ATOMMAGREAKTOROKBAN VÉGBEMENŐ NEUTRONLASSÍTÁS-FOLYAMATTAL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁKRÓL

MOGYORÓDI JÓZSEF és NÉMETH GÉZA[1]

Bevezetés

Az atommagreaktorok elméletének egyik legfontosabb kérdése a neutronlassítás törvényszerűségének megállapítása. Az atomreaktorokban többmillió eV energiájú neutronok keletkeznek, és azok a moderátor atommagjaival történő szakadatlan ütközés során lassulnak le néhányszázad eV energiájú termikus neutronokká. A neutronlassítással kapcsolatban több probléma merül fel. Így érdekességgel bír annak vizsgálata, hogy hány ütközéssel válik a keletkező neutron termikus neutronná. Ezt a kérdést PÁL L. [1] dolgozatában vizsgálja. Továbbá fontos kérdés a neutron energiájának időbeli változását vizsgálni, nevezetesen megállapítani, hogy mennyi idő alatt válik a neutron termikus neutronná. Ezt a kérdést TAKÁCS L. [2] dolgozatában vizsgálja. Jelen dolgozatunkban azt a további kérdést vizsgáljuk, hogy a neutron bizonyos idő alatt hány ütközést végez. Ennek ismeretére különösen szükség van a neutron térbeli mozgásának vizsgálatánál, nevezetesen az atomreaktor kritikus méretének megállapításánál. Dolgozatunkban megtartjuk TAKÁCS LAJOS [2] dolgozatának definícióit és jelöléseit. Egyben köszönetet mondunk TAKÁCS LAJOSnak, aki e munka megírásánál sok jó tanáccsal látott el bennünket.

1. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű homogén közeget, amely r különböző típusú atommagból áll. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban keletkezik egy E_0 energiájú neutron. Jelölje a neutron energiáját a t időpontban E_t, és legyen a neutron „letargiája" a t időpontban $\eta_t = \log E_0/E_t$. Feltesszük, hogy a neutron a közeg atommagjaival történő ütközések során vagy szóródik, vagy abszorbeálódik. Jelölje az i-edik típusú atommagon történő ütközési sűrűséget $\gamma_i(x)$, a szóródási sűrűséget pedig $\gamma_i^*(x)$; ezek a neutron x letargiájának függvényei. Az izotróp ütközés szokásos modelljének megfelelően feltesszük, hogy az i-edik típusú atommagon történő szóródás alkal-

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet.

mával a neutron letargiájának növekedése független az ütközés előtti értéktől, és a letargianövekedés eloszlásfüggvénye:

$$H_i(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha} \quad x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-\alpha_i}\,, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \log 1/\alpha_i \\ 1\,, & \text{ha} \quad x > \log 1/\alpha_i\,, \end{cases} \tag{1}$$

ahol $\alpha_i = [(A_i - 1)/(A_i + 1)]^2$ és A_i az i-edik típusú atommag tömegszáma. Bevezetjük továbbá a $C(x) = \gamma_1(x) + \ldots + \gamma_r(x)$ és $C^*(x) = \gamma_1^*(x) + \ldots + \gamma_r^*(x)$ rövidítéseket is. Végül legyen $a = \sqrt{2E_0/m}$. Ekkor egy x letargiájú neutron időbeli ütközési sűrűsége $a\gamma_i(x)\exp(-x/2)$, és időbeli szóródási sűrűsége az i-edik típusú atommagon $a\gamma_i^*(x)\exp(-x/2)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Az η_t letargiaérték mellett vezessük be a ν_t valószínűségi változót is, mely a neutron ütközéseinek számát jelöli a $(0, t]$ időközben. Jelölje továbbá A_t azt az eseményt, hogy a $(0, t]$ időközben nem történik abszzorpció.

