

A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK MAXIMUM-ELVÉRŐL, III.

FREUD GÉZA

Az alábbiakban néhány kiegészítést szeretnénk fűzni előző eredményeinkhez ([1], [2]). Dolgozatunk három paragrafusból áll, ezek mindegyike egy-egy külön egységet alkot. Az 1. §-ban új bizonyítást adunk a maximum-elvre; ez az új bizonyítás bizonyos esetekben a maximum-elvnek az előző két dolgozatban tárgyalt kiterjesztésére is felhasználható. A 2. §-ban az első dolgozat I. tételének (amely a kétdimenziós esetre vonatkozik) élesítését adjuk: az idézett helyen feltételezzük, hogy $V(x, y, t)$ az S^* -on kétszer differenciálható, míg itt megmutatjuk, hogy egyszeri folytonos differenciálhatóság elégséges. A 3. §-ban a maximum-elvnek két, fizikailag várható következményét bizonyítjuk.

1. §. Új bizonyítás a maximum-elvre

Az (x, y, z) tér R tartományában, melynek pereme, $\bar{R} - R = S$, véges sok Ljapunov-felület egyesítése, a $t_0 < t \leq t_1$ intervallumban $V(x, y, z, t)$ tegyen eleget a hővezetés differenciálegyenletének:

$$(1) \quad \Delta V = a^2 \frac{\partial V}{\partial t},$$

ahol $0 < a = \text{konst.}$

A $V(x, y, z, t)$ függvény legyen az $\bar{R} \times [t_0, t_1]$ halmazon folytonos, x, y, z függvényében folytonosan differenciálható, és az $R \times (t_0, t_1]$ halmazon a helykoordináták függvényében kétszer, az idő szerint egyszer folytonosan differenciálható.

1. tétel: $V(x, y, z, t)$ egyetlen $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in R \times (t_0, t_1]$ értékrendszerre sem vehet fel nagyobb értéket, mint az $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$ halmazon felvett maximum.

Ez tehát nem más, mint Tyihonov ismert tétele, de arról az eddig ismertektől lényegesen eltérő bizonyítást adunk.

Bizonyítás:

Legyen

$$\max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t) = m,$$

és feltételezzük (tételünk állításával ellentétben), hogy

$$V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > m, \quad \text{bár} \quad (x_2, y_2, z_2) \in R, \quad t_2 > t_0,$$

Legyen $m < \mu < M$, G legyen azon $(x, y, z, t) \in R \times (t_0, t_2]$ négydimenziós pontok halmaza, melyekre $V(x, y, z, t) > \mu$, és $G(\tau)$ (ahol $t_0 < \tau \leq t_2$) a G -nek az a részhalmaza, melynek pontjaira $t = \tau$. Ismeretes, hogy $V(x, y, z, t)$ az $R \times (t_0, t_1]$ halmazon a helykoordináták analitikus és az időnek akárhányszor differenciálható függvénye, tehát $G(\tau)$ pereme, $H(\tau)$, minden $t_0 < \tau \leq t_2$ értékre véges sok pont tetszőleges kis környezetének kizárásával Ljapunov-felületté tehető (lásd: [1] dolgozat 2. segédtetele). Így, mint első közleményünkben részleteztük, a V függvényre érvényes a Green-képlet, azaz figyelemmel (1)-re:

$$\iiint_{G(\tau)} \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz = a^2 \iint_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df,$$

tehát

$$(2) \quad \iiint_G \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz dt = a^2 \int_{t_0}^{t_2} d\tau \iint_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df.$$

Végezzük el most a (2) baloldalán kijelölt integrálást úgy, hogy először t szerint integrálunk rögzített (x, y, z) -re, és azután integrálunk a helykoordináták szerint. Vegyük figyelembe, hogy a t szerinti integrálás alsó határán G definíciója következtében $V = \mu$, és az integrálás felső határa (x, y, z) -től függetlenül $t = t_2$, kivéve olyan szakaszokat, ahol az alsó és felső határon is $V = \mu$, amelyek járuléka ennek következtében zérus. Így

$$(3) \quad \iiint_G \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz dt = \iiint_{G(t_2)} \{V(x, y, z, t_2) - \mu\} dx dy dz.$$

