AZ INVERZ MATRIX ÁLTALÁNOSÍTÁSA[1)]

EGERVÁRY JENŐ

Jelölések

$a, b, \ldots\ldots\ldots$ oszlopvektorok

$a^*, b^*, \ldots\ldots$ sorvektorok

$\underset{n,m}{\mathbf{A}}, \underset{n,m}{\mathbf{B}}, \ldots\ldots$ n sort és m oszlopot tartalmazó, „álló" téglalapalakú matrixok ($n \geq m$)

$\underset{n,m}{\mathbf{A}^*}, \underset{n,m}{\mathbf{B}^*}, \ldots$ n sort és m oszlopot tartalmazó, „fekvő" téglalap alakú matrixok ($n \leq m$)

$\overset{r}{\underset{n,m}{\mathbf{A}}}, \overset{r}{\underset{n,m}{\mathbf{B}}}, \ldots$ $n \times m$-edrendű és r-edrangu matrixok

$\varrho(\mathbf{A}) \ldots\ldots\ldots$ az $\mathbf{A}$ matrix rangja

$|\mathbf{A}| \ldots\ldots\ldots$ az $\mathbf{A}$ matrix determinánsa

$\mathbf{E} \ldots\ldots\ldots$ egységmatrix

Tudvalevő, hogy általában csak kvadratikus, nemszinguláris matrixok inverzéről szokás beszélni. (A matrix elemei valós vagy komplex számok.) Az $\mathbf{A}$ matrix inverzét az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E}$$

egyenletek definiálják, s mint ismeretes, az inverz matrix létezésének szükséges és elégséges feltétele : $|\mathbf{A}| \neq 0$. Felvetődik mármost a kérdés, miképpen lehet az inverz matrix fogalmát kiterjeszteni tetszőleges (téglalapalakú) matrixokra. Jelen dolgozat célja, hogy egyrészt röviden ismertesse az erre vonatkozó már ismert eredményeket, másrészt egy, az invertálandó matrix bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárást adjon az általánosított inverz kizárólag racionális műveletek segítségével történő explicit előállítására.

[1)] Jelen dolgozat a szerzőnek a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében 1956. június 26-án elhangzott előadását tartalmazza. A dolgozat anyagának sajtó alá rendezésénél jelentős segítséget nyújtott RÓZSA PÁL, melyért a szerző e helyen is köszönetet mond.

Az inverz matrix fogalmának téglalapalakú matrixokra való általánosításával kapcsolatban meg kell különböztetnünk egymástól a „fekvő", illetve „álló" téglalapalakú matrixokat. Az előbbit jelölje $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$, az utóbbit $\underset{n,r}{\mathbf{C}}$. Ha $\varrho(\mathbf{B}^*) = r$, illetve $\varrho(\mathbf{C}) = r$, vagyis $\mathbf{B}^*$ sorvektorai, illetve $\mathbf{C}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor beszélhetünk $\mathbf{B}^*$ *jobboldali*, illetve $\mathbf{C}$ *baloldali* inverzéről. Ezeken olyan $\underset{n,r}{\mathbf{X}}$, illetve $\underset{r,n}{\mathbf{Y}^*}$ típusú matrixokat értünk, amelyek eleget tesznek az alábbi összefüggéseknek:

$$(1)\qquad \boxed{\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}}\;\boxed{\underset{n\,r}{\mathbf{X}}} = \boxed{\underset{r,r}{\mathbf{E}}}$$

$$\boxed{\underset{r,n}{\mathbf{Y}^*}}\;\boxed{\underset{n,r}{\mathbf{C}}} = \boxed{\underset{r,r}{\mathbf{E}}}$$

Az ily módon értelmezett inverz azonban — a kvadratikus matrix inverzével ellentétben — nem egyértelmű. Az irodalomban találhatók törekvések arra vonatkozóan, hogy az egyoldali inverzet valami módon egyértelművé tegyék. A. Bjerhammar [1] azt a módszert ajánlja, hogy az invertálandó $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ matrixot egy megfelelően választott $\underset{n-r,n}{\mathbf{C}^*}$ matrixszal egészítsük ki n-edrendű nem-szinguláris kvadratikus matrixszá. Legyen egyik ilyen kiegészítő matrix $\mathbf{C}_1^*$. Az ily módon kiegészített matrix reciprokát az alábbi azonosság definiálja:

$$\begin{bmatrix} \underset{r,n}{\mathbf{B}^*} \\ \underset{n-r,n}{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{n,r}{\mathbf{X}} & \underset{n,n-r}{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{r,r}{\mathbf{E}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \underset{n-r,n-r}{\mathbf{E}} \end{bmatrix}.$$

