AZ ÁRRENDEZÉS PROBLÉMÁJÁRÓL

BRÓDY ANDRÁS[1] és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

Árrendszerünk különféle okok miatt (a technikai színvonal megváltozása és eltolódása, hosszantartó árrögzítés, illetőleg egyes területeken időnként végrehajtott parciális rendezés, különféle egyéb árpolitikai intézkedések stb.) nem tükrözi helyesen a népgazdaság tényleges ráfordításainak arányait. Ez, többek között, rendkívül megnehezíti a számbavétel, tervezés, gazdaságossági vizsgálat, általában a gazdasági élet felmérésének és tudatos irányításának kibontakozását is. Különösen akadályozza azonban ez a helyzet az egzakt matematikai módszerek gyakorlati alkalmazását, mivel ezek az árak reális voltát kívánják meg. Többízben felmerült már, hogy „helyesebb", „jobb" árakat kellene kialakítani, és ezen általában azt értették, hogy az árak arányosak legyenek a vállalati önköltséggel.

Kérdés azonban, hogy ha az árak egyszer már eltorzultak, eltávolodtak a tényleges önköltségtől, akkor hogyan állítható helyre az árrendszer „egyensúlya". Mert hiába térünk úgy át újabb árakra, hogy az új árak kiszámításának alapja a régi árak alkotta önköltség: mivel minden termék ára szerepet játszik egy sor másik termék önköltségében, az így kialakult árak ismét eltérnek majd az önköltségtől. (Itt ismét eltekintünk attól, hogy az árak megváltoztatása időben lejátszódó jelenség, és ebben az időben esetleg változik a technikai színvonal, a gyártott választék is stb., és csak egy adott pillanat helyzetét rögzítve vetjük fel a problémát.)

Kérdés az, hogy ez az eltérés (az új árak eltérése az önköltségtől) kisebb-e vagy nagyobb az árrendezés előtti eltéréstől, azaz, hogy ismételt árrendezésekkel eljutunk-e az önköltséget helyesen tükröző árakhoz — vagy pedig még jobban eltávolodunk tőlük.

A kérdés tárgyalásánál több egyszerűsítéssel, illetőleg absztrakcióval kell élnünk, ezek azonban a probléma lényegét nem érintik.

1° Egy termék önköltségén *átlagos* önköltségét értjük. (Tehát ha több gyárban állítják elő és különböző önköltséggel, akkor az összes önköltség és a termék mennyiségének hányadosát; ugyanígy valamilyen *időszak*

[1] A Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetének munkatársa.

átlagos önköltségét tételezzük fel. Más összefüggésekben érdekes lehet az önköltséget valószínűségi változónak tekinteni, de jelen probléma szempontjából ez nem szükséges.)

2° Feltételezzük, hogy a termék szigorúan megadott, tehát közömbös minőségű.

3° Elhanyagoljuk a kereslet és kínálat hatását az árakra, azaz feltételezzük, hogy kereslet és kínálat egyensúlyban van.

4° Az objektív értékelméletből indulunk ki, azaz feltételezzük, hogy valamely áru értéke az újratermeléséhez szükséges munkával egyenlő, tehát az előállításához felhasznált holt és eleven munka összegével.

5° A beruházások, felujítások, karbantartás, rezsi stb. megtérülését mint árszabályozó tényezőt szintén figyelembn vesszük, oly módon, hogy feltételezzük, hogy meg van adva, hogy valamely beruházásnak mennyi idő alatt kell megtérülnie.

Formailag a kérdés alábbi tárgyalása a W. Leontief (lásd pl. [1] és [2]) által bevezetett, az ekonometriai irodalomban »input-output analízis« néven ismeretes és általánosan elfogadott tárgyalásmóddal azonos, és így matematikai szempontból újszerűségre nem tarthat igényt. Arra törekedtünk azonban, hogy ezt az ismert matematikai tárgyalásmódot az árrendezés bizonyos problémáira alkalmazzuk. Ezen kivül eltérünk a szokásos tárgyalásmódtól abban, hogy feltesszük, hogy az érték munkaórában fejezhető ki.[2)]

A 2. §-ban röviden kitérünk a tervezés bizonyos problémáira is.

