

TÖMÖR FÉMGÖMBBEN FELLÉPŐ ÖRVÉNYÁRAMVESZTESÉG MEGHATÁROZÁSÁRÓL

KARDOS GILBERT

Összefoglalás

A szerző ezen dolgozatban kiszámítja egy — az időben szinuszosan változó homogén mágneses térbe helyezett — tömör fémgömb hatására kialakuló elektromágneses teret, továbbá a gömbben fellépő Joule-vesztességet.

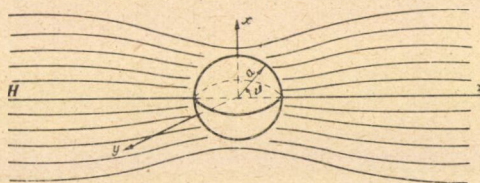
Ezt a feladatot kétdimenzióban FREUD GÉZA [1] megoldotta; ezen dolgozatban az [1]-ben foglaltak háromdimenziós analogonjával foglalkozunk.

Az irodalomban ([1], [2], [3]) a problémát eddig csak közelítéssel oldották meg; tudniillik elhanyagolták az örvényáramok terének visszahatását az eredeti homogén mágneses térre. Ez nyilván csak az alacsony frekvenciás határesetben megengedett. Mi a feladat egzakt megoldását adjuk, vagyis a Maxwell-egyenletekből kiindulva meghatározzuk a gömbön kívül és belül a teret, majd ennek felhasználásával kiszámítjuk a gömbben fellépő örvényáramvesztességet.

Ezen kérdésnek az elektrotechnika azon problémáiban van jelentősége, ahol kis gömbszerű testek erős indukciónak vannak kitéve, például porvasmagoknál.

1. §. A probléma matematikai megfogalmazása

Vegyünk fel a koordinátarendszer origójában egy a sugarú gömböt az alábbi 1. ábra szerint:



1. ábra

Legyen a külső mágneses tér z irányú, változzék az időben szinuszosan, azaz legyen $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp \{j\omega t\}$. (Itt $j = \sqrt{-1}$.) A mágneses tér által a gömbben indukált örvényáramok szekunder tere az eredeti homogén mágneses teret eltorzítja. Az eltolási áramot a vezetési áramhoz képest elhanyagoljuk.

Az elektromos térerősség a gömbön belül kielégíti a

$$\Delta \mathbf{E}_1 = \gamma \mu_1 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}$$

differenciálegyenletet, ahol γ a gömb anyagának fajlagos vezetőképessége, μ_1 a permeabilitása. A gömbön kívül kielégül a $\Delta \mathbf{E}_2 = 0$ Laplace-egyenlet. A mágneses térerősségre hasonló egyenletek érvényesek.

Fentiekén kívül a megoldásoknak ki kell még elégíteniök a gömb felszínén fellépő következő csatlakozási feltételeket:

$$1^\circ (\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t$$

$$2^\circ (\mathbf{H}_1) = (\mathbf{H}_2)_t$$

$$3^\circ \mu_0 (\mathbf{H}_1)_n = \mu_1 (\mathbf{H}_2)_n,$$

ahol μ_0 a külső szigetelő közeg permeabilitása.

Ezen egyenletek azt fejezik ki, hogy az elektromos és mágneses térerősség tangenciális komponensei, továbbá a mágneses indukció normális komponense a gömb felületén folytonosan haladnak át. Egy további feltétel: a $\mathbf{H}$ mágneses térnek a gömbtől nagy távolságban (matematikailag a végtelenben) az eredeti külső homogén térrel kell megegyeznie, vagyis $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H} = \mathbf{H}_0$.

Természetesen nem szükséges az $\mathbf{E}$ -re és $\mathbf{H}$ -ra vonatkozó differenciálegyenleteket külön megoldanunk, mert például, ha $\mathbf{E}$ -t meghatároztuk, akkor $\mathbf{H}$ a Maxwell-egyenletekből kiszámítható, és fordítva.

A csatlakozási feltételek sem függetlenek egymástól. Az egyik térjellemzőre vonatkozó csatlakozási feltételek teljesülésével a másokra vonatkozó csatlakozási feltételek is kielégülnek.

Megjegyezzük még, hogy az egész dolgozat folyamán a Giorgi-féle mértékrendszerben dolgoztunk. A feladat természetének megfelelően gömbkoordinátákat alkalmazunk. A feladat szimmetriájából következik, hogy az elektromágneses tér a φ koordinátáktól független, azaz $\partial/\partial\varphi = 0$.

Ezek után rátérünk a probléma megoldására.