Az itt szereplő $\underset{n,r}{\mathbf{X}}$ matrix valóban eleget tesz a

$$\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\,\underset{n,r}{\mathbf{X}} = \underset{r,r}{\mathbf{E}}$$

összefüggésnek. A következőkben megvizsgáljuk,[2] hogyan változik $\mathbf{B}^*$ inverze, ha az őt kiegészítő $\mathbf{C}_1^*$ matrixot egy alkalmas $\mathbf{C}_2^*$ matrixszal helyettesítjük, Tekintsük most a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_2^* - \mathbf{C}_1^* \end{bmatrix}$$

[2] A $\mathbf{B}^*$ inverze és a kiegészítő $\mathbf{C}^*$ közti összefüggés megállapítása Rózsa Páltól származik.

matrix reciprokát. Könnyen belátható, hogy az, a már ismertnek tekintett $[\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]$ inverz blokkjainak a segítségével a következő patricionált alakban írható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{X} - \mathbf{Y}(\mathbf{C}_2^*\mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{C}_2^*\mathbf{X})\ ,\quad \mathbf{Y}(\mathbf{C}_2^*\mathbf{Y})^{-1}]$$

Innen kiolvasható, hogy ha a $\mathbf{C}_1^*$ és $\mathbf{C}_2^*$ matrixok bázisa közös, vagyis sorvektoraik ugyanazt a lineáris teret feszítik fel, akkor hozzájuk a $\mathbf{B}^*$ matrixnak ugyanaz az $\mathbf{X}$ inverze tartozik, különböző bázisúakhoz azonban különböző inverzek.

Az egyoldali inverzre kínálkozik egy geometriai meggondoláson alapuló megszerkesztési mód is. Ha az invertálandó $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ matrix r-edrangú, akkor minden, erre nem perpendikuláris r-dimenziós térben egy és csakis egy olyan vektorrendszer van, amelynek a matrixa $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ jobboldali inverze. Induljunk ki ugyanis egy tetszőleges $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ matrixból, amely csupán a $|\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\underset{n,r}{\mathbf{M}}| \neq 0$ összefüggésnek tesz eleget, vagyis $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ oszlopvektor-tere nem perpendikuláris $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ sorvektor-terére (vagy másképpen: az $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ matrix oszlopvektorai által meghatározott hipersík nem merőleges a $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ sorvektorai által jellemzett hipersíkra). Bebizonyítjuk a következő tételt.

1. tétel: *Az r-edrangú* $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ *matrixnak minden olyan r-dimenziós hipersíkban, amely a* $\underset{n,r}{\mathbf{B}}$ *sorvektorai által felfeszített hipersíkra nem perpendikuláris, egy és csakis egy jobboldali inverze van. Ha ezt a hipersíkot az* $\mathbf{M}$ *matrix oszlopvektorai feszítik fel, akkor az ezen hipersík által egyértelműen meghatározott jobboldali inverz*

$$\underset{n,r}{\mathbf{X}} = \underset{n,r}{\mathbf{M}}\,(\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\,\underset{n,r}{\mathbf{M}})^{-1} \tag{2}$$

alakban állítható elő.

Az, hogy (2) jobboldali inverz, triviálisan következik a

$$\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\{\underset{n,r}{\mathbf{M}}\,(\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\,\underset{n,r}{\mathbf{M}})^{-1}\} = \underset{r,r}{\mathbf{E}}$$