1. §. A szukcesszív árrendezés

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_N$ termékeknek egy olyan összessége, amely *teljes rendszert* alkot, abban az értelemben, hogy bármely A_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) termék előállításához szükséges összes más termék is szerepel az $A_1, A_2, \ldots, A_N$ termékek között. Minden terméknek definiáljuk (többé-kevésbé önkényesen) az egységnyi mennyiségét, amit a rövidség kedvéért „darab"-nak nevezünk. (1 „darab" nyersolaj lehet például 1 liter, 1 hektoliter; 1 „darab" rádiócső lehet például egy 100 csőből álló sorozat, de lehet 13,4 cső is.) Tegyük fel, hogy ismeretes, hogy egy „darab" A_i előállításához l_{ik} „darab" A_k-ra van szükség. Jelölje a_i az A_i termék „darab"-jának előállításához szükséges (bruttó) munkaórák számát, vagyis azt, hogy hány munkaóra fekszik egy darab A_i termékben, ha az előállításához szük-

2) Munkaórán különleges szakképzettséggel nem rendelkező munkás 1 órai munkája értendő (normál munkaóra). Magasabb szakképzettséget igénylő munka esetében 1 órai munka annyi normál munkaórának veendő, ahányszorosa az illető munkás órabére a normál munkát végző munkás órabérének. Ez persze feltételezi a bérrendszer reális voltát.

séges egyéb termékeket (nyersanyag, áram, szén stb.) mind munkaórára számítjuk át. Jelölje b_i azt, hogy a szóbanforgó A_i termék egy egységére mennyi esik a szóbanforgó termék gyártásához szükséges beruházásból, illetve a gépi felszerelés karbantartásából, felujításokból, rezsiből stb.; b_i kiszámitását a következőképpen képzeljük el: Minden beruházásnál megállapítható, hogy mennyi idő alatt kell megtérülnie, ezután a beruházás átszámitandó munkaórákra, és elosztandó a megtérülési idő alatt terv szerint gyártandó termékekre. A felujítás, karbantartás, rezsi stb. ugyanígy osztandó szét. Nyilvánvalóan fennállnak az

$$a_i = \sum_{i=1}^{N} l_{ik} a_k + m_i + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1}$$

egyenletek.[3] Ha bevezetjük az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$ $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ és $\mathbf{L} = [l_{ik}]$ jelöléseket (félkövér dűlt betű vektort, félkövér álló betű pedig matrixot jelöl), akkor (1) a következő alakra hozható:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{L}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}\,. \tag{1'}$$

Az (1), illetve (1') egyenletrendszer megoldása útján megállapíthatók az a_i számok. Az a_i szám egy „darab" A_i termék valódi értékének tekinthető, és így egy darab A_i termék reális ára a_i-vel arányosnak volna veendő.

Az $\mathbf{L}$ matrixról feltehető, hogy *irreducibilis*, vagyis a sorok és oszlopok átrendezésével nem hozható

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$$

alakra, ahol $\mathbf{L}_1$ és $\mathbf{L}_3$ kvadratikus matrixok, és $\mathbf{0}$ csupa 0-ból álló matrix. Ha ugyanis $\mathbf{L}$ ilyen alakra volna hozható, ahol $\mathbf{L}_1$ M-edrendű, ez azt jelentené, hogy az első M termék előállításához a többi termékre nincs szükség, tehát akkor az árrendezés céljából szorítkozhatnánk eleinte az első M termék ármeghatározására, és azután ezek reális árának (értékének) meghatározása után áttérhetnénk a többi $N - M$ termék ármeghatározására.