Mivel G -ben $V > \mu$, továbbá V folytonos, és $V(x_2, y_2, z_2, t_2) > \mu$, tehát (3) jobboldalán határozottan pozitív szám áll. Másrészt $H(\tau)$ -n $V = \mu$, és $G(\tau)$ -ban $V > \mu$, tehát (mivel $\partial V / \partial n$ a külső normális menti differenciálást jelent) $H(\tau)$ -n mindenütt $\partial V / \partial n \leq 0$, és így (2) jobboldala nem lehet pozitív. Mivel (2) és (3) baloldala azonos, feltevésünk ellentmondásra vezetett, és ezzel tételünket bebizonyítottuk. Megmutatjuk, hogy ugyanezt az elvet a maximum-elv kiterjesztésére is fel lehet használni.

2. tétel. Legyen az S perem S^* nyílt résztartománya olyan, hogy létezzék $\text{grad } V$ még az $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ halmazon is, legyen ott folytonos, és az $S^* \times (t_0, t_1]$ halmazon legyen $\partial V / \partial n \leq 0$. Létezzék továbbá egy olyan $R_1 \subset R$ tartomány, amely S^* -ot elválasztja $(R - R_1)$ -től, és $\partial V / \partial t$ az $R_1 \times (t_0, t_1]$ halmazon korlátos. Akkor $V(x, y, z, t)$ egyetlen $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in S^* \times (t_0, t_1]$ érték-rendszerre sem vehet fel nagyobb értéket, mint az $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$ halmazon felvett maximuma.

Bizonyítás:

Legyen most

$$\max_{\{(S-S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t) = m,$$

és tegyük fel (tételünk állításával ellentétben), hogy egy $(x_2, y_2, z_2) \in S^*$, $t_2 > t_0$ értékrendszerénél $V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > m$, és legyen ismét $m < \mu < M$ mellett G az a tartomány, amelyben $t \leq t_2$, és $V > \mu$, $G(\tau) = G \cap \{\tau\}$.

A tett megszorítások következtében az

$$\iiint_{G(\tau)} \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz$$

integrál minden $\tau \in (t_0, t_1]$ értékre létezik, és τ szerint a Riemann-féle értelemben integrálható.

Vegyük fel egy G_1 zárt tartományt úgy, hogy $G \subset G_1 \subset R \times (t_0, t_1]$, és válasszuk meg a $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_2$ beosztást olyan sűrűre, hogy

$$(4) \quad \bigcup_{k=1}^n G(\tau_k) \times (\tau_{k-1}, \tau_k] \subset G_1$$

legyen, ami lehetséges, mert V a G_1 -en folytonos.

Tekintsük most az

$$\begin{aligned} & \iiint_{G(\tau_n)} V(x, y, z, \tau_n) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_0)} V(x, y, z, \tau_0) dx dy dz = \\ (5) \quad & = \sum_{k=1}^n \left\{ \iiint_{G(\tau_k)} V(x, y, z, \tau_k) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_{k-1})} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \iiint_{G(\tau_k)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} V_t(x, y, z, t) dx dy dz dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ \iiint_{G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_{k-1}) - G(\tau_k)} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz \right\} \end{aligned}$$

identitást. Ennek felírásánál felhasználtuk, hogy V_t az adott feltételek teljesülése esetén még G_1 -ben is integrálható, és az integráció tartománya az első Σ tagjaiban (4) miatt G_1 -be esik.

Mivel V_t feltevéseink következtében G_1 -ben folytonos, (5) utolsó sorának első tagja — a beosztást elég sűrűre választva — tetszőlegesen kis rögzített ε -nál kevesebbel tér el az

$$\iiint_G V_t dx dy dz dt$$

integráltól. Tekintsük most (5) utolsó sorának második tagját. Mivel a $G(\tau)$ tartomány pereme τ függvényében folytonosan változik, minden rögzített $(x, y, z) \in G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})$ ponthoz található olyan $\tau'_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ érték, melyre $V(x, y, z, \tau'_k) = \mu$, és így

$$(6) \quad |V(x, y, z, \tau_{k-1}) - \mu| \leq K(\tau_k - \tau_{k-1}),$$

ahol K a V_t egy felső korlátja G_1 -en (a tételben V_t -re eszközölt feltétel miatt ilyen felső korlát létezik).