Írjuk fel a Maxwell-egyenleteket gömbkoordinátákban, és vegyük figyelembe, hogy mindenütt $\partial/\partial\varphi = 0$. A térjellemzőket $F(r) \exp(j\omega t)$ alakban keressük.

$$\text{I. } \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r H_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta H_\varphi) \right\} = i_r = \gamma E_r,$$

$$\text{II. } \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} H_r - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) \right\} = i_\varphi = \gamma E_\varphi;$$

$$\text{III. } \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} H_r \right\} = i_\vartheta = \gamma E_\vartheta;$$

$$\text{IV. } \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r E_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r E_\varphi \sin \vartheta) \right\} = - \frac{\partial B_r}{\partial t} = - j \omega \mu H_r;$$

$$\text{V. } \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} E_r - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\vartheta) \right\} = - \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = - j \omega \mu H_\varphi$$

$$\text{VI. } \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r \right\} = - \frac{\partial B_\vartheta}{\partial t} = - j \omega \mu H_\vartheta$$

Látható, hogy a hat Maxwell-egyenlet két csoportra osztható. Az első csoportban — a II., IV. és VI. egyenletekben — csak E_φ , H_r és H_ϑ szerepel, a másodikban — az I., III. és V. egyenletekben — csak az E_ϑ , E_r és H_φ mennyiségek szerepelnek.

Megmutatjuk, hogy a második csoport egyenletei számunkra érdektelenek.

Feltesszük, hogy a gömbön belül $i_r = 0$ — azaz az örvényáramoknak nincs radiális komponense. Ezt a probléma geometriai feltételei indokolják. Az $i_r = 0$ összefüggésből $i_r = \gamma E_r$ miatt egyszersmind $E_r = 0$. Ezt az I. egyenletbe helyettesítve

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta H_\varphi) = 0$$

adódik, azaz

$$H_\varphi = \frac{C}{r \sin \vartheta}.$$

A feladat geometriai feltételeiből és a gerjesztő mágneses térre vonatkozó feltételek következtében adódik, hogy a gömbtől nagy távolságban $H_\varphi = 0$.

A

$$H_\varphi = \frac{C}{r \sin \vartheta}$$

egyenlet érvényes a gömbön kívül is, mert itt $\gamma = 0$, tehát $i_r = 0$. De a „ H -megoldásnak” korláatosnak kell lennie a gömbön belül. Ez csak úgy lehet, ha $C = 0$. A gömb felületén $r = a$ esetben H_φ folytonosan megy át, tehát mindenütt $H_\varphi = 0$.

Ebből és III.-ból, továbbá a H_r -nek a φ -től való függetlenségéből adódik, hogy $i_\vartheta = 0$, tehát $E_\vartheta = 0$, végül is: $H_\varphi = E_r = E_\vartheta = 0$.

2. §. A tér meghatározása a gömbön kívül

Legyen E_1 a térerősség a gömbön kívül, és E_2 a gömbön belül. Oldjuk meg a $\Delta E_1 = 0$ egyenletet. Tudjuk, hogy

$$\text{rot rot } E_1 = \text{grad div } E_1 - \Delta E_1.$$

Mivel a szigetelő közegben szabad töltések nincsenek, $\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 0$. Ezért megoldjuk a következő egyenletet:

$$\Delta \mathbf{E}_1 = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = 0.$$

De mivel

$$E_r = E_\vartheta = 0 \quad \text{és} \quad E_\varphi \neq 0,$$

továbbá $\partial/\partial\varphi = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1$ csak φ irányú lehet, tehát csak a

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1)_\varphi = 0$$

egyenlettel foglalkozunk.

Térbeli koordinátákat használva:

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1)_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\operatorname{rot}_r E_\varphi) - \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{E}_1) \right\} = 0,$$

azaz

$$(1) \quad -\frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_{1\varphi} \sin\vartheta) \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_{1\varphi}) = 0.$$

Így a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$(1^*) \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_{1\varphi} \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\partial^2 (r E_{1\varphi})}{\partial r^2} = 0.$$

A megoldást a következő alakban keressük:

$$E_{1\varphi}(r, \vartheta) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta).$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (R \Theta \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\partial^2 (r R \Theta)}{\partial r^2} = \\ = R \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\Theta \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\Theta \partial^2 (r R)}{\partial r^2} = 0 \end{aligned}$$

$1/R\Theta$ -val szorozva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin\vartheta) \right\} + \frac{r}{R} \frac{d^2 (r R)}{dr^2} = \\ = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cotg\vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{r}{R} \left(r \frac{d^2 R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr} \right) = 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cotg\vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr},$$

amiből

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = k = \text{konst.} \quad .$$

Ezt átrendezve, egy *Euler-egyenlethez* jutunk:

$$(2) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 \quad .$$

A másik egyenlet:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + k = 0 \quad ;$$

ebből az $x = \cos \vartheta$, $\Theta = u$ helyettesítéseket bevezetve, az

$$(3) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left(k - \frac{1}{1 - x^2} \right) u = 0$$

egyenlet adódik; ez pedig a *Legendre-féle differenciálegyenlet*.

Az Euler-egyenlet megoldása:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(1+n)}$$

ahol A és B tetszőleges konstansok, és $k = n(n+1)$. Ez utóbbi helyettesítésre (3) normálalakra transzformálása céljából van szükség. Csak az $n = 1$ -hez tartozó megoldás felelhet meg, mert ellenkező esetben, ha $r \rightarrow \infty$, R túl gyorsan tartana ∞ -hez.