A jelenlegi ára egy darab A_i terméknek legyen $a_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Ha $a_i^{(0)} \neq c a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, ahol c állandó, akkor az árrendszer irreális. Reálisabbá tételére kézenfekvő a következő *szukcesszív árrendezés*: Először is meghatározzuk a c állandónak azt az értékét, amely a

$$\sum_{i=1}^{N} \left(a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} l_{ik} a_k^{(0)} - c\,(m_i + b_i) \right)^2$$

kifejezést minimummá teszi. Ennek értéke nyilván:

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} l_{ik} a_k^{(0)} \right) (m_i + b_i)}{\sum_{i=1}^{N} (m_i + b_i)^2}\,. \tag{2}$$

[3]) Az a_i és m_i számok természetesen mind pozitívak, az l_{ik} és b_i számok pedig nemnegatívak.

Legyen $\boldsymbol{m}' = c_0 \boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{b}' = c_0 \boldsymbol{b}$, ahol c_0 a (2) alatti állandó ; legyen továbbá $\boldsymbol{a}^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_N^{(0)})$, és határozzuk meg az $\boldsymbol{a}^{(1)}$ vektort az

$$\boldsymbol{a}^{(1)} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{a}^{(0)} + \boldsymbol{m}' + \boldsymbol{b}'$$

összefüggésből, és általában az $\boldsymbol{a}^{(n+1)} = (a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+1)}, \ldots, a_N^{(n+1)})$ vektort az

$$\boldsymbol{a}^{(n+1)} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{a}^{(n)} + \boldsymbol{m}' + \boldsymbol{b}' \tag{3}$$

rekurzív összefüggés alapján. A szukcesszív árrendezés akkor eredményes, ha $\boldsymbol{a}^{(n)}$ konvergál a $c_0\boldsymbol{a}$ vektorhoz, ahol $\boldsymbol{a}$ az (1) megoldása, c_0 pedig a (2) által definiált állandó. Ennek szükséges és elégséges feltétele, mint ismeretes (lásd például [3]-at vagy [4]-et), az, hogy az $\mathbf{L}$ matrix összes sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek legyenek. Egy *elégséges*, de nem szükséges feltétel az iteráció konvergenciájához az, hogy teljesüljenek a

$$\sum_{k=1}^{N} l_{ik} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{4}$$

egyenlőtlenségek.

Bár a (4) feltétel nem szükséges, az egyes termékek egységének alkalmas megválasztásával mindig el lehet érni, hogy (4) teljesüljön, ha $\mathbf{L}$ sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek. Ha ugyanis az A_i termék egységét módosítjuk és x_i ($x_i > 0$; $i = 1, 2, \ldots, N$) régi egységet veszünk egy új egységnek, az (1) egyenletrendszer a következőképpen módosul :

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik}\alpha_k + \mu_i + \beta_i\,, \tag{1''}$$

ahol $\alpha_i = x_i a_i$, azaz egy új ,,darab'' A_i valódi értéke, $\lambda_{ik} = l_{ik} x_i/x_k$, $\mu_i = x_i m_i$, azaz egy új ,,darab'' A_i előállításához szükséges nettó munka és $\beta_i = x_i b_i$. A $\Lambda = [\lambda_{ik}]$ matrix sajátértékei természetesen ugyanazok, mint az $\mathbf{L}$ matrix sajátértékei. Annak kimutatásához, hogy ha $\mathbf{L}$ sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek, akkor az x_i számokat lehet úgy választani, hogy teljesüljenek a

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

egyenlőtlenségek, szükségünk van Frobenius következő tételére (lásd : [5]) : *Egy irreducibilis nemnegatív matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékei között van egy pozitív sajátérték, amelynek megfelelő sajátvektor koordinátái mind pozitívak.* A tételt a mi esetünkben alkalmazhatjuk, mivel az $\mathbf{L}$ matrix irreducibilis és nemnegatív.

Ha ez a pozitív sajátérték ϱ_1, és a hozzátartozó sajátvektor $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$, akkor tehát

$$\varrho_1 z_i = \sum_{k=1}^{N} l_{ik} z_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)\,, \tag{5}$$

és így, ha x_k-nak az $x_k = z_k$ értéket választjuk,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik} = \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) . \tag{6}$$

Ha tehát **L** sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek, az egyes termékek egységének alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy a módosított **L**-matrix: a Λ matrix sorösszegei mind 1-nél kisebbek legyenek (sőt, még azt is, hogy mind egyenlők legyenek egymással és a ϱ_1 sajátértékkel).