Legyen most R_2 egy olyan nyílt részhalmaza R_1 -nek, amelynek mértéke az előírt ε -nál kisebb, és $(R - \bar{R}_1)$ -t elválasztja S^* -tól. Akkor tekintettel (6)-ra, az $\varepsilon K \Sigma(\tau_k - \tau_{k-1}) = \varepsilon K(t_2 - t_0)$ értéknél kisebb hibát követünk el, ha (5) utolsó sorában az utolsó két összeg minden egyes tagjában az R_1 -re kiterjesztett integrálban az integrandus helyébe μ -t írunk. Mivel $(G_1 - R_1)$ -en a V függvény már egyenletesen folytonos, a τ_k osztáspontokat megfelelően sűrítve, a $\text{mes}\{[G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})] + [G(\tau_{k-1}) - G(\tau_k)]\}$ területek tetszőlegesen kicsivé tehetők, és így — tekintettel (6)-ra — ugyancsak ε -nál kisebb hibát követünk el, ha ugyanezen Σ alatt szereplő minden egyes integrálban a teljes integrációs tartományon az integrandusok helyébe μ -t helyettesítünk. Elvégezve az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet, így módon (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \iiint_{G(\tau_n)} V(x, y, z, \tau_n) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_0)} V(x, y, z, \tau_0) dx dy dz = \\ & = \iiint_G V_t dx dy dz dt + \{\text{mes } G(\tau_n) - \text{mes } G(\tau_0)\} \mu, \end{aligned}$$

illetve (2) felhasználásával, azt is figyelembe véve, hogy $G(\tau_0) = G(t_0)$ üres:

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_2} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{f}.$$

Itt a baloldal pozitív, a jobboldal pedig nem lehet pozitív, mert S^* -on $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$, $H(\tau)$ -nak S^* -hoz nem tartozó részén pedig $V = \mu$, és így (ugyanúgy, mint az előbb) $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$. Ezzel kimutattuk, hogy a $V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > \mu$ feltétel ellentmondásra vezet, amivel tételünket bebizonyítottuk.

2. §. A maximum-elv kiterjesztése kétdimenziós esetben

3. tétel. A $V(x, y, z, t)$ függvény tegyen eleget az (x, y) -sík Jordan-görbével határolt R korlátos tartományában $t \in (t_0, t_1]$ esetén a hővezetés

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

differenciálegyenletének, ahol $a = \text{konst.} \neq 0$, és legyen K az $\bar{R} \times [t_0, t_1]$ halmazon folytonos. Legyen az R tartomány S peremének S^* része olyan össze-

függő nyílt rektifikálható Jordan-ív, hogy az S -et az egységkörre egyrétűen leképező analitikus függvény S^* -on folytonosan differenciálható. $\text{grad } V$ legyen az $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ halmazon folytonos, és S^* -on legyen $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$, továbbá egy $R_1 \subset R$ tartományon, amely $(R - \overline{R_1})$ -t elválasztja S^* -tól, legyen

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| dx dy < \infty.$$

Akkor a V függvény egyetlen $(x_2, y_2) \in S^*$ pontban és $t_2 \in (t_0, t_1]$ időpontban sem vehet fel nagyobb értéket, mint amennyi az $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$ halmazon felvett maximuma.

Bizonyítás :

Tekintsük azt a $w = \varphi(z)$ analitikus függvényt, amely a $z = x + iy$ síkbeli R tartományt a $w = u + iv$ sík F félkörébe viszi át, mégpedig oly módon, hogy az F félkör D átmérője az S^* peremrésznek felel meg, és D a $v = 0$ valós tengely $(-1, +1)$ szakasza legyen, $\varphi(z)$ inverze legyen $\Phi(w)$. Akkor az u, v változók függvényében $V(u, v, t) = V(x, y, t)$ a

$$(7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = a^2 |\Phi'|^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget F belsejében, $\overline{F}$ -on folytonos, végül D -n $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$.