Oldjuk meg most a (3) egyenletet. (3) nem más, mint a következő egyenletnek egy speciális alakja $r = 1$ esetben:

$$(4) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 P_n^r(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^r(x)}{dx} + \left\{ n(n+1) - \frac{r^2}{1 - x^2} \right\} P_n^r(x) = 0 \quad .$$

Ennek megoldása:

$$P_n^r(x) = (1 - x^2)^{\frac{r}{2}} \frac{dP_n(x)}{dx}$$

ahol $P_n^r(x)$ az úgynevezett *kapcsolt Legendre-függvény*. (3) megoldása tehát:

$$P_n^1(x) = \sqrt{1 - x^2} \frac{dP_n(x)}{dx}$$

vagy az $x = \cos \vartheta$ helyettesítéssel:

$$P_n^1(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d \cos \vartheta} = - \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \quad .$$

A megoldás $k = 2$, azaz $n = 1$ esetén tehát a következő:

$$u(x) = CP_1^1(x) = CP_1^1(\cos \vartheta)$$

és

$$\Theta(\vartheta) = CP_1^1(\cos \vartheta) = C \sin \vartheta.$$

Ezzel (1) megoldása:

$$E_{1\varphi} = R \Theta = (Ar + Br^{-2}) C \sin \vartheta.$$

Az $AC = C_1$, $BC = C_2$ jelöléssel:

$$(5) \quad E_{1\varphi} = (C_1 r + C_2 r^{-2}) P_1^1(\cos \vartheta).$$

Határozzuk meg az első Maxwell-egyenletből a mágneses térerősség komponenseit:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \mathbf{E}_1 &= -\frac{\partial B_r}{\partial t} = -j \omega \mu_0 H_r = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_{1\varphi} \sin \vartheta) = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial E_{1\varphi}}{\partial \vartheta} - \frac{E_{1\varphi}}{r(\cot \vartheta)^{-1}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial B_\vartheta}{\partial t} = -j \omega \mu_0 H_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{1\varphi}) = \frac{E_{1\varphi}}{r} + \frac{\partial E_{1\varphi}}{\partial r}.$$

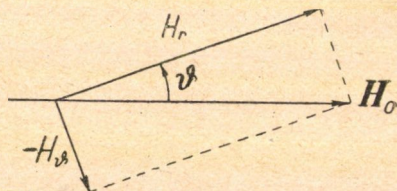
$E_{1\varphi}$ értékét ezekbe helyettesítve

$$j \omega \mu_0 H_r = 2 C_1 \cos \vartheta + 2 C_2 (\cos \vartheta) r^{-3}$$

$$j \omega \mu_0 H_\vartheta = -2 C_1 \sin \vartheta + C_2 (\sin \vartheta) r^{-3}$$

adódik. Végül

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} H_r &= \left(\frac{2 C_1}{j \omega \mu_0} - \frac{2 C_2}{j \omega \mu_0 r^3} \right) \cos \vartheta \\ H_\vartheta &= \left(-\frac{2 C_1}{j \omega \mu_0} - \frac{C_2}{j \omega \mu_0 r^3} \right) \sin \vartheta. \end{aligned} \right\}$$



2. ábra

Mivel a gömbtől nagy távolságban $H_\varphi = 0$, a mágneses térerősségnek csak r és ϑ irányú komponensei vannak, éspedig

$$H_r = H_0 \cos \vartheta$$

$$H_\vartheta = -H_0 \sin \vartheta$$

Így tehát (6) felhasználásával

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_r = \frac{2C_1}{j\omega\mu_0} \cos \vartheta = H_0 \cos \vartheta ,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_\vartheta = -\frac{2C_1}{j\omega\mu_0} \sin \vartheta = -H_0 \sin \vartheta ,$$

azaz

$$|\mathbf{H}_0| = \sqrt{H_\vartheta^2 + H_r^2} = H_0 .$$

Az eredeti mágneses teret kaptuk tehát.

(7)-ből rögtön adódik, hogy $C_1 = \frac{1}{2} j\omega\mu_0 H_0$, amit (5)-be és (6)-ba visszahelyettesítve :

$$(7^*) \quad E_{1\varphi}(r, \vartheta) = \left(\frac{j\omega\mu_0}{2} H_0 r + \frac{C_2}{r^2} \right) P_1^1(\cos \vartheta) .$$

Végeredményben a gömbön kívül a $\mathbf{H}$ térerősség komponensei :

$$(7^{**}) \quad H_{1r}(r, \vartheta) = \left(H_0 + \frac{2C_2}{j\omega\mu_0 r^3} \right) \cos \vartheta ,$$

$$H_{1\vartheta}(r, \vartheta) = \left(-H_0 + \frac{C_2}{j\omega\mu_0 r^3} \right) \sin \vartheta ,$$

ahol C_2 tetszőleges komplex állandó.