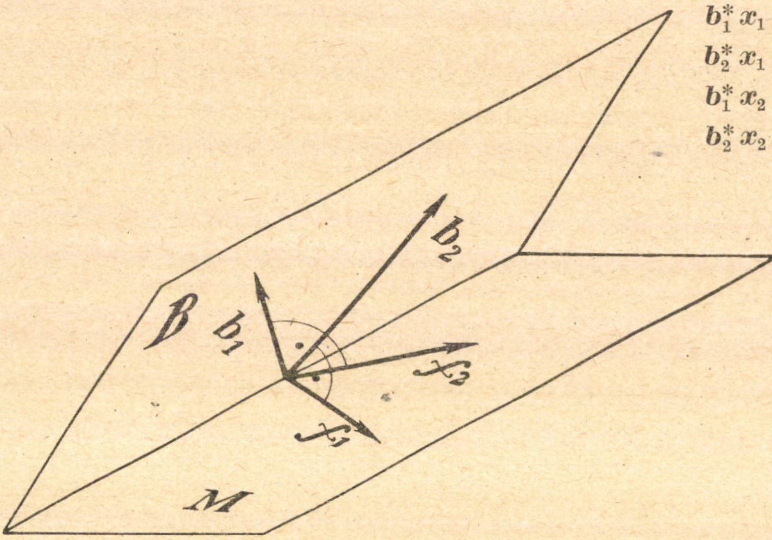
azonosságból. Továbbá az, hogy több inverz az $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ hipersíkban nincs, következik onnan, hogy $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ valamennyi többi oszlopbázisa $\underset{n,r}{\mathbf{M}}\,\underset{r,r}{\mathbf{T}}$ alakban állítható elő, ahol $|\mathbf{T}| \neq 0$, és

$$\underset{n,r}{\mathbf{X}} = \underset{n,r}{\mathbf{M}}\,\underset{r,r}{\mathbf{T}}(\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\,\underset{n,r}{\mathbf{M}}\,\underset{r,r}{\mathbf{T}})^{-1} = \underset{n,r}{\mathbf{M}}\,(\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}\,\underset{n,r}{\mathbf{M}})^{-1}$$

nem függ a $\underset{r,r}{\mathbf{T}}$ matrixtól.

A kapott eredmény geometriailag a következőképpen interpretálható: $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ lineárisan független $\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_r^*$ sorvektorai kifeszítenek egy r-dimenziós hipersíkot. Egy erre nem perpendikuláris, de egyébként tetszőleges

— az $\underset{n,r}{\mathbf{M}}$ matrix oszlopai által meghatározott r-dimenziós hipersíkban keresünk olyan $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ vektorokat, amelyek eleget tesznek a $\boldsymbol{b}_i^* \boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$ összefüggésnek. Az így nyert $\underset{n,r}{\mathbf{X}} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r]$ matrix az adott $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ jobboldali inverze. A mondottak illusztrálására szolgáljon az 1. ábra, amely a $\boldsymbol{b}_1^*$ és $\boldsymbol{b}_2^*$ vektorok által kifeszített $\mathbf{B}^*$ síkra nem merőleges $\mathbf{M}$ síkban szemlélteti a fenti követelményeket kielégítő $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{x}_2$ vektorokat:



$$\boldsymbol{b}_1^* \boldsymbol{x}_1 = 1$$
$$\boldsymbol{b}_2^* \boldsymbol{x}_1 = 0$$
$$\boldsymbol{b}_1^* \boldsymbol{x}_2 = 0$$
$$\boldsymbol{b}_2^* \boldsymbol{x}_2 = 1$$

Az eddigiekben feltételeztük, hogy az invertálandó $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ matrix sorai lineárisan függetlenek, azaz $\underset{r,n}{\mathbf{B}^*}$ rangja r. Ekkor, mint láttuk, létezik jobboldali inverz. Ennek megfelelően a $\underset{n,r}{\mathbf{C}}$ matrixnak baloldali inverze létezik. Ezeket az (1) összefüggések definiálták. A nemszinguláris n-edrendű $\mathbf{A}$ matrix invertálása olyan inverzet szolgáltatott, amellyel bármelyik oldalról szorozva az $\mathbf{A}$ matrixot, az n-edrendű $\mathbf{E}$ egységmatrixot kaptuk. A következőkben azt vizsgáljuk meg, miként lehet az inverz matrix fogalmát *tetszőleges* matrixokra általánosítani. Mivel az $\mathbf{E}$ egységmatrix a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenlet egyetlen nemszinguláris megoldása, és mivel szinguláris matrixtól nem is várható, hogy az inverzével szorozva nemszinguláris matrixot adjon, tehát az általánosított invertálás vizsgálatánál *az egységmatrixnak, mint az egyetlen n-edrangú nemszinguláris projektornak a szerepét az n-dimenziós térben reáruházzuk az n-edrendű, de tetszőleges r-edrangú szinguláris projektorokra, és az általánosított invertálás esetében azt kívánjuk, hogy az adott matrix az ő inverzével bármelyik oldalról szorozva egy vele megegyező rangú projektort eredményezzen.* Ez a követelmény a fenti invertálásnál automatikusan ki van elégítve. A (2) összefüggés felhasználásával ugyanis

