-re nyilvánvalóan érvényes. Tegyük fel, hogy ez a formula $n = k$-ra igaz. Ha $n = k + 1$ egyenesünk van, akkor tehát közülük k-t kiválasztva, az általuk létesített tartományok $N(k)$ számára írhatjuk, hogy

$$N(k) = \binom{k}{2} + 1 - \sum \binom{\nu_P - 1}{2}.$$

[6] Az euklidesi síkra vonatkozó analóg probléma azon megszorítással, hogy bármely három egyenesnek nincs közös pontja, a megoldással együtt megtalálható H. DÖRRIE *Triumph der Mathematik* c. könyvében (66. feladatt).

Itt és a következőkben ν_p a kiválasztott k egyenesre vonatkozik. A kimaradt $(k+1)$-edik egyenest jelöljük e-vel. A jobboldali Σ nem változik, ha p nemcsak a k, hanem a $k+1$ egyenes által létesített csomópontokat is befutja, hiszen az újonnan beiktatandó pontokban $\nu_P = 1$ és így $\binom{\nu_P - 1}{2} = 0$. Csomóponton mostantól a $k+1$ egyenes által létesített csomópontok értendők. Σ'' az e egyenesen levő, Σ' a többi csomópontra vonatkozó szummációt, $N^*(n)$ (1) jobboldalát jelöli. Akkor

$$N^*(k+1) = \binom{k+1}{2} + 1 - \sum{}' \binom{\nu_P - 1}{2} - \sum{}'' \binom{\nu_P}{2} =$$

$$= N(k) + k - \Sigma'' (\nu_P - 1) = N(k) + k - \Sigma'' \nu_P + l,$$

ahol l jelenti az e-n levő csomópontok számát. Minthogy e a többi k egyenes mindegyikét egy és csak egy pontban metszi, azért

$$\Sigma'' \nu_P = k$$

és így

$$N^*(k+1) = N(k) + l$$

e azokat a tartományokat, amelyeken keresztülhalad, kettéosztja és nyilván annyi tartományon halad keresztül, ahány metszéspontja van a k egyenesből álló konfigurációval, azaz l. Tehát $N(k+1) = N(k) + l$ azaz $N^*(k+1) = N(k+1)$, s ezzel állításunkat igazoltuk.

Visszatérve az n pontból álló halmaz konvex burkainak számára, most ezt jelöljük $N(n)$-nel ; ν_p pedig jelentse a halmaznak a p egyenesen levő pontjainak számát. Akkor

$$N(n) = \binom{n}{2} + 1 - \sum \binom{\nu_p - 1}{2}, \tag{26}$$

ahol p befutja a halmaz bármely két pontja által meghatározott egyeneseket.

(Beérkezett : 1956. II. 15.)

ГРАФИЧЕСКИЙ-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПЛАНИРОВАНИЯ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК И НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С БИНАРНЫМИ ПОЛЯМИ

(С ПРИЛОЖЕНИЕМ Я. ЦИПСЭРА)

Ш. ПАЛ

Резюме

Работа ставит перед собой задачу убыстрения планирования номограмм из выравненных точек и номограмм с бинарными полями при возможно максимальном удовлетворении требований точности, требуемых практикой.

Для наиболее часто встречающихся функциональных зависимостей предлагаются за основу типовые варианты номограмм, шкалы которых очень легко могут быть определены из функциональной зависимости и уравнения которых могут быть запомнены. Исходные варианты могут содержать и бесконечно удаленные элементы (тривиальный вариант номограммы, уравнения (6), (8), (10) ; рис. 4–5).

Для проективного преобразования взятого за основу тривиального варианта номограммы, чтобы облегчить ориентировку, вводится проективное обобщение выпуклой оболочки точечного множества. (См. рис. 6—7.) Порядок шкал номограммы относительно (любой) выпуклой оболочки является проективным инвариантом. Поэтому имея в виду и ограниченность номограммы — в случае выбранного порядка шкал лишь какая-нибудь внешняя прямая выпуклой оболочки, относящейся к этому порядку, может быть преобразованна в бесконечно далекую. Для оптимального удовлетворения требований точности предъявляемых к номограмме, соединяются формулы ПЕНТКОВСКОГО [2] и ХАЁША [3], относящиеся к погрешности ответа номограммы. Используя это, определение наиболее подходящего проективного преобразования тривиального варианта номограммы производится в два этапа, соответствующие двум факторам погрешности ответа.

1. Приближая шкалу результатов номограммы прямой, простым способом определяется такие проективные преобразования этой прямой, при которых выражение — зависящее лишь от плотности шкалы и от заданной границы погрешности — приближает собственное наименьшее значение. Таким образом получаем точку опоры для выбора точки, соответствующей бесконечноудалённой точке проективного отображения.

2. Выражение обычно приближенно зависит лишь об геометрических соотношений носителей шкал (резкие разрезы, зависимость шкал, относительное расстояние шкал, относительней расположение шкал и выпуклых оболочек и т. д.). Получается требование что для окончательного номограммы значение (16) было бы миинмальиым. Для иллюстрации этого определяется оптимальныи вариант простой номограммы с тремя прямыми носителями при фиксированной относительной плотности шкалы результатов.

В случае более общих номограмм это в торое требование может быть переведено на геометрический язык с большим трудом и неопределённостью. Здесь большую помощь оказывает знание относительного расположения шкал и выпуклых оболочек, а также опыт, извлеченный из упомянутых примеров.

С помощью этого состоящего из двух последовательных шагов, метода планирования номограмм, может быть определено проективное преобразование, дающее (определенную отображением какого-нибудь полного четырех-угольника) хорошую номограмму.