Meg fogjuk határozni a

$$\mathbf{P}\{\nu_t = n\,,\ \eta_t \leqq x\,,\ A_t\} = F_n(t, x) \tag{2}$$

valószínűséget. Ennek ismeretében a ν_t változóval kapcsolatos problémák megoldhatók. Így

$$\mathbf{P}\{\nu_t = n \mid A_t\} = \frac{F_n(t,\infty)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(t,\infty)} \tag{3}$$

annak a valószínűsége, hogy a $(0, t]$ időközben n ütközés történik, feltéve, hogy addig nem történik abszorpció. Az ütközések várható száma pedig

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid A_t\} = \frac{\sum\limits_{n=}^{\infty} n\,F_n(t,\infty)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(t,\infty)}\,. \tag{4}$$

2. §. A ν_t változó eloszlása

Tétel: Az $F_n(t, x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *eloszlásfüggvény-sorozat a következő integro-differenciálegyenlet rendszer segítségével határozható meg:*

$$\frac{\partial F_n(t,x)}{\partial t} =$$

$$= -a \sum_{i=1}^{r} \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y)\, d_y F_n(t,y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(x) H_i(x-y)\, d_y F_{n-1}(t,y) \right\} \tag{5}$$

az alábbi kezdeti értékből kiindulva :

$$(6)\qquad F_0(t,x) = \begin{cases} e^{-aC(0)t}, & \text{ha } x \geqq 0 \text{ és } t \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \text{ és } t \geqq 0 . \end{cases}$$

A megoldás kifejezhető a következő explicit alakban is :

$$(7)\qquad F_n(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} G_{n,j}(x) ,$$

ahol a $G_{n,j}(x)$ *függvények a*

$$(8)\qquad G_{0j}(x) = \begin{cases} C^j(0) , & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 , & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és

$$(9)\qquad G_{n,0}(x) = \begin{cases} 1 , & \text{ha } n = 0 , \ x \geqq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

kezdeti értékekből kiindulva sorjában a

$$(10)\qquad G_{n,j}(x) = \\ = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y)\, dG_{n,j-1}(y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y)\, H_i(x-y)\, dG_{n-1,j-1}(y) \right\}$$

rekurzív képlet segítségével határozhatók meg.

Bizonyítás :

(5) fennállása így látható be: a $\{\nu_{t+\Delta t} = n,\ \eta_{t+\Delta t} \leqq x,\ A_{t+\Delta t}\}$ esemény úgy jöhet létre, hogy *vagy* a $\{\nu_t = n,\ \eta_t \leqq x,\ A_t\}$ esemény teljesül, és a $(t,\ t + \Delta t)$ időközben nem történik ütközés, *vagy* a $\{\nu_t = n - 1,\ \eta_t = y,\ A_t\}$ esemény teljesül, és a $(t,\ t + \Delta_t)$ időközben szóródásra vezető ütközés történik, továbbá a neutron letargiájának növekedése $(x - y)$-nál kisebb, vagy pedig a $\{\nu_t < n - 1,\ \eta_t \leqq x,\ A_t\}$ esemény teljesül, azaz a $(t,\ t + \Delta t)$ időközben 2 vagy 2-nél több szóródásra vezető ütközés történik, melynek valószínűsége azonban $o(\Delta t)$. Így a teljes valószínűség tétele értelmében azt kapjuk, hogy

$$F_n(t + \Delta t,\ x) = \int_0^x \{1 - a e^{-\frac{y}{2}} C(y) \Delta t\}\, d_y F_n(t,\ y) + \\ + \sum_{i=1}^{r} a \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y)\, \Delta t\, H_i(x - y)\, d_y F_{n-1}(t,\ y) + o(\Delta t) .$$

Mindkét oldalból $F_n(t, x)$-et kivonva, Δt-vel osztva, majd $\Delta t \to 0$ határátmenetet elvégezve, kapjuk az (5) integro-differenciálegyenletet. A (6) kezdeti érték könnyen adódik annak tekintetbevételével, hogy $\exp\{-aC(0)\,t\}$ annak a valószínűsége, hogy a neutron a $(0, t]$ időközben nem ütközik.