$$\mathbf{M}(\mathbf{B}^*\mathbf{M})^{-1}\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{M}(\mathbf{B}^*\mathbf{M})^{-1}\mathbf{B}^* = \mathbf{M}(\mathbf{B}^*\mathbf{M})^{-1}\mathbf{B}^*,$$

azaz

$$(\mathbf{XB}^*)^2 = \mathbf{XB}^*$$

adódik, ahol **X** jelenti az adott **B*** matrix jobboldali inverzét.

Mielőtt tetszőleges matrix inverzének a mondottak alapján történő előállítására rátérnénk, röviden rá kívánunk mutatni a projektor-matrixok néhány fontos tulajdonságára és ezek szerepére bizonyos egyenletrendszerek megoldásánál. Tekintsük a

$$\underset{n,n}{\overset{r}{\mathbf{P}}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert, amelynek együttható-matrixa r-edragu projektor. A (3) egyenletrendszer általános megoldását, mint ismeretes, a homogén egyenlet általános $\boldsymbol{x}_1$ megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris $\boldsymbol{x}_2$ megodásának összege szolgáltatja. Az előbbit a projektor-matrixok

$$\overset{r}{\mathbf{P}}\,(\mathbf{E} - \overset{n-r}{\mathbf{P}}) = 0$$

definiáló egyenenletének alapján

$$\boldsymbol{x}_1 = (\mathbf{E} - \overset{n-r}{\mathbf{P}})\,\boldsymbol{t}$$

alakban kapjuk, ahol $\boldsymbol{t}$ tetszőleges elemekkel bíró paramétervektor, $\mathbf{E} - \mathbf{P}$ pedig $(n - r)$-edrangú projektor-matrix. Ugyanis, mivel összeg rangja nem nagyobb az egyes tagok rangjainak összegénél,

$$\varrho(\mathbf{E}) = n \leqq \varrho(\mathbf{P}) + \varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}) ,$$

továbbá mivel két matrix szorzata csak akor lehet 0, ha rangjaik összege nem nagyobb a közös rendszámnál, azaz

$$\varrho(\mathbf{P}) + \varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \leqq n ,$$

tehát

$$\varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = n - r .$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását pedig, mivel $\mathbf{PP}\boldsymbol{x} = \mathbf{P}\boldsymbol{x}$, továbbá $\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ miatt

$$\mathbf{P}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} , \tag{4}$$

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$ szolgáltatja, a (4) egyenlet pedig egyúttal az egyenletrendszer megoldhatóságát biztosító kompatibilitási feltétel. A (3) egyenlet megoldását tehát — a (4) összefüggés teljesülése esetén —

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\,\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}$$

alakban nyerjük.

Térjünk most vissza eredeti feladatunkhoz: meghatározzuk tetszőleges r-edrangú matrix inverzét, annak a követelménynek a kihasználásával, hogy ha az adott matrixot bármelyik oldalról megszorozzuk az inverzével, r-edrangú (szinguláris) projektort kapunk. Az inverz matrixnak racionális műveletekkel való explicit előállítása az adott matrix bázisfaktorokra való bontása ([2], [3]) által válik lehetővé. Bármely matrix ugyanis — lényegében — egyértelműen felbontható olyan két tényező szorzatára, amelyek közül a baloldali balról, a jobboldali pedig jobbról invertálható. Az általánosított inverz matrix előállítására érvényes a következő tétel:

2. tétel: *Ha az adott r-edrangú* $\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}$ *matrix bázisfaktorokra bontott alakja:*

$$\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}} = \underset{n,r}{\overset{r}{\mathbf{A}_1}}\ \underset{r,m}{\overset{r}{\mathbf{A}_2^*}} \tag{5}$$

akkor az

$$\left(\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\ \underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}\right)^2 = \underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\ \underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}, \tag{6}$$

illetve

$$\left(\underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}\ \underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\right)^2 = \underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}\ \underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}} \tag{6'}$$