A (4) *elégséges* feltétel tehát az egységek alkalmas megválasztása mellett *szükséges* is a szukcesszív árrendezés konvergenciájához.

Ha a termelési folyamat *rentábilis*, akkor nyilván az (1) egyenletrendszernek van csupa pozitív számból álló megoldása. Ki fogjuk mutatni, hogy ez esetben $\varrho_1 < 1$, vagyis a szukcesszív árrendezés mindig konvergál. E célból feltehetjük, hogy az egységeket már úgy választottuk meg, hogy (5) és (6) teljesül, vagyis egyenletrendszerünk

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik} \alpha_k + \mu_i + \beta_i \tag{1'''}$$

alakú, ahol

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik} = \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) . \tag{6'}$$

Legyen az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ pozitív számok közül α_{i_0} a minimális; nem jelenti az általánosság megszorítását, ha feltesszük, hogy $i_0 = 1$. Ez esetben (1'')-ből

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{1k} \alpha_k + \mu_1 \beta_1 \geqq \alpha_1 \sum_{k=1}^{N} \lambda_{1k} + \mu_1 \beta_1 = \alpha_1 \varrho_1 + \mu_1 \beta_1 ,$$

és így $\alpha_1 (1 - \varrho_1) \geqq \mu_1 \beta_1 > 0$. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $\varrho_1 < 1$, mivel $\alpha_1 > 0$. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. A szukcesszív árrendezés tehát mindig konvergál.

Más kérdés persze, hogy milyen gyorsan konvergál. Minél kisebb ϱ_1, annál gyorsabb lesz a konvergencia. A konvergencia sebességét igen könnyen meg lehet becsülni. E célból be kell vezetni vektorok és matrixok normáját. Egy $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ vektor normáját többféleképpen lehet definiálni. Legcélszerűbb a következő normát választani:

$$\|\boldsymbol{y}\| = \max_{1 \leqq k \leqq N} |y_k| .$$

Ha a vektornormát így definiáljuk, akkor egy $\mathbf{D} = [d_{ik}]$ matrix normáját a következőképpen definiáljuk:

$$\|\mathbf{D}\| = \max_{1 \leqq i \leqq N} \sum_{k=1}^{N} |d_{ik}| .$$

Vektorok és matrixok normájának ilyen definíciója mellett, ha újból $\boldsymbol{a}^{(0)}$ jelöli a kezdőértékekből álló vektort, $\boldsymbol{a}^{(n)}$ az iteráció n-edik lépésében nyert vektort, $\boldsymbol{a}$ az (1′) egyenletrendszernek eleget tevő vektort, továbbá $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(n)}$, illetve α a megfelelő vektorokat abban az esetben, ha az egyes termékek egységeit úgy definiáltuk, hogy az (1″) és (6′) relációk teljesüljenek, akkor mint könnyen belátható, fennáll az

$$(7) \qquad \|\boldsymbol{a}^{(n)} - \boldsymbol{a}\| \leqq \left(\|\alpha^{(0)}\| + \frac{\|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{b}\|}{1-\|\mathbf{L}\|}\right)\|\mathbf{L}\|^n$$

egyenlőtlenség (lásd például: [4], 122. oldal). Feltéve, hogy az egységeket úgy választottuk meg, hogy az (1″) és (6′) összefüggések teljesüljenek, $\|\mathbf{L}\| = \varrho_1$, tehát (7)-ből az

$$(7') \qquad \|\alpha^{(n)} - \alpha\| \leqq \left(\|\alpha^{(0)}\| + \frac{\|\mu+\beta\|}{1-\varrho_1}\right)\varrho_1^n$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Visszatérve az $\boldsymbol{a}^{(n)}$ és $\boldsymbol{a}$ vektorokra, azt kapjuk, hogy

$$(8) \qquad \|\boldsymbol{a}^{(n)} - \boldsymbol{a}\| \leqq C\varrho_1^n ,$$

ahol a C állandó értéke a következő:

$$C = \left(\|\boldsymbol{a}^{(0)}\| + \frac{\|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{b}\|}{1-\varrho_1}\right)\frac{A}{B},$$

ahol

$$A = \max_{1\leqq k\leqq N} z_k \quad \text{és} \quad B = \min_{1\leqq k\leqq N} z_k .$$