A (7) előállítás úgy nyerhető, hogy a megoldást

$$F_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j G_{n,j}(x) \tag{11}$$

alakban keressük. Így eljárva, t azonos kitevőjű hatványainak együtthatóit összevetve azt nyerjük, hogy

$$(j+1)\,c_{j+1} G_{n,j+1}(x) =$$
$$= -a \sum_{i=1}^{r} \left\{ c_j \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y)\, dG_{n,j}(y) - \right.$$
$$\left. - c_j \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y)\, H_i(x-y)\, dG_{n-1,j}(y) \right\}$$

Ha most a c_j együtthatókat úgy választjuk meg, hogy

$$(j+1)\,c_{j+1} = -a c_j$$

legyen, akkor azt nyerjük, hogy

$$c_j = \frac{(-a)^j c_0}{j!}.$$

Válasszuk c_0-t 1-nek. Ekkor

$$c_j = \frac{(-a)^j}{j!}.$$

$(j+1)\,c_{j+1}$-gyel rövidítve látható, hogy a $G_{n,j}(x)$ függvények kielégítik a (10) rekurzív képletet. A $G_{n,0}(x)$ kezdeti értékek abból a feltételből határozhatók meg, hogy

$$F_n(0, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0 \\ 0, & \text{ha } n > 0\,. \end{cases}$$

Megjegyzés: Az $F(t, x) = \mathbf{P}\{\eta_t \leq x,\, A_t\}$ valószínűségre a

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leq x,\, A_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_t = n,\, \eta_t \leq x,\, A_t\} \tag{12}$$

összefüggés tekintetbevételével felírható, hogy

$$F(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(at)^j}{j!}G_j(x)\,, \tag{13}$$

ahol

$$G_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty}G_{n,j}(x)\,. \tag{14}$$

A (13) eredmény megegyezik TAKÁCS L. [2] dolgozatában közölt eredményével. Az azonosság nyilvánvaló lesz, ha tekintetbe vesszük, hogy (9) szerint

$$G_0(x)=\begin{cases}1\,, & \text{ha } x\geqq 0\\ 0\,, & \text{ha } x<0\,,\end{cases}$$

és (10) szerint a $G_j(x)$ függvényekre fennáll a

$$G_j(x)=\sum_{i=1}^{r}\int_0^x e^{-\frac{y}{2}}\{\gamma_i(y)-\gamma_i^*(y)H_i(x-y)\}\,dG_{j-1}(y)$$

összefüggés.

Megjegyezzük még, hogy a (10) formulából, továbbá a (8) és (9) kezdeti értékekből teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $G_{n,j}(x)\equiv 0$, hacsak $n>j$. A $G_j(x)$ függvényt a (14) formula szerint tehát véges sok $G_{n,j}(x)$ függvény segítségével állíthatjuk elő:

$$G_j(x)=\sum_{n=0}^{j}G_{n,j}(x)\,. \tag{14'}$$

3. §. A ν_t változó várható értéke

Vezessük be a következő függvényt:

$$M(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}nF_n(t,x)\,. \tag{15}$$

Az $M(t,\ x)$ függvény kielégíti a következő integro-differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{r}\left\{\int_0^x e^{-\frac{y}{2}}\{\gamma_i(y)-\gamma_i^*(y)H_1(x-y_i\}\,d_yM(t,y)-\right.$$
$$\left.-\int_0^x e^{-\frac{y}{0}}\gamma_i^*(y)H_i(x-y)\,d_yF(t,y)\right\}. \tag{16}$$

Ez az egyenlet könnyen nyerhető (5) segítségével (13)-ra és (15)-re való tekintettel.