összefüggéssel definiált r-edrangú $\mathbf{X}$ *inverz matrix*

$$\underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}} = \underset{m,r}{\mathbf{Q}}\ (\underset{r,m}{\mathbf{A}_2^*}\ \underset{m,r}{\mathbf{Q}})^{-1}(\underset{r,n}{\mathbf{P}^*}\ \underset{n,r}{\mathbf{A}_1})^{-1}\underset{r,n}{\mathbf{P}^*} = \underset{m,r}{\mathbf{Q}}\ (\underset{r,n}{\mathbf{P}^*}\ \underset{n,m}{\mathbf{A}}\ \underset{m,r}{\mathbf{Q}})^{-1}\underset{r,n}{\mathbf{P}^*} \tag{7}$$

alakban állítható elő, ahol $\mathbf{Q}$ *és* $\mathbf{P}^*$ *tetszőleges, csupán az* $|\mathbf{A}_2^*\mathbf{Q}| \neq 0$, $|\mathbf{P}^*\mathbf{A}_1| \neq 0$ *feltételeket kielégítő matrix.*

Bizonyítás:

Legyen a keresett $\underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}$ inverz matrix bázisfaktorokra bontott alakja

$$\underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}} = \underset{m,r}{\overset{r}{\mathbf{X}_1}}\ \underset{r,n}{\overset{r}{\mathbf{X}_2^*}}\,. \tag{8}$$

Ekkor az (5) és (8) összefüggéseket behelyettesítve (6)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^*\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^* = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^*\,.$$

Tekintettel arra, hogy $\underset{n,r}{\overset{r}{\mathbf{A}_1}}$ oszlopai és $\underset{r,n}{\mathbf{X}_2^*}$ sorai lineárisan független vektorok, tehát $\underset{n,r}{\overset{r}{\mathbf{A}_1}}$ balról, $\underset{r,n}{\overset{r}{\mathbf{X}_2^*}}$ pedig jobbról invertálható,

$$(\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2^*\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1) = \mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1 \tag{9}$$

adódik. Hasonlóképpen, ha a (6') definiáló egyenletből indulunk ki, az

$$(\mathbf{X}_2^*\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2^*\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2^*\mathbf{A}_1) = \mathbf{X}_2^*\mathbf{A}_1 \tag{9'}$$

összefüggésre jutunk. Mivel továbbá $\mathbf{A}_2^* \mathbf{X}_1$, valamint $\mathbf{X}_2^* \mathbf{A}_1$ r-edrendű nemszinguláris kvadratikus matrixok, tehát a (9) és (9′) összefüggésekből

$$\left(\overset{r}{\underset{r,n}{\mathbf{X}_2^*}}\ \overset{r}{\underset{n,r}{\mathbf{A}_1}}\right)\left(\overset{r}{\underset{r,m}{\mathbf{A}_2^*}}\ \overset{r}{\underset{m,r}{\mathbf{X}_1}}\right) = \underset{r,r}{\mathbf{E}}$$

adódik.

Legyen

$$\overset{r}{\underset{r,n}{\mathbf{X}_2^*}}\ \overset{r}{\underset{n,r}{\mathbf{A}_1}} = \overset{r}{\underset{r,r}{\mathbf{T}}} \quad \text{és} \quad \overset{r}{\underset{r,m}{\mathbf{A}_2^*}}\ \overset{r}{\underset{m,r}{\mathbf{X}_1}} = \overset{r}{\underset{r,r}{\mathbf{T}^{-1}}}\ ,$$

azaz

$$\mathbf{X}_2^* (\mathbf{A}_1 \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{E}\ , \quad \text{illetve} \quad (\mathbf{T}\mathbf{A}_2^*)\, \mathbf{X}_1 = \mathbf{E}\ ,$$

ahol $\mathbf{T}$ egyelőre ismeretlen r-edrendű nem-szinguláris kvadratikus matrix. Itt $\mathbf{X}_2^*$ mint $\mathbf{A}_1\mathbf{T}^{-1}$ baloldali, illetve $\mathbf{X}_1$ mint $\mathbf{T}\mathbf{A}_2^*$ jobboldali inverze, az 1. tétel alapján

$$\mathbf{X}_2^* = (\mathbf{P}^* \mathbf{A}_1 \mathbf{T}^{-1})^{-1} \mathbf{P}^*\ ,$$