Itt $z_1, z_2, \ldots, z_N$ a (4) egyenletrendszer megoldását jelöli.

Látjuk tehát, hogy az iteráció konvergenciájának sebességét ϱ_1 értékétől függően tudjuk megbecsülni; ha ϱ_1 kicsiny, a konvergencia igen gyors.

Rendkívül érdekes a termelési folyamat hatásfokának a fentiekből adódó megfogalmazása is, mivel rámutat a hatásfok valódi — áraktól független — mélyebb értelmezésére, és megdönti azt a nézetet, hogy minden termelési folyamat rentábilisnak tekinthető megfelelő árak mellett. A fentiek alapján könnyű ellenpéldát konstruálni: tegyük fel, nogy x KWó áram előállításához két tonna szén kell, egy tonna szén kibányászásához pedig x KWó áram. Ez a termelési folyamat semmilyen ár mellett sem rentábilis, mert akárhogy határozzuk meg az egyik termék árát, a másik termék ára mindig ennek duplája lesz — és a szukcesszív árrendezések esetén az árrendszer divergál. Ennek alapján állíthatjuk, hogy $1/\varrho_1$-gyel bizonyos fokig jellemezhetjük a zárt rendszer hatásfokát: minél nagyobb $1/\varrho_1$, annál jobb hatásfokú a vizsgált termelési rendszer.

2. §. A tervezés bizonyos problémáiról

A fentiekben tárgyalt matematikai eljárás más gazdasági problémák megoldásánál is felhasználható, például a tervezés problémájánál. (Lásd például: [6]). Jelölje q_i az A_i termékből az országban összesen termelt mennyiséget egy adott időpontban (a választott egységben kifejezve). Ha f_i jelöli azt, hogy az A_i termékből mennyi kerül közvetlen felhasználásra („fogyasztásra"), e_i azt, hogy mennyit exportál az ország (az importot itt mint negatív exportot vesszük figyelembe), akkor nyilván fennállnak a következő egyenletek:

$$q_i = \sum_{k=1}^{N} l_{ki} q_k + f_i + e_i \,. \tag{9}$$

Ugyanis egy egységnyi A_k termék előállításához l_{ki} „darab" A_i termékre van szükség, vagyis a termelt A_i-termékekből

$$\sum_{k=1}^{N} l_{ki}\, q_k$$

mennyiség más termékek termelésénél kerül felhasználásra, f_i mennyiség fogyasztásra, e_i pedig exportálásra kerül. Bevezetve a $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, $h_i = f_i + e_i$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots h_N)$ jelöléseket, (9) a következő alakra hozható:

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{L}^* \boldsymbol{q} + \boldsymbol{h} \,. \tag{9'}$$

A (9') egyenletben szereplő $\mathbf{L}^*$ matrix az (1')-ben szereplő $\mathbf{L}$ matrix *transzponáltja*, amelynek sajátértékei természetesen azonosak $\mathbf{L}$ sajátértékeivel. Ebből következik, hogy a (9') egyenletrendszert is meg lehet iterációval oldani. Ha tehát ki akarjuk például számítani a népgazdaság fejlesztési tervének kidolgozása céljából, hogy mennyivel kell növelni az egyes A_i termékek globális termelését ahhoz, hogy a fogyasztásra, illetve exportra kerülő termékek mennyisége előírt módon megnövekedjék, vagyis, ha a $\boldsymbol{h}$ vektort egy $\boldsymbol{h}'$ vektorral pótoljuk, akkor, bevezetve a $\boldsymbol{q}^{(0)} = \boldsymbol{q}$ jelölést, a módosított termelési terv meghatározását a következő iterációs eljárással végezhetjük el: kiszámítjuk egymás után a