Az

$$\frac{a^2}{4\pi(t' - t)} e^{-\frac{a^2 r^2}{4(t' - t)}}$$

hőpólusfüggvény transzformációjával nyert

$$W(u, v, t; u', v', t') = \frac{a^2}{4\pi(t' - t)} e^{-\frac{a^2 |\Phi(u+iv) - \Phi(u'+iv)|^2}{t' - t}}$$

függvény az u', v', t' változók függvényében kielégíti a (7) hővezetési egyenletet, és az u, v, t változók függvényében a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = -a^2 |\Phi'|^2 \frac{\partial W}{\partial t},$$

egyenletet.

Az (x, y) koordinátákba való visszatranszformálással kapjuk, hogy minden $G \subset F$ tartományban

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow t' - 0} \iint_G W(u, v, t) |\Phi'(u + iv)|^2 du dv = \begin{cases} 1, & \text{ha } (u', v') \in G \\ 0, & \text{ha } (u', v') \notin \overline{G}. \end{cases}$$

Ha a $V(u, v, t)$ és $W(u, v, t; u', v', t')$ függvényt a $|w| < 1$ egységkör alsó felére v -ben, illetve v -ben és v' -ben páros függvényként folytatjuk, akkor a $V(u, v, t)$ függvény a helykoordináták függvényében az egész $|w| < 1$, illetve $|w'| < 1$ körben folytonosan differenciálható,¹⁾ és annak minden D -től különböző pontjában kielégíti a (7) differenciálegyenletet. A Green-képlet szerint, ha az integrációs tartomány a $\varrho < 1$ sugarú K_ϱ körlemez, illetve C_ϱ körvonal²⁾:

$$\begin{aligned} & \iint_{K_\varrho} \left(W \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial t} \right) |\Phi'|^2 du dv = \\ & = \frac{1}{a^2} \iint_{K_\varrho} (W \Delta V - V \Delta W) du dv = \frac{1}{a^2} \oint_{C_\varrho} \left(V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \end{aligned}$$

A legelső kifejezésről leolvasható, hogy az a

$$\frac{d}{dt} \iint_{K_\varrho} W V |\Phi'|^2 du dv$$

kifejezéssel egyenlő, tehát t szerint integrálva:

$$\begin{aligned} & \iint_{K_\varrho} W(u, v, t; u', v', t') V(u, v, t) |\Phi'|^2 du dv = \\ & = \iint_{K_\varrho} W(u, v, t_0; u', v', t') V(u, v, t_0) |\Phi'|^2 du dv + \\ & + \frac{1}{a^2} \int_{t_0}^t \oint_{C_\varrho} \left(V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds dt \quad (t < t'), \end{aligned}$$

és így — tekintettel (8)-ra — $t \rightarrow t'$ esetén kapjuk, hogy

¹⁾ Itt felhasználjuk azt a feltételt, hogy S^* -on a leképező függvény folytonosan differenciálható.

²⁾ Itt felhasználjuk, hogy

$$\Delta V = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

abszolút integrálható, és $du dv = |\varphi'| dx dy < M dx dy$.

$$\begin{aligned}
 V(u', v', t') = \\
 (9) \quad &= \iint_{K_0} W(u, v, t_0; u', v', t') V(u, v, t_0) |\Phi'|^2 du dv + \\
 &+ \frac{1}{a^2} \int_{t_0}^t \iint_{C_0} \left(V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds dt.
 \end{aligned}$$