Az $M(t, x)$ függvényt t szerinti hatványsor alakjában is megkaphatjuk, (7)-re való tekintettel. Írhatjuk ugyanis, hogy

$$M(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} A_j(x) , \tag{17}$$

ahol

$$A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \, G_{n,j}(x) . \tag{18}$$

Az $A_j(x)$ függvények rekurzíve meghatározhatók az

$$\begin{aligned} A_j(x) = \sum_{i=1}^{r} \Bigg\{ & \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{\gamma_i(y) - \gamma_i^*(y) H_i(x-y)\} \, dA_{j-1}(y) - \\ & - \int_0^x e^{-\frac{y}{0}} \gamma_i^*(y) H_i(x-y) \, dG_{j-1}(y) \Bigg\} \end{aligned} \tag{19}$$

képlet segítségével, ahol a $G_j(x)$ függvényt (14) értelmezi. A kezdeti feltétel (9) szerint

$$A_0(x) \equiv 0 . \tag{20}$$

A ν_t ütközés-szám feltételes várható értéke azon feltétel mellett, hogy a t időpontban a letargia értékére $\eta_t \leq x$ áll, és a t időpontig nem történt abszorpció:

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid \eta_t \leq x, A_t\} = \frac{M(t, x)}{F(t, x)} , \tag{21}$$

ahol $F(t, x)$ a (13)-mal értelmezett függvény. Továbbá

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid A_t\} = \frac{M(t, \infty)}{F(t, \infty)} . \tag{22}$$

4. §. Példa

a) Tegyük fel, hogy $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$ (állandó) és $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$ (állandó). Ekkor $C^*(x) \equiv C^*$ (állandó) és $C(x) \equiv C$ (állandó).

Legyen továbbá

$$H(x) = \frac{\gamma_1^* H(x) + \ldots + \gamma_r^* H_r(x)}{\gamma_1^* + \ldots + \gamma_r^*} , \tag{23}$$

Az (5) integro-differenciálegyenlet ekkor a következő alakú:

$$\frac{\partial F_n(t,x)}{\partial t} = -a\left\{\int_0^x e^{-\frac{y}{2}} C\, d_y F_n(t,y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} C^* H(x-y)\, d_y F_{n-1}(t,y)\right\}. \tag{24}$$

Ezen paragrafusban a $G_{n,j}(x)$ függvények Laplace—Stieltjes-transzformált-jainak kifejezése céljából a megoldást ismét

$$F_n(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j G_{n,j}(x) \tag{25}$$

alakban keressük. (25)-öt (24)-be helyettesítve, t azonos kitevőjű hatványai nak együtthatóit összevetve azt nyerjük, hogy

$$(j+1)\, c_{j+1} G_{n,j+1}(x) = -aCc_j\left\{\int_0^x e^{-\frac{y}{2}} dG_{n,j}(y) - \frac{C^*}{C}\int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x-y)\, dG_{n-1,j}(y)\right\}. \tag{26}$$

A c_j együtthatókat a

$$(j+1)\, c_{j+1} = -Cc_j$$

egyenletből nyerhetjük. Belátható, hogy ennek megoldása:

$$c_j = \frac{(-aC)^j}{j!}$$

minden j-re, ha c_0-t ismét 1-nek választjuk. Legyen $C^*/C = \varrho$. (26)-ban $(j+1)\, c_{j+1}$-gyel rövidítve kapjuk, hogy

$$G_{n,j+1}(x) = \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} dG_{n,j}(y) - \varrho\int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x-y)\, dG_{n-1,j}(y). \tag{27}$$

Legyenek

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dH(x) \quad \text{és} \quad \psi_{n,j}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dG_{n,j}(x)$$

a $H(x)$ és $G_{n,j}(x)$ függvények Laplace—Stieltjes transzformáltjai. Ezek között (27)-ből következőleg fennáll a

$$\psi_{n,j+1}(s)=\psi_{n,j}\left(s+\tfrac{1}{2}\right)-\varrho\,\varphi(s)\,\psi_{n-1,j}\left(s+\tfrac{1}{2}\right) \tag{28}$$

egyenlet. A $\psi_{n,j}(s)$ függvények meghatározása céljából bevezetjük az

$$A_j(u,s)=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\,\psi_{n,j}(s)$$