illetve

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{Q}(\mathbf{T}\mathbf{A}_2^* \mathbf{Q})^{-1}$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{P}^*$ és $\mathbf{Q}$ tetszőleges, csupán a $|\mathbf{P}^*\mathbf{A}_1| \neq 0$, illetve $|\mathbf{A}_2^* \mathbf{Q}| \neq 0$ feltételeknek eleget tevő matrixok. Ezzel a keresett inverz matrixra a (7) kifejezést kapjuk, s mint látjuk, az inverz a $\mathbf{T}$ matrix választásától független. Legyen $\mathbf{T} = \mathbf{E}$, ekkor $\mathbf{X}_2^*$ nem más, mint $\mathbf{A}_1$ baloldali, $\mathbf{X}_1$ pedig $\mathbf{A}_2$ jobboldali inverze.

A fenti előállítás az általánosított inverzre még távolról sem ad egyértelmű megoldást, mégpedig azért nem, mert maga az egyoldali inverz — az 1. tétel értelmében — csak annyiban egyértelmű, hogy minden olyan $\mathbf{M}$ hipersíkban, amely nem perpendikuláris az adott $\mathbf{B}^*$ mátrix sorvektorai által kifeszített r-dimenziós hipersíkra, egy és csakis egy inverz létezik. Az egyoldali inverz fogalmát — és ezzel most már az általánosított inverz fogalmát is — teljesen egyértelművé tudjuk tenni, ha a fent említett $\mathbf{M}$ hipersíkot egybeejtjük az adott $\mathbf{B}$ hipersíkkal, vagyis az inverz matrixot az invertálandó matrix sajátvektor-tereiben keressük. Ebben az esetben az általánosított inverzre a (7) összefüggésből — mivel most $\mathbf{Q} = \mathbf{A}_2$ és $\mathbf{P}^* = \mathbf{A}_1^*$ — a következő kifejezést nyerjük:

(10 $$\mathbf{X} = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)^{-1} (\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1^* \mathbf{A} \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_1^*\ .$$

Az általánosított inverz matrixnak ily módon adódó speciális esete azonos azzal az R. Penrose dolgozatában [4] szereplő inverzzel, amelyhez a szerző a következő négy feltételből kiindulva jut el:

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A}\ , \qquad (\mathbf{AX})^* = \mathbf{AX}\ ,$$

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X}\ , \qquad (\mathbf{XA})^* = \mathbf{XA}\ .$$

Az idézett dolgozatban azonban az inverz matrix megszerkesztéséhez az invertálandó matrix spektrálfelbontásának az ismerete szükséges, szemben az általunk javasolt és az adott matrix bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárással, ami kizárólag racionális műveletek elvégzését teszi szükségessé.

Végül megmutatjuk, hogyan használható fel az általánosított inverzfogalom lineáris egyenletrendszerek megoldására. Legyen $\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ az adott egyenletrendszer. Tekintsük először az

$$\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\,\boldsymbol{x}_1 = 0$$

homogén egyenletet. Az inverz matrix (10) alakú előállításából közvetlenül adódik, hogy

$$\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\;\underset{m,n}{\overset{r}{\mathbf{X}}}\;\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}} = \underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}$$

(Ez az összefüggés egyébként megegyezik R. PENROSE [4] dolgozatában szereplő első feltétellel.) Ugyanezt

$$\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}}\left(\overbrace{\underset{m,m}{\mathbf{E}} - \underset{m,n}{\mathbf{X}}\;\underset{n,m}{\mathbf{A}}}^{m-r}\right)$$

alakban is felírhatjuk, és mivel $\mathbf{XA}$ r-edrangú projektor, $\mathbf{E} - \mathbf{XA}$ pedig $(m - r)$-edrangú projektor, a (11) egyenlet általános megoldása

$$\boldsymbol{x}_1 = (\mathbf{E} - \mathbf{XA})\,\boldsymbol{t}\ ,$$

ahol $\boldsymbol{t}$ tetszőleges paramétervektor.

Az adott inhomogén egyenlet egy partikuláris $\boldsymbol{x}_2$ megoldását pedig, mivel $\mathbf{AXA}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, és $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ miatt

$$\mathbf{AX}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\ , \tag{12}$$

$\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{X}\boldsymbol{b}$ szolgáltatja. A (12) egyenlet egyúttal az adott egyenletrendszer megoldhatóságát biztosító kompatibilitási feltétel.

