LINEÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK SAJÁTÉRTÉK NÉLKÜLI MAGJAIRÓL

FENYŐ ISTVÁN

A lineáris integrálegyenletek elméletében régóta ismeretes az a tétel, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $D[-\infty < a \leqq x, y \leqq b < \infty]$ négyzetben értelmezett $K(x, y)$ magnak ne legyen sajátértéke, az, hogy

$$A_n = \int_a^b K_n(x, x)\, dx = 0 \;, \quad n = 3, 4, \ldots$$

legyen, ahol $K_n(x, y)$ a K mag n-edik iterálja. J. CAUCKY [1] azt is bebizonyította, hogy az előbbi feltétel $n = 2$-től érvényes. Ezek a bizonyítások, bár nem nehezek, mégis elég mély tételeket használnak fel a transzcendens egészfüggvények nem-számairól.

A következőkben e tételnek igen egyszerű, mélyebb segédeszközöket nem igénylő bizonyítását adjuk.

1° Elfajult magok esetén a tétel szinte triviális: ezek $D(\lambda)$ Fredholm-féle determinánsa λ racionális egész függvénye. Ha tehát a mag sajátérték nélküli, akkor a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek nincs megoldása. Mivel $D(0) = 1$, ezért ez csakis úgy lehetséges, ha $D(\lambda) \equiv 1$. Másrészt viszont

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = 0 = \int_a^b R(x, x, \lambda)\, dx = A_1 + A_2\lambda + A_3\lambda^2 + \ldots,$$

ami csakis úgy lehet, ha $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy elfajult magoknál az előbbi feltétel $n = 1$-től érvényes.

2° Fredholm-típusú[1] magok esetén a tétel bizonyítása a következőképpen történhet. Minden Fredholm-típusú $K(x, y)$ mag négyzetesen approxi-

---

[1] Ezen — mint általában — olyan magot értünk, melyre

$$\lim_{x' \to x} \int_a^b \left| K(x', y) - K(x, y) \right|^2 dy = \lim_{y' \to y} \int_a^b \left| K(x, y') - K(x, y) \right|^2 dx = 0 \,.$$

málható $M(x, y)$ elfajult maggal úgy, hogy

$$\int_a^b |K(x,y) - M(x,y)|^2 dy < \varepsilon \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

legyen, tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén. A K mag rezolvense legyen $\varkappa(x, y; \lambda)$, az őt approximáló M magé pedig $\mu(x, y; \lambda)$. Legyen továbbá

$$|\varphi(x, y; \lambda)| = |(\mu - M) - (\varkappa - K)| < \delta(\varepsilon) \qquad a \leqq x, y \leqq b$$

bármely λ értékre, melyekre $\varkappa$ és μ léteznek. Azt állítjuk, hogy $\delta(\varepsilon) \to 0$, ha $\varepsilon \to 0$. A rezolvens mag függvényegyenlete alapján ugyanis

$$\varkappa(x, y; \lambda) - K(x,y) - \lambda \int_a^b K(x,t) \{\varkappa(t, y; \lambda) - M(t,y)\} dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t) K(t,y) dt = \lambda K_2(x,y) ,$$

és hasonlóan

$$\mu(x, y; \lambda) - M(x,y) - \lambda \int_a^b M(x,t) \{\mu(t, y; \lambda) - M(t,y)\} dt = \lambda M_2(x,y) .$$

Vonjuk ki ezt a két egyenletet egymásból :

$$\varphi(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t, y; \lambda) dt =$$

$$= -\lambda(K_2 - M_2) + \lambda \int_a^b \{K(x,t) - M(x,t)\} \{\mu(t, y; \lambda) - M(t, y; \lambda)\} dt .$$

A Bunyakovszkij—Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján

$$|K_2 - M_2|^2 \leqq \int_a^b |K(x,t) - M(x,t)| \, |K(t,y) - M(t,y)| \, dt \leqq$$

$$\leqq c_1 \int_a^b |K(x,t) - M(x,t)|^2 dt < c_1 \varepsilon ,$$

és

$$\left| \int_a^b \{K(x,t) - M(x,t)\} \{\mu(t, y; \lambda) - M(t,y)\} dt \right| \leqq$$

$$\leqq c_2 \int_a^b |K(x,t) - M(x,t)|^2 dt \leqq c_2 \varepsilon .$$

Vagyis

$$\left|\varphi(x, y ; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t, y ; \lambda)\, dt\right| \leqq \lambda(c_1 + c_2)\, \varepsilon .$$

De a feltevés szerint λ a K-nak reguláris értéke, ezért közismert tétel alapján $|\varphi(x, y ; \lambda)| < \delta$.