generátorfüggvényt. (28)-at u^n-nel megszorozva, majd összegezve minden n-re, kapjuk az

$$A_{j+1}(u,s)=A_j\left(u,s+\tfrac{1}{2}\right)\{1-u\,\varrho\,\varphi(s)\} \tag{29}$$

egyenletet. Mivel most

$$G_{0,j}(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\geqq 0\\ 0, & \text{ha} \quad x<0\,,\end{cases}$$

azért $\psi_{0,j}(s)=1$ $(j=0,\,1,\,2,\,\ldots)$. Másrészt (14)-ből következik, hogy mivel

$$G_{0,0}(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\geqq 0\\ 0, & \text{ha} \quad x<0\,,\end{cases}$$

azért $G_{n,0}(x)=0$, ha $n>0$. Tehát $\psi_{n,0}(s)=0$, ha $n>0$. E kezdeti feltételekből $A_0(u,s)\equiv 1$. (29)-ből következik, hogy

$$A_1(u,s)=A_0\left(u,s+\tfrac{1}{2}\right)\{1-u\,\varrho\,\varphi(s)\}=1-u\,\varrho\,\psi(s)$$

$$A_2(u,s)=A_1\left(u,s+\tfrac{1}{2}\right)\{1-u\,\varrho\,\varphi(s)\}=\{1-u\,\varrho\,\varphi(s)\}\left\{1-u\,\varrho\,\varphi\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\right\},$$

és teljes indukcióval bebizonyítható, hogy

$$A_j(u,s)=\prod_{k=0}^{j-1}\{1-u\,\varrho\,\varphi(s+k/2)\} \qquad j=1,2,\ldots)\,.$$

Innen $\psi_{n,j}(s)$-et úgy kapjuk meg, hogy u^n együtthatóját megkeressük. Mindjárt látható innen is, hogy $\psi_{n,j}(s)\equiv 0$, ha $n>j$ (lásd (14′)-t). Ha pedig $n\leqq j$, u^n együtthatóját

$$(-1)^n\varrho^n\sum_{0\leqq i_1<\ldots<i_n\leqq j-1}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_n} \tag{30}$$

alakban kaphatjuk meg, ahol $\varphi_k = \varphi(s + k/2)$. Például $j = 2$, $n = 1$ esetén

$$\psi_{1,2}(s) = -\varrho\{\varphi(s) + \varphi(s + \tfrac{1}{2})\}.$$

b) A ν_t feltételes várható értékének kiszámítására ebben a speciális esetben a generátorfüggvény módszerét és a Laplace—Stieltjes transzformációt alkalmazzuk.

Legyen

$$G(u, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k F_k(t, x)$$

az $F_k(t, x)$ függvények generátorfüggvénye. Jelölje az $F_k(t, x)$ függvény x szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltját $\psi_k(t, s)$:

$$\psi_k(t, s) = \int_0^x e^{-sx} d_x F_k(t, x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots,).$$

(5) figyelembevételével $G(u, t, x)$-re a következő integro-differenciálegyenletet vezethetjük le:

$$\frac{\partial\{G(u, t, x) - e^{-aCt}\}}{\partial t} = -aC \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} d_y\{G(u, t, y) - e^{-aCt}\} +$$

$$+ auC^* \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x - y)\, d_y G(u, t, y).$$

Ebből rendezéssel a következőt kapjuk:

$$\text{(31)} \qquad \frac{\partial G(u, t, x)}{\partial t} = -w \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{1 - u\varrho H(x - y)\} d_y G(u, t, y),$$

ahol $w = aC$ és $\varrho = C^*/C$.