Ezzel bebizonyítottuk a tetszőleges együttható-matrixszal bíró lineáris egyenletrendszerek általános megoldásának explicit előállítására vonatkozó következő tételt:

3. tétel: *Ha* $\underset{n,m}{\overset{r}{\mathbf{A}}} = \underset{n,r}{\overset{r}{\mathbf{A}_1}}\;\underset{r,m}{\overset{r}{\mathbf{A}_2^*}}$ *az együtthatómatrix bázistényezőkre bontott alakja, akkor az általánosított inverze (a* PENROSE-*féle értelemben)*

$$\underset{m,n}{\mathbf{A}^{(-1)}} = \underset{m,r}{\mathbf{A}_2}\left(\underset{r,n}{\mathbf{A}_1^*}\;\underset{n,m}{\mathbf{A}}\;\underset{m\,r}{\mathbf{A}_2}\right)^{-1}\underset{r,n}{\mathbf{A}_1^*}.$$

Ha továbbá teljesül az

$$\mathbf{AA}^{(-1)}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

kompatibilitási feltétel, akkor az

$$\overset{r}{\underset{n,m}{\mathbf{A}}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{A})\boldsymbol{t} + \mathbf{A}^{(-1)}\boldsymbol{b}$$

kifejezés szolgáltatja, ahol $\boldsymbol{t}$ *tetszőleges elemű paramétervektor.*

IRODALOM

[1] A. Bjerhammar: „Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations." *Bulletin International Geodésique* (1951) 188–220.

[2] Egerváry J.: „Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11–32.

[3] E. Egerváry: »Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungsystemen.« *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **35** (1955) 111–118.

[4] R. Penrose: „A generalized inverse for matrices." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **51** (1955) 406–413.

ОБОБЩЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

J. EGERVÁRY

Резюме

Основная цель автора в настоящей работе дать такой способ нахождения обобщенной обратной матрицы, основанный на разложении данной матрицы на базисные множители ([2] [3]) который требует лишь рациональные действия. Из результата автора в качестве специального случая получается фигурирующая в работе [4] Penrose обобщенная обратная матрица. Работа исходит из обратимых с одной стороны матриц, для их обратных матриц дает и геометрическую интерпретацию, затем постепенно переходит к определению обобщенной обратной матрицы любой матрицы. С помощью обобщенной обратной матрицы может быть дано явное представление условия разрешимости неоднородной линейной системы уравнений и ее общего решения. К этому относится теорема 3 работы:

Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^*$ есть разложенная на базисные множители форма матрицы коэффициентов, то ее обратная (в смысле Penrose) матрица

$$\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1^* \mathbf{A} \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_1^* .$$

Если, далее, выполняется условие разрешимости

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(-1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

то общее решение неоднородной линейной системы уравнений

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

дается выражением

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{A})\,\boldsymbol{t} + \mathbf{A}^{(-1)}\boldsymbol{b} ,$$

где $\boldsymbol{t}$ любой вектор параметров.

ON A GENERALIZED INVERSE FOR MATRICES

J. EGERVÁRY

Summary

The main purpose of the author is to give a method in this paper, founded on the basic factorisation of the given matrix,([2], [3]), for the explicit calculation of the generalized inverse, which involves only rational operations. The result of the author contains the generalized inverse, occuring in the paper of R. PENROSE [4], as a special case. The author proceeds from matrices, invertable from one side, and gives a geometrical interpretation of the right or left inverse matrix, then he examines the generalized inverse of any matrix. By the aid of the generalized inverse, the condition of compatibility of a system of inhomogeneous linear equations, further its general solution may be given in explicit form. These are expressed in Theorem 3:

If $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*$ is a basic factorisation of the given matrix, then its generalized inverse (in the sense of PENROSE, and denoted by $\mathbf{A}^{(-1)}$) may be expressed explicity

$$\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}\mathbf{A}_2)^{(-1)} \mathbf{A}_1^* .$$

The system of inhomogeneous linear equations

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

is compatible if and only if

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(-1)} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

and in this case the general solution is given by

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{(-1)} \mathbf{A})\, \boldsymbol{t} + \mathbf{A}^{(-1)} \boldsymbol{b}$$

where $\boldsymbol{t}$ is a parameter-vector with arbitrary elements.