3. §. A tér meghatározása a gömbön belül

Induljunk ki a Maxwell-egyenletekből :

$$\text{I}^* \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad \mathbf{i} = \gamma \mathbf{E} , \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 ;$$

$$\text{II}^* \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} , \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 .$$

I*-ból :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} ;$$

II*-ból :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \text{rot } \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_1 \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

Mint hogy $\mathbf{E} = \mathbf{E} e^{j\omega t}$, a következő egyenletet kell megoldanunk :

$$(\text{rot rot } \mathbf{E}_2)_\varphi = -j\omega\mu_1 \gamma \mathbf{E}_{2\varphi} .$$

Hasonló módon, mint (1)-nél, a

$$(8) \quad (\text{rot rot } \mathbf{E}_2)_\varphi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_{2\varphi} \sin \vartheta) \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_{2\varphi}) = \\ = j\omega\mu_1 \gamma E_{2\varphi}$$

parciális differenciálegyenlet adódik. A megoldást itt is ilyen alakban keressük: $E_{2\varphi}(r, \vartheta) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$. Így

$$(9) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (R\Theta \sin \vartheta) \right\} + \frac{1}{r} \frac{d^2(rR\Theta)}{dr^2} = j\omega\mu_1 \gamma R\Theta.$$

(9)-et $r^2/R\Theta$ -val szorozva, és rendezve:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin \vartheta) \right\} = -\frac{r}{R} \frac{d^2(rR)}{dr^2} + j\omega\mu_1 \gamma r^2 = -k.$$

Az

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin \vartheta) + k = 0$$

egyenletet (3) alatt már vizsgáltuk, a belőle nyert

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left(k - \frac{1}{1-x^2} \right) u = 0$$

Legendre-féle differenciálegyenlet megoldása:

$$u(x) = \Theta(\vartheta) = BP_1^1(\cos \vartheta),$$

felhasználva, hogy $k = n(n+1) = 2$.

A másik egyenletet R -rel szorozva és rendezve, a

$$(10) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + R(k - j\omega\mu_1 \gamma r^2) = 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{k}{r^2} + j\omega\mu_1 \gamma \right) R = 0$$

Bessel-féle differenciálegyenlet adódik, amelyből az $R = v/r$ új függő, illetve $r = x$ új független változó bevezetésével

$$(11) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \left(-j\omega\mu_1 \gamma - \frac{k}{x^2} \right) v = 0$$

adódik. Legyen $\alpha^2 = -j\omega\mu_1\gamma$ és $k = m^2 - \frac{1}{4}$; (12) egyszerűbb alakban:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2} \right) v = 0.$$

Általános megoldása:

$$v = C'_1 \sqrt{x} J_m(\alpha x) + C'_2 \sqrt{x} J_{-m}(\alpha x),$$

ahol $J_m(\alpha x)$ az m -edrendű (komplex argumentumú) Bessel-függvény.

Tehát a (10) egyenlet megoldása:

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \{ C'_1 J_{3/2}(\alpha r) + C'_2 J_{-3/2}(\alpha r) \}.$$

$r = 0$ -nál azonban korlátosnak kell lennie a megoldásnak; ez csak akkor teljesülhet, ha $C'_1 = 0$. Így:

$$R(r) = \frac{C'_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}(r \sqrt{-j\omega\mu_1\gamma}) = \frac{C'_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right),$$

ahol $\delta = \sqrt{2/\mu_1\omega\gamma}$ a behatolási mélység. Így a gömbön belül fellépő elektromos térerősség:

$$(12) \quad E_{2\varphi}(r, \vartheta) = \frac{C_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right),$$

ahol $C_1 = C'_1 B$.

A Maxwell-egyenletek alapján most már könnyen határozhatjuk meg a gömb belsejében fellépő mágneses térerősség komponenseit (5*) mintájára:

$$\text{rot}_r \mathbf{E}_2 = -\frac{E_{2\varphi}}{r} \cot \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{2\varphi}}{\partial \vartheta} = -j\omega\mu_1 H_{2r},$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{E}_2 = \frac{E_{2\varphi}}{r} + \frac{\partial E_{2\varphi}}{\partial r} = -j\omega\mu_1 H_{2\vartheta}.$$

Ebből

$$(13) \quad \begin{aligned} j\omega\mu_1 H_{2r} &= \frac{2C_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \cos \vartheta \\ &- j\omega\mu_1 H_{2\vartheta} - \frac{C_1}{2r^{3/2}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \sin \vartheta + \frac{C_1 \sin \vartheta}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right). \end{aligned}$$

Végül, felhasználva a következő Bessel-függvények közti

$$\frac{d}{dy} J_q(y) = -\frac{q}{y} J_q(y) + J_{q-1}(y)$$

összefüggést, és bevezetve a $\beta = \sqrt{-2j/\delta}$ jelölést:

$$\frac{d}{dr} J_{3/2}(\beta r) = -\frac{3}{2r} J_{3/2}(\beta r) + \beta J_{1/2}(\beta r);$$

továbbá

$$-j\omega\mu_1 H_{2\vartheta} = -\frac{C_1}{r^{3/2}} J_{3/2}(\beta r) \sin \vartheta + \frac{C_1 \beta}{\sqrt{r}} J_{1/2}(\beta r) \sin \vartheta.$$

Ezeket helyettesítve (13)-ba:

$$(14) \quad \begin{aligned} H_{2r} &= \frac{2C_1}{j\omega\mu_1 r^{3/2}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) P_1^1(\cos \vartheta), \\ H_{2\vartheta} &= \frac{C_1}{j\omega\mu_1 r^{3/2}} \left\{ J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) - r \frac{\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \right\} P_1^1(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

4. §. Az állandók meghatározása

Az elektromos és mágneses térerősséget — állandó szorzóktól eltekintve — meghatároztuk. A konstansok kiszámíthatók a csatlakozási feltételekből.