Ha $\varphi(s)$ a $H(x)$ függvény Laplace—Stieltjes transzformáltja, és

$$H(u, t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \psi_k(t, s),$$

akkor $H(u, t, s)$ és $\varphi(s)$ között (30)-ból következőleg az alábbi egyenlet áll fenn:

$$\text{(32)} \qquad \frac{\partial H(u, t, s)}{\partial t} = -w\{1 - u\varrho\varphi(s)\} H(u, t, s + \tfrac{1}{2}).$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$F_k(0, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0, x \geqq 0 \\ 0 & \text{különben}, \end{cases}$$

azt nyerjük, hogy $H(u, 0, s) \equiv 1$. Tehát (31)-et 0-tól t-ig integrálva kapjuk:

$$H(u,t,s) = 1 - w\{1 - \varrho\varphi(s)\}\int_0^t H\left(u,\tau,s+\tfrac{1}{2}\right)d\tau \,. \tag{33}$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $H(u,t,s)$ sorra kifejezhető $H(u,t,s+n/2)$ segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $n\to\infty$ esetén $H(u, t, s+n/2)\to 0$, úgy végül $H(u,t,s)$-re a következő kifejezést kapjuk:

$$H(u,t,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-wt)^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\{1 - u\varrho\varphi(s+j/2)\} \,. \tag{34}$$

Az

$$M(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,F_n(t,x)$$

függvénynek a Laplace—Stieltjes transzformáltja x szerint:

$$m(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\psi_n(t,s) = \left[\frac{\partial H(u,t,s)}{\partial u}\right]_{u=1} \,.$$

Ebből az $M(t, x)$ függvényt inverz-transzformációval nyerjük. A ν_t feltétele-várható értékét (4) szerint a következő módon fejezhetjük ki $m(t, s)$ segíts ségével:

$$\mathbf{M}\{\nu_t | A_t\} = \frac{M(t,\infty)}{F(t,\infty)} = \frac{m(t,0)}{F(t,\infty)} = \frac{\left[\frac{\partial H(u,t,0)}{\partial u}\right]_{u=1}}{F(t,\infty)} \,. \tag{35}$$

Felhasználva a Takács Lajos [2] által $F(t, \infty)$-re megadott formulát, $\mathbf{M}\{\nu_t|A_t\}$ a következő explicit alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{M}\{\nu_t | A_t\} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-wt)^k}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}\{1-\varrho\varphi(j/2)\}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\{-\varrho\varphi(l/2)\}}{1-\varrho\varphi(l/2)}\right]}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-wt)^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\{1-\varrho\varphi(l/2)\}} \,. \tag{36}$$

(Beérkezett: 1956. VII. 31)

IRODALOM

[1] Pál L.: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 41—54.

[2] Takács L.: „Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűség-számítási kérdésről." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 55—66.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОЦЕССОМ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ, ПРОИСХОДЯЩИМ В АТОМНЫХ РЕАКТОРАХ

J. MOGYORÓDI и G. NÉMETH

Резюме

Одним из самых важных вопросов теории атомных реакторов является исследование закона замедления нейтронов. Настоящая работа исследует тот вопрос, сколько столкновений происходит в течении некоторого времени. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент $t = 0$ (фиксированной) начальной энергией E_0. Пусть в момент t случайные величины E_t и $\eta_t = \log E_0/E_t$ обозначают соответственно энергию нейтрона и его летаргию. Предположим, что нейтрон движется в бесконечной однородной среде. Пусть эта среда состоит из атомных ядер r различных типов. Пусть $\gamma_i(x)$ и $\gamma_i^*(x)$ обозначают соответственно плотность столкновения и плотность рассеяния, происходящих на ядрах i-ого типа. Пусть далее $C = \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $C^* = \gamma_1^* + \ldots + \gamma_r^*$, где эти величины зависят от летаргии x нейтрона. В случае этой модели можно считать, что вероятность того, что нейтрон, летаргия которого x, столкнется в промежуток Δt с атомным ядром i-ого типа, равна $a\gamma_i(x)\exp(-x/2)\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность рассеивания равна $a\gamma_i^*(x)\exp(-x/2)\Delta t + o(\Delta t)$, где $a = \sqrt{2E_0/m}$, m—масса нейтрона.