Itt a jobboldalon álló kifejezés minden $t_0 < t' \leq t_1$ értékre értelmezve van, és mivel W eleget tesz az egész K_0 körlemezén és minden t' -re az u', v', t' függvényében a (7) hővezetési egyenletnek, tehát (9)-ből leolvasható, hogy $V(u, v, t)$ az egész K_0 kör belsejében (és számunkra az a lényeges, hogy ennek következtében a D átmérőn is) eleget tesz a (7) hővezetési egyenletnek. Így Tyihonov tételét alkalmazva, V -nek a D átmérő $(-\varrho, +\varrho)$ szakaszán felvett maximuma a t_2 időpillanatban nem lehet nagyobb, mint a $\{C \times (t_0, t_2)\} \cup \{K_0 \times \{t_0\}\}$ halmazon felvett maximuma. Tekintettel arra, hogy a V a v -nek páros függvénye, a maximum meghatározásával a $K_0 \cap \{v : v > 0\}$ félkörre szorítkozhatunk. A $\varrho \rightarrow 1$ határátmenetet elvégezve arra az eredményre jutottunk, $V(u, v, t)$ a D átmérőn valamely $t_2 > t_0$ időpillanatban nem vehet fel nagyobb értéket, mint amennyi a $|w| = 1, v \geq 0$ félkörön $t_0 \leq t \leq t_2$ mellett felvett maximum, valamint a $t = t_0$ -ra a $|w| < 1, v \geq 0$ félkörben felvett maximum közül a nagyobbik. A $V(u, v, t)$ függvényt az $x + iy = \Phi(u + iv)$ leképezéssel az (x, y) -síkra visszatranszformálva, ezzel tételünk állítását kapjuk.

3. §. A hővezetés differenciálegyenlete megoldásfüggvényének két tulajdonsága

Az alábbiakban két tételt bizonyítunk be, amelyek a maximum-elv egyszerű következményei:

4. tétel. Az $u(x, t)$ függvény tegyen eleget $x \in (\alpha, \beta), t \in (t_0, t_1]$ mellett a hővezetés

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

differenciálegyenletének, legyen a tartomány peremén is folytonos, és $u(x, t)$ legyen x függvényében monoton nem-csökkenő, $u(\alpha, t)$ a t függvényében monoton nem-növekvő, és $u(\beta, t)$ a t függvényében monoton nem-csökkenő; akkor minden rögzített $t \in (t_0, t_1]$ értékre is $u(x, t)$ az x függvényében monoton nemcsökkenő.

Bizonyítás:

Az $u(x, t)$ függvény a $t_0 \leq t \leq T, \alpha \leq x \leq \beta$ tartomány háromágú peremén minimumát az (α, T) , maximumát pedig a (β, T) pontban veszi fel, tehát a maximum-elv következtében

$$u(\alpha, T) \leq u(x, T) \leq u(\beta, T) \quad \alpha < x < \beta, \quad t_0 < T \leq T_1;$$

ennek következtében h tetszőleges értéke mellett a

$$v(x, t) = u(x + h, t) - u(x, t)$$

függvény, amely eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, az $\alpha \leq x \leq \beta - h$, $t_0 \leq t \leq t_1$ tartomány háromágú peremén nemnegatív, és így ezen tartományon belül is nemnegatív. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. tétel. *A $V(x, y, z, t)$ függvény legyen az $\bar{R} \times [t_0, t_1]$ halmazon a helykoordináták szerint kétszer, az idő szerint egyszer folytonosan differenciálható, $t = t_0$ -ra legyen a helykoordináták függvényében szubharmonikus, továbbá R minden perempontján legyen a t idő függvényében monoton nem-csökkenő, akkor V a helykoordináták függvényében minden későbbi $t \in (t_0, t_2]$ időpontban is szubharmonikus.*

Bizonyítás:

$t = t_0$ -ra a szubharmonicitás következtében $\Delta V \geq 0$, tehát a hővezetési egyenletből $\partial V / \partial t \geq 0$. Ugyanez teljesül a tartomány peremén minden $t \in [t_0, t_1]$ időpontra; mivel V -vel együtt $\partial V / \partial t$ is eleget tesz az $R \times (t_0, t_1]$ halmazon a hővezetési egyenletnek, tehát $\partial V / \partial t$ ezen tartomány belsejében nemnegatív, és így a hővezetési egyenlet szerint $\Delta V \geq 0$. Q. e. d.