Mivel a H_ϑ folytonosan megy át a gömb felszínén, azaz $H_{1\vartheta}|_{r=a} = H_{2\vartheta}|_{r=a}$, továbbá, mivel a $\mathbf{B}$ indukció-vektor normális komponense szintén folytonosan megy át a gömb felszínén, vagyis $\mu_0 H_{1r}|_{r=a} = \mu_1 H_{2r}|_{r=a}$, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -H_0 \sin \vartheta + \frac{C_2 \sin \vartheta}{j\omega\mu_0 a^3} &= \frac{C_1 \sin \vartheta}{j\omega\mu_1 a^{3/2}} \{J_{3/2}(\beta a) - \beta a J_{1/2}(\beta a)\}, \\ \mu_0 H_0 \cos \vartheta + \frac{2C_2 \mu_0 \sin \vartheta}{j\omega\mu_0 a^3} &= \frac{2C_1 \mu_1 \cos \vartheta}{j\omega\mu_1 a^{3/2}} J_{3/2}(\beta a). \end{aligned}$$

Bevezetve a $J_{3/2}(\beta a) = A$ és $J_{1/2}(\beta a) = B$ jelölést, továbbá a két egyenletet összeadva és rendezve, a

$$3\mu_0 H_0 = \frac{2C_1}{j\omega a^{3/2} \mu_1} \{A(\mu_1 - \mu_0) + a\mu_0 \beta B\}$$

egyenlet adódik. Innen

$$C_1 = \frac{3\mu_0 \mu_1 H_0 j\omega a^{3/2}}{2\{A(\mu_1 - \mu_0) + a\beta\mu_0 B\}}.$$

Hasonló módon

$$C_2 = \frac{3\mu_0 \mu_1 H_0 j\omega a^3}{2\{A(\mu_1 - \mu_0) + a\beta\mu_0 B\}} A - \frac{\mu_0 H_0 j\omega a^3}{2}.$$

Kontrollképpen nézzük meg, teljesül-e az a feltétel, hogy az elektromos térerősség szintén folytonosan megy át a gömb felületén, azaz $(E_{1\varphi})_{r=a} - (E_{2\varphi})_{r=a} = 0$, tehát

$$\frac{AC_1}{\sqrt{a}} - \frac{C_2}{a^2} - \frac{j\omega\mu_0 a H_0}{2} = 0.$$

C_1 és C_2 fenti értékeit behelyettesítve valóban azt kapjuk, hogy

$$\frac{3\mu_0\mu_1 H_0 j\omega a^{3/2} A}{\sqrt{a} 2\{A(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0 a \beta B\}} - \frac{3\mu_0\mu_1 H_0 j\omega a^3 A}{2a^2\{A(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0 a \beta B\}} + \\ + \frac{\mu_0 H_0 j\omega a^3}{2a^2} - \frac{\mu_0 H_0 j\omega a}{2} = 0.$$

A C_1 konstans visszahelyettesítve (12)-be és (14)-be, végeredményképp a gömbön belül az alábbi térerősségek adódnak:

$$E_{2\varphi}(r, \vartheta) = \\ = \frac{3\mu_0\mu_1 j\omega H_0 a^{3/2} r^{-1/2}}{2\left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)(\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)\right\}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) P_1^1(\cos \vartheta),$$

$$H_{2\vartheta}(r, \vartheta) = \\ = \frac{3\mu_0 H_0 a^{3/2} r^{-3/2}}{2\left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)(\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)\right\}} \times \\ \times \left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) - \frac{r\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right)\right\} P_1^1(\cos \vartheta).$$

5. §. Az örvényáramveszteség meghatározása

A Joule-veszteséget a Poynting—Umov vektor segítségével határozzuk meg:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_F (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) d\mathbf{f} \right\}$$

ahol az integrálást a gömb felszínére kell kiterjeszteni (tetszőleges z komplex szám esetén $\bar{z}$ a z konjugáltja). Tekintve, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, az energiaáramlás vektora, a gömb felszínére merőleges, a mágneses térerősségnek csak ϑ -irányú komponensét kell figyelembe venni. Így tehát

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_F E_{2\varphi} \bar{H}_{2\vartheta} d\mathbf{f} \right\} = -\frac{1}{2} \int_F \operatorname{Re} [(E_{2\varphi} \bar{H}_{2\vartheta})_{r=a}] d\mathbf{f}.$$