$$\boldsymbol{q}^{(n+1)} = \mathbf{L}^* \boldsymbol{q}^{(n)} + \boldsymbol{h}' \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

vektorokat; ha $n \to \infty$, $\boldsymbol{q}^{(n)}$ konvergál a keresett $\boldsymbol{q}'$ vektorhoz.

Megjegyzendő, hogy a (9') egyenletrendszerből önmagában ((1') figyelembevétele nélkül) olyan módon, mint azt (1') esetében tettük, nem mindig lehet arra következtetni, hogy $\mathbf{L}^*$ összes sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek; ugyanis a fentebb alkalmazott meggondolás csak akkor alkalmazható, ha a $\boldsymbol{h}$ vektor elemei pozitívak. Ha tehát van a vizsgált termékrendszerben olyan A_i termék, amelyre $h_i < 0$, vagyis amelyre $f_i + e_i < 0$, tehát amelyből többet importálunk, mint amennyi piacra kerül (vagyis az importból fedezzük a teljes belföldi fogyasztást, és ezenkívül az import egy része más termékek előállítására lesz felhasználva), akkor (9')-ből közvetlenül nem látható be, hogy $\mathbf{L}^*$ sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek, és így az sem látható be ilyen módon, hogy a (10) iteráció konvergál. Mivel azonban az $\mathbf{L}^*$ matrix (1')-nek is eleget tesz, tehát az említett feltétel mindig teljesül, és így a (10) iteráció is mindig konvergál, még akkor is, ha a h_i számok között negatívak is előfordulnak.

Végül hasonlítsuk össze az általunk követett tárgyalásmódot a LEONTIEF-félével (lásd: [1]). Az alapvető eltérés abban áll, hogy mi munkaórákban, illetve termelt árumennyiségben számoltunk, míg LEONTIEF pénzre számolt át minden előforduló mennyiséget. Ennek megfelelően nála (9) helyett a

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} L_{ki} Q_k + F_i + E_i \tag{IX}$$

egyenletrendszer szerepel, ahol Q_i az A_i termékből összesen termelt mennyiség pénzértékét jelöli, ennek megfelelően F_i, illetve E_i az A_i termékből fogyasztásra, illetve exportra kerülő mennyiség pénzben kifejezett értékét jelölik; az L_{ik} együttható azt adja meg, hogy 1 pénzegység értékű A_k termékre van szükség. Az L_{ik} együtthatók az (1)-ben illetve (9)-ben szereplő l_{ik} együtthatókkal a következőképpen függnek össze:

$$L_{ik} = \frac{l_{ik} \alpha_k}{\alpha_i}, \tag{11}$$

ahol α_i az A_i termék egységének ára, pénzegységben kifejezve. Ugyanis 1 pénzegységnyi A_i termék $1/\alpha_i$ egységet tartalmaz, ennek előállításához l_{ik}/α_i egység kell az A_k termékből, és ennek pénzértéke $l_{ik}\alpha_k/\alpha_i$. Nyilvánvaló, hogy $Q = q_i\alpha_i$, $F_i = f_i\alpha_i$, $E_i = e_i\alpha_i$ és $L_{ki} = l_{ki}\alpha_i/\alpha_k$ helyettesítéssel (IX) átmegy (9)-be.