Предположим далее, что столкновения таковы, что во время рассеивания увеличение летаргии нейтрона не зависит от ее значения до столкновения. Пусть $H_i(x)$ — функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре i-ого типа. Пусть $F_k(t, x)$ — вероятность того, что нейтрон в промежуток времени $(0, t)$ не поглощается (событие A_t), в момент t его летаргия не превосходит x (событие $\eta_t \leq x$) и число столкновений в момент t равно k (событие $\nu_t = k$), функция распределения $F_k(t, x)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (5) и может быть представлена явной формулой (7). Условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\nu_t | \eta_t \leq x, A_t\}$ может быть выражено формулой (21), где фигурирующие в ней величины даются соотношениями (13) и (15).

В том специальном случае, когда $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$, $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$, $C^*(x) \equiv C^*$, $C(x) \equiv C$ постоянные) преобразование $F_k(t, x)$ Laplace—Stieltjes

$$\psi_n(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-at)^j}{j!} \psi_{n,j}(s)$$

может быть вычислено с помощью рекурсивной формулы (29), где

$$A_j(u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \psi_{n,j}(s)$$

производящая функция $\psi_{n,j}(s)$ и $\psi_{n,j}(s)$ преобразование Laplace—Stieltjes $G_{n,j}(x)$ фигурирующих в (7). В этом специальном случае дано в явном виде и условное математическое ожидание числа столкновений формулой (35).

ON PROBABILISTIC PROBLEMS CONNECTED WITH THE PROCESS OF SLOWING DOWN OF NEUTRONS IN NUCLEAR REACTORS

J. MOGYORÓDI and G. NÉMETH

Summary

One of the most important questions of nuclear reactor theory is the establishment of the law of slowing down of neutrons. This paper investigates how many collisions take place during a given time interval.

Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy E_0 in the moment $t = 0$. Let the random variables E_t and $\eta_t = \log E_0/E_t$ denote the energy and the lethargy, resp. of the neutron at the moment t. Suppose that the neutron moves in an infinite homogeneous medium consisting of atomic nuclei of r different types. Let $\gamma_i(x)$ and $\gamma_i^*(x)$ denote the collision density of the neutron and the scattering density of the neutron, resp. Put $C = \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $C^* = \gamma_1^* + \ldots + \gamma_r^*$; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron. In case of the above model it can be supposed that the probability that, during the time Δt, a neutron of lethargy x collides with a nucleus of type i, is $a\gamma_i(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$ and that of scattering $a\gamma_i^*(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$, where $a = \sqrt{2E_0/m}$ and m is the mass of the neutron. In addition, suppose – as usual – that the collisions are such that in case of scattering the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let $H_i(x)$ be the distribution function of the increase in lethargy gained at the scattering on a nucleus of type i. Let $F_k(t, x)$ be the probability that during the time interval $(0, t]$ the neutron will not be absorbed (event A_t), and in the moment t its lethargy will be at most x (event $\{\eta_t \leq x\}$) further that the number of collisions is equalto k (event $\{\nu_t = k\}$). The distribution function $F_k(t, x)$ satisfies the integro-differential equation (5) and can be expressed in the explicit form (7). The conditional expectation $\mathbf{M}\{\nu_t | \eta_t \leq x, A_t\}$ may be expressed by formula (21), where the occuring quantities are given by relations (13) and (15).

In the special case when $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$, $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$, $C^*(x) \equiv C^*$, $C(x) \equiv C$ (γ_1^*, γ_i, C^*, C being constants), the Laplace—Stieltjes transform

$$\psi_n(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} \psi_{n,j}(s)$$

of $F_k(t, x)$ can be expressed by formulas (29) and (30), where

$$A_j(u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \psi_{n,j}(s)$$

is the generating function of the functions $\psi_{n,j}(s)$ and $\psi_{n,j}(s)$ is the Laplace—Stieltjes transform of the function $G_{n,j}(s)$, occuring in (7).

In this special case the conditional expectation of the number of the collisions is given by the formula (33).