Bevezetve az $A_1 \sin \vartheta = (E_{2\varphi})_{r=a}$ és az $A_2 \sin \vartheta = (H_{2\vartheta})_{r=a}$ jelölést, adódik, hogy

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} a^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = a^2 \pi \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta ,$$

illetve

$$W = -\frac{4}{3} \pi a^2 \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} .$$

Így maga az örvényáramvesztesség:

$$\frac{3 \mu_0^2 \mu_1 j \omega \pi H_0^2 a^3 J_{3/2} \left(\frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right)}{\left| J_{3/2} \left(\frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) (\mu_1 - \mu_0) + \frac{a \mu_1 \sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2} \left(\frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) \right|^2} \left\{ J_{1/2} \left(\frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) - \frac{a \sqrt{-2j}}{\delta} J_{3/2} \left(\frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) \right\}$$

Számítsuk ki most

$$- \operatorname{Re} \{ j J_{3/2}(\beta a) [\overline{J_{3/2}(\beta a)} - \beta a \overline{J_{1/2}(\beta a)}] \}$$

értékét. Bevezetve a $b = a/\delta$ jelölést és figyelembe véve, hogy $\sqrt{-j} = (1-j)/\sqrt{2}$, a fenti kifejezésre

$$(17) \quad - \operatorname{Re} \{ j J_{3/2}(b(1-j)) [\overline{J_{3/2}(b(1-j))} - b(1-j) \overline{J_{1/2}(b(1-j))}] \}$$

adódik. A $(2n+1)/2$ alakú indexszel bíró Bessel-függvényeket egyébként elemi függvények segítségével is ki lehet fejezni (lásd: [4], 100. oldal):

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x , \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin x - x \cos x}{x} ,$$

amit (17)-be helyettesítünk:

$$(17^*) \quad - \operatorname{Re} \left\{ j \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin x - x \cos x}{x} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} (\sin x - x \cos x - x^2 \sin x) \right] \right\} .$$

Legyen

$$(18) \quad \begin{aligned} \sin b &= s , & \operatorname{sh} b &= \alpha . \\ \cos b &= c , & \operatorname{ch} b &= \beta . \end{aligned}$$

Figyelembe vesszük még, hogy

$$\begin{aligned} \sin b(1-j) &= \sin b \operatorname{ch} b - j \cos b \operatorname{sh} b = s\beta - j\alpha \\ \cos b(1-j) &= \cos b \operatorname{ch} b + j \sin b \operatorname{sh} b = c\beta + j\alpha . \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} (\sin x - x \cos x - x^2 \sin x) = \\
 (19) \quad & = \sqrt{\frac{2}{\pi b^3} \frac{s\beta - jca - b(1-j)(c\beta + jsa) - b^2(1-j)^2(s\beta - jca)}{(1-j)^{3/2}}} \\
 & = \sqrt{\frac{2}{\pi b^3} \frac{(s\beta + 2b^2ca - bsa - bc\beta) + j(2b^2s\beta - ca + bc\beta bsa)}{(1-j)^{3/2}(1+j)^{3/2}}} \cdot (1+j)^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Viszont

$$(19^*) \quad (1+j)^{3/2} = \sqrt[4]{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + j \sin \frac{3\pi}{8} \right) \equiv \sqrt[4]{8} (u + jv),$$

vagyis (19) baloldala a következővel egyenlő:

$$(20) \quad \sqrt{\frac{2\sqrt{8}}{\pi b^3} \frac{(s\beta + 2b^2ca - bc\beta - bsa) + j(2b^2s\beta - ca + bc\beta - bsa)}{2\sqrt{2}}} (u + jv).$$

Legyen

$$\begin{aligned}
 s\beta + 2b^2ca - bc\beta - bsa &= C \\
 2b^2s\beta - ca + bc\beta - bsa &= D.
 \end{aligned}$$

A számításokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(21) \quad \overline{J_{3/2}(x)} - x J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (C - jD)(u - jv).$$

Számítsuk ki most a $jJ_{3/2}(x)$ kifejezést:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad jJ_{3/2}(x) &= j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} \frac{\sin x - x \cos x}{(1-j)^{3/2}} = \\
 &= j(u + jv) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} \{ (s\beta - bc\beta - bsa) + j(bc\beta - ca - bsa) \}.
 \end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned}
 s\beta - bc\beta - bsa &= E \\
 bc\beta - ca - bsa &= F.
 \end{aligned}$$

Ekkor (22) a következő alakot veszi fel:

$$j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u + jv)(E + jF).$$

E kifejezést (17)-be helyettesítve, (21) figyelembevételével

$$(23) \quad -\operatorname{Re} \left\{ j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u + jv) (E + jF) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u - jv) (C - jD) \right\} = \\ = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3} (E + jF) (D + jC) \right\} = -\frac{1}{\pi b^3 \sqrt{2}} (ED - FC)$$

adódik. Végül tekintettel a (18) és (22*) összefüggésekre, (23)-ra a következőt kapjuk:

$$(24) \quad \frac{1}{b\pi\sqrt{2}} \{b(\operatorname{sh} 2b + \sin 2b) - \operatorname{ch} 2b + \cos 2b\}.$$