Для аналитического определения проективного преобразования может быть использован очень простой, комбинированный графическо-вычислительный метод, опубликованный СОРО. [1] Упоминавшиеся до сих пор графические и вычислительные шаги требовали минимальной точности. Дело в том, что с помощью полученного преобразования, исходя из простых уравнений для шкал исходного (тривиального) варианта номограммы, непосредственно получаем уравнения для шкал окончательного варианта номограммы, точность которого практически не зависит от точности предыдущих шагов.

Для иллюстрации предлагаемого метода планирования номограмм автор строит номограмму неполного уравнения третьей степени в случае двух систем условий.

В дополнении к работе автором которой являестя Я. ЦИПСЭР, доказано что а) множества всех выпуклых оболочек любого данного множества счётно. б) Число всех выпуклых оволочек множества состоящего из n точек дается формулой (25) где ν_p ровно числу точек множества на прямой p и p пробегает все прямые соединяющие две любые точки.

EINE NUMERISCHE UND GRAPHISCHE METHODE ZUR KONSTRUKTION VON FLUCHTENTAFELN UND BINÄREN LEITERTAFELN

(MIT EINEM ANHANG VON. J. CZIPSZER)

S. PÁL

Zusammenfassung

Die Arbeit setzt sich zum Ziel, die Konstruktion von Fluchtentafeln und binären Leitertafeln ohne Koppelung zu beschleunigen, unter weitgehender Berücksichtigung der Genauigkeitsbedürfnisse der Praxis.

Es werden für die am öftesten vorkommenden funktionalen Zusammenhänge typisierte Nomogrammvarienten als Ausgangspunkt für die Konstruktion vorgeschlagen,

deren Leitern aus dem Zusammenhang leicht bestimmbar sind und deren Gleichungen sich auch leicht merken lassen. Diese Varianten können auch unendlich ferne Elemente enthalten [die „triviale" Variante, Gl. (6), (8), (10), Figur 4. und 5.].

Zur Erleichterung der Orientierung bezüglich der projektiven Transformation der Ausgangsvariante wird der Begriff der konvexen Hülle einer Punktmenge verallgemeinert (vgl. Fig. 6., 7.). Die Reihenfolge der Nomogrammskalen ist bezüglich dieser Hülle invariant gegenüber projektiven Transformationen. Daher lässt sich eine projektive Transformation angeben, die eine beliebige äussere Gerade dieser Hülle in die unendlich ferne transformiert.).

Zur optimalen Befriedigung der Genauigkeitsansprüche werden die Formeln über die Ablesungsungenauigkeit von PENTKOWSKI [3] und HAJÓS [2] kombiniert. Die beste Projektion der trivialen Nomogrammvariante wird mittels dieser Formeln in zwei Schritten durchgeführt, entsprechend den zwei Faktoren des Fehlers.

1. Zuerst wird die Ergebnisskala des Nomogramms durch eine Gerade approximiert und durch ein einfaches Verfahren diejenigen Transformationen dieser Geraden bestimmt, bei welchen der Ausdruck (15), — der dem Umkehrwert des von Pentkovski Skalencharakteristik genannten Ausdruckes ähnlich aufgebaut ist, und der nur von der Dichtigkeit der Skala abhängt — seinen Minimum gut annähert. Wir erhalten dadurch eine Auskunft über dem unendlich fernen Punkt der Bildgerade entsprechendem Punkt W.

2. Der Wert des Ausdruckes (16) hängt im Allgemeinen nur von den geometrischen Eigenschaften der Skalenträger (scharfe Schnitte, Zusammenhang der Skalen, Abstand der Skalen von einander u. s. w.) ab. Es ergibt sich die Forderung, dass für den endgültigen Nomogramm der Ausdruck (16) möglichst klein sei. Zur Illustration wird die optimale Variante einer Fluchtentafel mit drei parallelen, sowie sich in einem Punkt treffenden geraden Skalenträgern angegeben, wobei die relative Dichtigkeit der Ergebniss-Skala festgelegt ist.

Im Falle allgemeinerer Nomogramme lässt sich diese zweite Forderung in die Sprache der Geometrie nicht so leicht übersetzen. Hier leistet die Kenntnis über die Anordnung und konvexe Hülle der Skalen eine gute Hilfe. Die bei den obigen Beispielen gemachten Erfahrungen sind auch nützlich.

Bei Konstruktionsverfahren, die aus der sukzessiven Ausführung dieser beiden Schritte besteht, lässt sich die projektive Transformation, die ein gutes Nomogramm liefert, bei diesem Verfahren mit wenigen Versuchen bestimmen. Zur analytischen Bestimmung der Transformation dient ein einfaches rechnerisches und konstruierendes Verfahren, welches von SOREAU [1] publiziert wurde.

Die durchzuführenden Schritte benötigen eine geringe Genauigkeit. Mittels der erhaltenen Transformation lassen sich nämlich aus den Gleichungen der Skalen des Ausgangsnomogramms unmittelbar diejenigen des endgültigen Nomogramms bestimmen; die Genauigkeit der letzten ist praktisch unabhängig von der Genauigkeit der zwischenliegenden Schritte.

Zur Illustration wird die Konstruktion eines Nomogramm zur Bestimmung der Wurzeln der kubischen Gleichung durchgeführt (vgl. Fig. 22—26.).

In dem von JÁNOS CZIPSZER geschriebenen Anhang des Artikels findet Bestätigung, dass a) die Menge der konvexen Hüllen einer beliebigen Punktmenge höchstens abzählbar ist, und b) die Anzahl der konvexen Hüllen von n Punkten (25) angibt, wo ν_p die Anzahl der auf der Gerade p liegenden Punkte bedeutet, wenn p die Menge der durch zwei beliebige Punkte des Punktsystems gelegenen Geraden durchläuft.