(Beérkezett: 1956. VII. 31.)

IRODALOM

- [1] ADLER GY. — FREUD G.: „A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 157–165.
- [2] ADLER GY.: „A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, II.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 429–435 (az előző dolgozat).

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, III.

G. FREUD

Резюме

Пусть $V(x, y, z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности ($0 < \alpha = \text{const.}$) если, $t_0 < t \leq t_1$ и точка (x, y, z) находится в некоторой области R пространства (x, y, z) , граница $\bar{R} - R = S$ которая есть соединение поверхностей типа Ляпунова конечного числа.

Пусть функция $V(x, y, z, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, y, z в $\bar{R} \times (t_0, t_1]$. Далее, она непрерывно дифференцируема по координатам места и один раз непрерывно дифференцируема по времени в $R \times (t_0, t_1]$.

Теорема 1: Не существует такой система $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in R \times (t_0, t_1]$, чтобы $V(x_2, y_2, z_2, t_2)$ приняла бы значение, большее чем максимум на $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$. Это — известная теорема Тихонова; но наше доказательство отлично от известных.

Теорема 2: Пусть открытое подмножество S^* границы S таково, что $\text{grad } V$ существует и непрерывно тоже на $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$. Пусть $\partial V / \partial n \leq 0$ на $S^* \times (t_0, t_1]$. Далее пусть существует область $R_1 \subset R$, которая отделяет S^* от $R - R_1$, и $\partial V / \partial t$ ограничена в $R_1 \times (t_0, t_1]$. Тогда не существует такой системы $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in S^* \times (t_0, t_1]$, для которой $V(x, y, z, t)$ приняла бы значение, большее чем максимум на $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_1\}\}$.

Основа доказательств обеих теорем тождество

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df,$$

где

$$\mu = \text{const} > m = \max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_1\}\}} V(x, y, z, t),$$

$G(t_2)$ область, состоящая из точек $V(x, y, z, t) > \mu$, и $H(\tau)$ поверхность, состоящая из точек $V(x, y, z, \tau) = \mu$.

Теорема 3. Пусть функция $V(x, y, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности в области R -плоскости (x, y) ограниченной кривыми Жордана $t \in (t_0, t_1]$, $a = \text{const} \neq 0$ и V непрерывна на $\bar{R} \times (t_0, t_1]$. Пусть часть S^* границы S области R такая связная открытая дуга Жордана что аналитическая функция, отображающая S на единичный круг, однолистка, непрерывно дифференцируема на S^* . Пусть $\text{grad } V$ непрерывен на $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$, $\partial V / \partial n = 0$ на S^* и

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| dx dy < \infty$$

в области $R_1 \subset R$, отделяющей $R - R_1$ от S^* . Тогда не существует такая точка $(x_2, y_2) \in S^*$ и такой момент времени $t_2 \in (t_0, t_1]$, что величины функции V в этих точках были бы больше, чем ее максимум на $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$.

Теорема доказывается при помощи конформного отображения и формулы (9)

Теорема 4. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности для $x \in (a, \beta)$, $t \in (t_0, t_1]$, непрерывна и на границе области и $u(x, t_0)$, как функция от x , монотонно неубывающая, а $u(\beta, t)$ как функция t , монотонно возрастающая. Тогда эта функция, как функция от x , монотонно неубывающая также для всех фиксированных $t \in (t_0, t_1]$.

Теорема 5. Пусть функция $V(x, y, z, t)$ два раза непрерывно дифференцируема по координатам места и один раз непрерывно дифференцируема по времени в $\bar{R} \times (t_0, t_1]$. Пусть далее, она, как функция координат, субгармонична для $t = t_0$ (как функция времени t) монотонно неубывающая во всех краевых точках от R . Тогда V как функция координат мест, будет субгармонична также для всех будущих точек времени $t \in (t_0, t_1]$.

SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR, III.