Hátra van még a

$$(25) \quad \left| J_{3/2} \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) (\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0 \sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2} \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) \right|^2$$

kifejezés kiszámítása. Ugyanazokat a jelöléseket használva, mint (18)-ban és (19*)-ban, egyszerű számítások után (25) így alakul:

$$(26) \quad \frac{1}{b^3\pi\sqrt{2}} \{(\mu_1 - \mu_0)^2 [(s^2\beta^2 + c^2\alpha^2) + 2b^2(s^2\alpha + c^2\beta^2) - 2b(\alpha\beta + sc)] + \\ + 4\mu_0^2 b^4(c^2\alpha^2 + s^2\beta^2) - 4\mu_0(\mu_1 - \mu_0)b^2(s\beta + c\alpha)\}$$

A (24) és (26) kifejezéseket (16)-ba helyettesítve:

$$(27) \quad \frac{3\mu_1\mu_0^2\omega\pi a^3 H_0^2 \left\{ \frac{a^2}{\delta^2} \left[\operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{a^2}{\delta^2} \left[\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] \right\}}{(\mu_1 - \mu_0)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{a^2}{\delta^2} \left[\cos \frac{2a}{\delta} + \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} \right] - \frac{a}{\delta} \left[\sin \frac{2a}{\delta} + \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} \right] \right\} + \frac{2\mu_0^2 a^4}{\delta^4} \left[\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{2\mu_0(\mu_1 - \mu_0)a^2}{\delta^2} \left[\sin \frac{2a}{\delta} + \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} \right]}$$

adódik (lásd a cikk végén a 3. ábrát).

$\mu_1 = \mu_0$ esetén, vagyis például, ha vas helyett alumíniumból van a gömb, a (27) képlet leegyszerűsödik:

$$(28) \quad W = \frac{3\mu_0\omega a \delta \pi H_0^2 \left\{ a \left(\operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right) - \delta \left(\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right) \right\}}{2 \left(\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right)}.$$

6. §. A kis- és nagyfrekvenciás határeset

A kisfrekvenciás határesetben $a/\delta \ll 1$. A veszteség képletében szereplő függvények végtelen sorainak magasabb hatványú tagjai elhanyagolhatók, ily módon a veszteségre vonatkozó képleteket a következőképp nyerjük:

$$W = \frac{3}{2} \mu_0 \omega a \delta^2 \pi H_0^2 \left\{ \frac{\frac{a}{\delta} \left(\operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right)}{\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta}} - 1 \right\} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2^4}{2 \cdot 6!} \frac{\mu_0 a^5 \delta^2 \pi H_0^2}{\delta^4}.$$

Tehát

$$W = \frac{1}{15} a^5 \gamma \omega^2 \pi \mu_0^2 H_0^2.$$

Ezen képlet egyezik az irodalomban található képlettel. (Lásd: [2], 173. oldal; [3], 35. oldal.)

Nagyfrekvenciás határesetben ($a/\delta \gg 1$) a probléma a gömb külsejére vonatkozó Neumann-probléma megoldására redukálódik. Ez a feladat — melyet már megoldottak (lásd: [5], 330. oldal) — fellép a matematikai fizika más problémáinál is.

Röviden ismertetjük a megoldást a mi elektromos problémánk esetén.

Elektromos tér csak a gömbön kívül van. A gömbön felületi áram lép fel, melynek abszolút értéke megegyezik a gömb felületén fellépő mágneses térerősség tangenciális komponensével. A gömbön belül a tér zérus. A feladat tehát a gömb külsejére vonatkozó Neumann-probléma:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \text{ innen } \mathbf{H} = \operatorname{grad} \Phi \text{ és } \Delta \Phi = 0.]$$

Ezen egyenlet a következő határfeltételek mellett oldandó meg:

$$1^\circ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=a} = 0$$

$$2^\circ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H} = \mathbf{H}_0.$$

A következő potenciálfüggvény az összes feltételeket kielégíti A és B megfelelő választása esetén:

$$(29) \quad \Phi = (Ar + Br^{-2}) \cos \vartheta.$$

Amint már láttuk, (29) kielégíti a gömbkoordinátákban felírt Laplace-egyenletet:

A határfeltételek szerint:

$$[H_r]_{r=a} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=a} = (A - 2Ba^{-3}) \cos \vartheta.$$

Innen

$$B = \frac{Aa^3}{2},$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} (Ar + Br^{-2}) \sin \vartheta,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_r = A \cos \vartheta = H_0 \cos \vartheta,$$

tehát

$$A = H_0 .$$

Végül :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_{\vartheta} = A \sin \vartheta = -H_0 \sin \vartheta .$$

A felületi áram :

$$|\mathbf{i}_f| = [|\mathbf{H}_{\vartheta}|]_{r=a} = \frac{3}{2} H_0 \sin \vartheta .$$

Végül a veszteség :

$$(30) \quad W = \frac{1}{2 \gamma \delta^2} \int_V |\mathbf{i}_f|^2 dV = \frac{a^2}{2 \gamma \delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\mathbf{i}_f|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2 \mu_0 \omega H_0^2 \delta .$$