Ezek előrebocsátása után approximáljuk a K magot sajátérték nélküli elfajult M maggal. Az előbb bebizonyított állítás szerint a

$$\int_a^b \{\mu(x, x ; \lambda) - M(x, x)\}\, dx - \int_a^b \{\varkappa(x, x ; \lambda) - K(x, x)\}\, dx$$

transzcendens egész függvény az 1° alatt igazolt állítás figyelembevételével a

$$z(\lambda) = A_2 \lambda + A_3 \lambda^3 + \ldots$$

függvénnyel azonos. Ámde $|z(\lambda)| < \varepsilon$ akármilyen adott $\varepsilon > 0$ mellett, ami persze csakis úgy lehet, ha $A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0$. *Q. e. d.*

3° Ha a K mag folytonos és sajátérték nélküli, akkor A_1 is 0. Folytonos mag tudniillik egyenletesen approximálható M sajátérték nélküli elfajult magokkal, de akkor egy ismert approximációs tétel szerint (lásd: [2]) $|\mu - \varkappa|$ is tetszőleges kicsivé tehető. 2° alapján

$$\int_a^b \varkappa(x, x ; \lambda)\, dx = A_1 ,$$

1° alapján pedig

$$\int_a^b \mu(x, x ; \lambda)\, dx = 0 .$$

Ezért tehát $|A_1|$ bármely $\varepsilon > 0$ számnál kisebb, vagyis $A_1 = 0$. Nem folytonos magoknál ez természetesen nem állhat fenn, például:

$$K(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 , \\ 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x < y \leqq 1 . \end{cases}$$

Ez a mag sajátérték nélküli, és mégis

$$\int_0^1 K(x, x)\, dx = \int_0^1 dx = 1 .$$

Sőt nem folytonos magoknál A_1 értéke a sajátértékek számára és nagyságára semmilyen befolyással nem lehet, mert az $y = x$ pontok halmaza a D négyzet nullmértékű részhalmaza, ezen pedig a K mag értékeinek önkényes megváltoztatása a K mag integrálegyenlet-elméleti viselkedésén semmit sem változtat. Annál érdekesebb az, hogy ha a mag folytonos és sajátérték nélküli, akkor első nyoma is eltűnik.

4° A sajátérték nélküli magok második nyomának eltűnéséről szóló tétel HOSTINSKY [3] egy tételének felhasználásával különösen egyszerűen bizonyítható, ha feltesszük, hogy az

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

homogén elsőfajú integrálegyenletnek van az

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1$$

feltételnek eleget tevő megoldása. Ez esetben tekintsük az

$$L(x,y) = K(x,y) + \varphi(x)\,\varphi(y)$$

magot, melynek csakis egy sajátértéke van, tudniillik 1; HOSTINSKY említett tétele szerint tehát

$$\int_a^b L_2(x,x)\,dx = \int_a^b\int_a^b \{K(x,t) + \varphi(x)\,\varphi(t)\}\,\{K(t,x) + \varphi(t)\,\varphi(x)\}\,dx\,dt =$$

$$= \int_a^b K_2(x,x)\,dx + 1 = 1\;,$$

tehát

$$\int_a^b K_2(x,x)\,dx = 0\;.$$

Q. e. d.

(Beérkezett: 1956. VII. 31. — Átdolgozva: 1956. VIII. 14.)

IRODALOM

[1] J. CAUCKY: *Contribution a la théorie de l'équation de Fredholm.* «Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk» (No. 6) Brno, 1926.

[2] L. V. KANTOROVICS–V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953. (p. 160., (16))

[3] B. HOSTINSKY: Sur l'équation de Fredholm. «Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk» (No. 1.) Brno, 1921.

О ЯДРАХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

I. FENYŐ

Резюме

Работа дает новое, совершенно элементарное и простое доказательство следующей теоремы: для того, чтобы определенное в некотором квадрате ядро типа Fredholm $K(x,y)$ линейного интегрального уравнения не имело собственных значений, необходимо и достаточно выполнения условия $A_n = 0$, $n \geq n_0$, где числа A_n означают следы ядра K. И, наоборот, если K не имеет собственных значений, то $A_n = 0$ при $n \geq 2$. Если K непрерывно, то $A_n = 0$ при $n \geq 1$. Непосредственным следствием этой теоремы является фундаментальная теорема о существовании собственных чисел у симметричных ядер. Ибо, если K симметрично, то

$$A_2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\, dx\, dy > 0$$

(если K не равно тождественно нулю), и значит, в силу предыдущего, K имеет собственное число.

ÜBER DIE KERNE LINEARER INTEGRALGLEICHUNGEN WELCHE KEINE EIGENWERTE BESITZEN

I. FENYŐ

Zusammenfassung

Es wird ein neuer, elementarer und kurzer Beweis des Satzes mitgeteilt, wonach die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein, in einem endlichen Quadrat definierter Kern eigenwertfrei sei, ist das Verschwinden aller Spuren A_n, $n \geq n_0$. Ist der Kern eigenwertfrei, so ist $A_n = 0$, $n \geq 2$. Falls das Kern stetig ist, verschwindet auch die erste Spur.

Eine unmittelbare Folge des bewiesenen Satzes ist die klassische Behauptung, wonach jeder symmetrischer Kern mindestens einen Eigenwert besitzt.