A különbség (9) és (IX) között tehát csak jelölésbeli. Az (1') egyenletrendszer LEONTIEFnél az

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{N} l_{ik}\alpha_k + m_i o_i + \pi_i \tag{I}$$

alakban szerepel, ahol α_i jelöli az A_i termék egy egységének pénzegységben kifejezett árát, m_i az A_i termék egy egységének előállításához szükséges (nettó) normál munkaórák számát, o_i egy normál munkaóra órabérét (a munka »árát«) az illető iparágban és π_i az egy egységnyi A_i termékre eső profitot. LEONTIEF az (I) egyenletrendszert természetesen más gyakorlati célból vizsgálja. Az (I) egyenletrendszer ugyanis lehetővé teszi a következő kérdések megválaszolását:

Vizsgáljuk a következő három adatsorozatot (vektort):

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \text{ (bérek)}, \quad \boldsymbol{o} = (o_1, o_2, \ldots, o_N) \text{ (árak)}$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N) \text{ (profitráták)}.$$

Ha e három adatsor közül kettő adott, a harmadik (I) alapján meghatározható, és igy az (I) egyenletrendszer módot ad ezen kapcsolt adatsorok összefüggéseinek vizsgálatára és megváltozásuk hatásának előrelátásra.

(Beérkezett: 1956. VII. 29.)

IRODALOM

[1] W. LEONTIEF: „Structural matrices of national economy." *Econometrica* **17** (1949) 273—282.

[2] W. LEONTIEF AND OTHERS: *Studies in the structure of the American economy.* Oxford University Press, New York, 1953.

[3] W. SCHMEIDLER: *Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik.* Akademie-Verlag, Berlin, 1949. (p. 86.)

[4] В. Н. ФАДЕЕВА: *Вычислительные методы линейной алгебры.* Гостехиздат, Москва, 1950. (p. 121.)

[5] Ф. Р. ГАНТМАХЕР: *Теория матриц.* Гостехиздат, Москва, 1953. (p. 323.)

[6] F. BURCKHARDT: »Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik in der Wirtschaft.« *Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (Berlin)* (1956) 65—72.

О ПРОБЛЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЦЕН

A. BRÓDY и. A. RÉNYI

Резюме

Цель работы — применять известный метод „input—output model" от LEONTIEF к некоторыми проблемами регулирования цен.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ есть такая совокупность изделий, которая является *полной системой* в том смысле, что все изделия, нужные для изготовления изделия A_k, фигурируют среди изделий $A_1, A_2, \ldots, A_N$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Для каждого изделия определяется единичное количество. Предположим, что для изготовления единичного количества A_i нужно l_{ik} единиц изделий A_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ и m_i рабочих часов фактической работы. Пусть b_i означает возвращение вложения (выраженная в рабочих часов) падающая на единицы изделия A_i. Пусть a_i обозначает всю работу, нужную для производства единичного количества изделия A_i, в том смысле, что все другие изделия, нужные для изготовления A_i, перечисляются на рабочие часы. Введя обозначения $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ и $\mathbf{L} = [l_{ik}]$, очевидно, имеет место система уравнений

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{L}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}\ . \tag{1}$$

Если другие точки зрения не принимаются во внимание, то, обозначая цену изделия A_i через $a_i^{(0)}$ целесообразно, чтобы было $a_i^{(0)} = ca_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ где $c > 0$ постоянно. Если это условие не выполняется, то естественно произвести последовательное регулирование цен следующим образом: определяем значение $c = c_0$, при котором выражение

$$\sum_{i=1}^{N}\left(a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} l_{ik}\, a_k^{(0)} - c(m_i + b_i)\right)^2$$

принимает свое наименьшее значение и с помощью рекурсивного соотношения

$$\boldsymbol{a}^{(n+1)} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{a}^{(n)} + c_0\,(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

вычисляем векторы $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \ldots$. Спрашивается, стремится ли $\boldsymbol{a}^{(n)}$ к $c_0\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ вектор, удовлетворяющий системе уравнений (1).