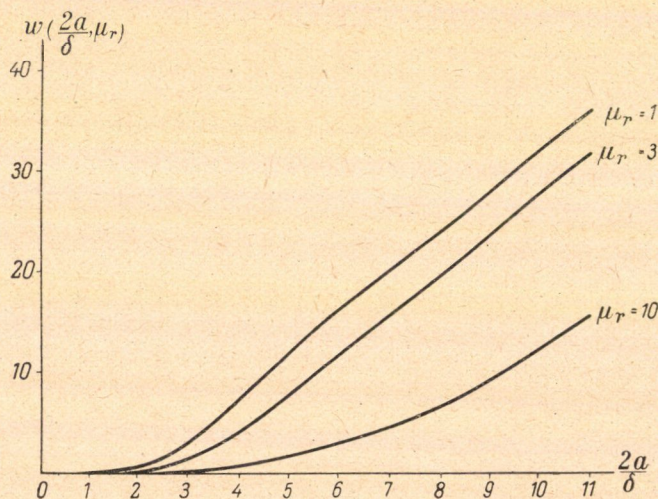
A (30) képletet az eredeti (28) veszteségből is megkaphatjuk, ha érvényesítjük az $a/\delta \gg 1$ feltételt. Ekkor a képletben szereplő hiperbolikus függvények exponenciális függvényekkel helyettesíthetők, ezek mellett a trigonometrikus függvények elhanyagolhatók. Ily módon a

$$W = \frac{3 \mu_0 \omega a \delta H_0^2 \left(a e^{\frac{2a}{\delta}} - \delta e^{\frac{2a}{\delta}} \right)}{2 e} = \frac{3 \mu \omega a (a - \delta) \pi H_0^2}{2} \approx \frac{3 \mu \omega a^2 \pi H_0^2}{2}$$

eredményre jutunk.

Ezzel a külső homogén mágneses térbe helyezett tömör fémgömbben fellépő örvényáramveszteség problémáját teljesen megoldottuk.

Végül köszönetet mondok PÁL SÁNDORNAK és FÉNYES TAMÁSNAK a cikk kidolgozásában nyújtott értékes támogatásukért.



2. ábra

(Beérkezett : 1956. VII. 31.)

IRODALOM

- [1] FREUD G.: „Körkeresztmetszetű vezetőkben fellépő áramkiszorításról.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 467—478.
- [2] H. HENNIGER: „Massenkernwerkstoffe für die Hochfrequenztechnik.” *Nachrichtentechnik* 6 (1956) 171—179.
- [3] F. SAMMER: *Schwingungskreise mit Eisenkernspulen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- [4] SIMONYI K.: *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [5] N. J. KOTSCHIN—I. A. KIBEL—N. W. ROSE: *Theoretische Hydromechanik*. Akademie Verlag, Berlin, 1954.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕРИ ТОКОВ FOUCAULT В ПЛОТНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ШАРЕ

G. KARDOS

Резюме

В настоящей работе автор решает следующую проблему:

Однородный металлический шар с постоянной пермеабилитивностью расположен в синусоидально изменяющемся во времени, однородном магнитном пространстве; какова будет потеря Joule, т.е. потеря токов Foucault индуцированного внешним магнитным полем тока в этом шаре?

Принимая во внимание тот факт, что индуцированные в шаре токи оказывают влияние на первоначальное магнитное поле и изменяют его, автор, исходя из уравнений Maxwell, вычисляет электромагнитное поле в шаре и вне его. Автор, не вычисляя силу индуцированного в шаре тока, с помощью свойств вектора Poynting—Умова, используя тангенциальные компоненты электрического и магнитного поля на поверхности шара, определяет потерю индуцированных токов Foucault.

В заключение, автор отдельно исследует граничный случай тока малой и высокой частоты.

DE LA PERTE DE COURANT D'INDUCTION DANS UNE SPHÈRE CONDUCTRICE

G. KARDOS

Résumé

Dans ce travail, l'auteur calcule l'effet Joule produit par les courants d'induction dans une sphère de métal homogène et de perméabilité constante placée dans un champ magnétique homogène et fonction sinusoidale du temps.

Ce problème, déjà résolu dans le cas de deux dimensions par G. FREUD [1], est traité ici sous trois dimensions. Jusqu'ici, ce problème n'a été résolu qu'approximativement, cf. [1], [2], [3]. En effet, il n'était pas tenu compte du fait que les courants induits dans le conducteur influent de leur côté sur le champ magnétique primitif et le déforment.

L'auteur donne ici la solution exacte du problème. A partir des équations différentielles de Maxwell, il calcule respectivement les champs électrique et magnétique à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère conductrice, puis se basant sur ces résultats, il détermine l'effet Joule dans cette sphère. Enfin, il examine les cas limites de basse et de haute fréquence.

Cette question prend de l'importance au point de vue électrotechnique au cas où de petits corps conducteurs sphériques sont soumis à de fortes inductions.