G. FREUD

Résumé

Nous supposons que la fonction $V(x, y, z, t)$ satisfait à l'équation (1) de la chaleur dans la région R de l'espace (x, y, z) limitée par le contour $S = \bar{R} - R$ composé de surfaces de Lyapounoff en nombre fini et dans l'intervalle $t_0 < t \leq t_1$, où $0 < a =$ = constante.

De plus, nous faisons sur $V(x, y, z, t)$ les hypothèses suivantes :

- 1°. $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ sont continues dans $\bar{R} \times (t_0, t_1]$;
- 2°. $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ sont continues dans $\bar{R} \times (t_0, t_1]$.

Théorème 1. $V(x, y, z, t)$ ne peut prendre, pour aucun système des valeurs $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in \bar{R} \times (t_0, t_1]$, une valeur plus grande que son maximum pris sur $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$.

Cela n'est autre chose que le théorème connu de Tyhonoff, mais nous en donnons une démonstration essentiellement différente de celles qui sont connues jusqu'ici.

Théorème 2. Soit S^* un domaine partiel, ouvert du contour S tel que $\text{grad } V$ existe et soit continu même sur $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ et que $\partial V / \partial n \leq 0$ sur $S^* \times (t_0, t_1]$. Supposons ensuite qu'il existe une région $R_1 \subset R$ qui sépare S^* de S et telle que $\partial V / \partial t$ soit bornée dans $R_1 \times (t_0, t_1]$. Dans ce cas $V(x, y, z, t)$ ne peut prendre, pour aucun système des valeurs $(x_2, y_2, z_2, t) \in S^* \times (t_0, t_1]$ une valeur plus grande que son maximum pris sur $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_1\}\}$.

C'est l'identité

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_2} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df$$

qui est à la base de la démonstration de tous les deux théorèmes, où

$$\mu = \text{constante} > m = \max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t),$$

$G(t_2)$ est la domaine des points où $V(x, y, z, t) > \mu$ et $H(\tau)$ est le domaine des points de la surface $V(x, y, z, t) = \mu$.

Théorème 3. Supposons que la fonction $V(x, y, t)$ satisfait à l'équation (1) de la chaleur dans le domaine borné R limité par les courbes de Jordan du plan (x, y) et quand $t \in (t_0, t_1]$ où $a = \text{constante} \neq 0$, et que $V(x, y, t)$ est continue dans $R \times (t_0, t_1]$. Soit S^* une partie de la frontière S du domaine R ; nous supposons que S^* est un arc de Jordan ouvert, connexe tel que la fonction analytique, qui réalise la représentation conforme univalente de S sur le cercle unité, ait sur S^* une dérivée continue. Soit encore $\text{grad } V$ continue sur $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ et $\partial V / \partial n$. Désignons par $R_1 \subset R$ un domaine qui sépare $R - \bar{R}_1$ de S^* et soit

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| dx dy < \infty.$$

Dans ce cas la fonction V ne peut prendre une valeur plus grande, dans aucun point $(x_2, y_2) \in S^*$ et à aucun instant $t_2 \in (t_0, t_1]$, que son maximum pris sur $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$.

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide de la représentation conforme et de la formule (9).

Théorème 4. La fonction $u(x, t)$ satisfait à l'équation (1) de la chaleur quand $x \in (a, \beta)$ et $t \in (t_0, t_1]$; soit $u(x, t)$ continue même sur la frontière du domaine, $u(x, t_0)$ fonction non décroissante en x , $u(a, t)$ fonction non croissante en t et $u(\beta, t)$ fonction non décroissante en t . Dans ce cas pour chaque $t \in (t_0, t_1]$ fixe $u(x, t)$ est une fonction monotone non décroissante de x .

Théorème 5. La fonction $V(x, y, z, t)$ possède dans $\bar{R} \times [t_0, t_1]$ des dérivées continues jusqu'au second ordre en x, y, z et de premier ordre en t , elle est subharmonique en fonction de x, y, z pour $t = t_0$ et sur chaque point de la frontière de R elle est une fonction non décroissante de t . Dans ce cas V est une fonction subharmonique de x, y, z à chaque instant ultérieur $t \in (t_0, t_1]$.