Как хорошо известно (см., например, [3], [4]), для этого необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $\mathbf{L}$ были по абсолютной величине меньше чем 1. Авторы показывают, что предполагая *неприводимость* матрицы $\mathbf{L}$, что не является уменщением общности, так как означает, что из изделий $A_1, A_2, \ldots, A_N$ не может быть выбрана полная система изделий с меньшим числом элементов, из предположения, что $m_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) и все компоненты вектора $\boldsymbol{a}$, решающего систему уравнений (1), также положительны ($a_i > 0$, $i = 1, 2 \ldots, N$), что также является естественным предположением, в силу одной теоремы FROBENIUS (см., например, [5]), следует, что все собственные значения матрицы $\mathbf{L}$ по абсолютной величине меньше чем 1 и поэтому $\boldsymbol{a}^{(n)} \to c_0 \boldsymbol{a}$, при $n \to \infty$. Быстрота сходимости зависит от наибольшего по абсолютной величине положительного корня матрицы $\mathbf{L}$; его обратная величина характеризует эффективность исследуемой системы производства.

ON THE REGULATION OF PRICES

A. BRÓDY and A. RÉNYI

Summary

The paper aims at applying the well-known input-output model of LEONTIEF to some problems of price regulation.

Let $A_1, A_2, \ldots, A_N$ be a set of goods, forming a *closed system* in the following sense: every good, necessary for the production of any of the goods considered is also contained in the same set of goods. We define some unit of each of the goods. Let us suppose that for the production of a unit of A_i l_{ik} units of A_k are necessary, further m_i hours of effective work are needed. Let b_i denote the return of investment falling on a unit of A_i, the investment being also converted into working hours. Let a_i denote the total amount of work (counted in hours of work of an unskilled worker hours of skilled workers being taken into account with corresponding weights) necessary for the production of one unit of A_i in the sense that every other good necessary for the production of one unit of A_i (including return of investment) is expressed in working hours. Putting $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ and $\mathbf{L} = [l_{ik}]$ we have clearly

)
$$\boldsymbol{a} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}\ .$$

If other points of view are not taken into account, the price of one unit of A_i should be proportional to a_i. If the actual price of one unit of A_i is denoted by $a_i^{(0)}$, and $a_i^{(0)} = c a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) with a constant c does not hold, we may think to coming nearer to the mentioned ideal situation, by effecting the following successive regulation of prices. We determine the value c_0 of c so as to minimize the expression

$$\sum_{i=1}^{N} \left(a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} l_{ik}\, a_k^{(0)} - c(m_i + b_i) \right)^2 .$$

After this we determine the vectors $\boldsymbol{a}^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)})$, by the following recursion:

(3)
$$\boldsymbol{a}^{(n+1)} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{a}^{(n)} + c_0\,(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b})\ .$$

The question arises whether $\boldsymbol{a}^{(n)}$ converges to $c_0\boldsymbol{a}$ or not. The necessary and sufficient condition thereof is — as well known — (see e. g. [3] or [4]) that all eigenvalues of the matrix $\mathbf{L}$ should lie in the interior of the unit circle. It is shown in the paper, by using a theorem of FROBENIUS (see e. g. [5]) that under some quite natural suppositions this condition is always satisfied. The suppositions are as follows: 1° The matrix $\mathbf{L}$ should be *irreducible*, which means simply, that the set $A_1, A_2, \ldots, A_N$ does not contain a closed subset in the sense defined above; 2° the numbers m_i and a_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) should all be positive. Thus under natural suppositions $\boldsymbol{a}^{(n)} \to c_0\boldsymbol{a}$. Of course the speed of convergence depends on the eigenvalue ϱ_1, of greatest absolute

value of the matrix **L**. The number $1/\varrho_1$, may be considered in a certain sense as characterizing the effectiveness of the system of production considered.

In § 2 the input-output analysis of the same system of production is considered, leading to the system of equations

$$q = \mathbf{L}^* q + h \; . \tag{4}$$

Here $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ where q_k denotes the amount produced from the good A_k, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_N)$ where h_k denotes the amount from the good A_k consumed by individual consumers (the export is added, import substracted from this amount) and $\mathbf{L}^*$ is the transposed of the matrix **L** figuring in § 1. It follows that all eigenvalues of the matrix $\mathbf{L}^*$ (these being identical with the eigenvalues of the matrix **L**) are lying in the interior of the unit circle, which can be deduced from (1), more easily than from (4).