

KVÁZI-ZSUKOVSKIJ PROFILSOROK ÁRAMLÁSTANI VIZSGÁLATA

KÖVÁRI TAMÁS

1. §.

Profilsoron egy egyenes mentén ekvidisztáns módon elhelyezkedő kongruens és azonos állású profilok összességét értjük. (1. ábra.) Tekintsünk egy síkbeli áramlást, amely adott szögben esik be a profilsora. A profilsor megváltoztatja az áramlás irányát, mintegy „megtöri” azt. Visszahatásképpen az áramlás erőt fejt ki a profilsor egyes profiljaira. Tehát a következő kérdések merülnek fel:

1° Hogyan lehet matematikailag zárt alakban megadni az áramlási képet, vagy másképpen, síkbeli áramlásról lévén szó, hogyan lehet meghatározni az áramlás komplex potenciálját?

2° A komplex potenciál ismeretében hogyan lehet adott beesési szög-höz tartozó kilépési szöget kiszámítani?

3° Mekkora lesz az egyes profilokra ható „felhajtóerő”?

A jelen dolgozatban ezekre a kérdésekre válaszolunk.

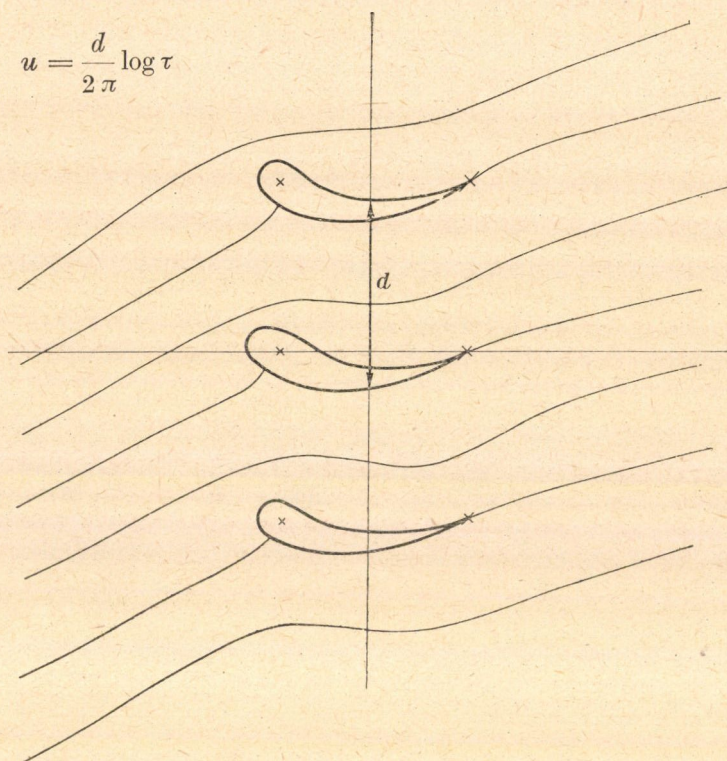
2. §.

Helyezkedjék el a profilsor az „ u ” komplex sík képzetes tengelye mentén, és legyen a szomszédos profilok egymástól való távolsága: d . Érkezzék az áramlás a $\operatorname{Re}(u) < 0$ félsíkból α szög, és távozzék a $\operatorname{Re}(u) > 0$ félsíkba β szög alatt (1. ábra).

A

$$(1) \quad \tau = e^{\frac{2\pi}{d} u}$$

leképezés a profilsor valamennyi profilját egyetlen profilba viszi át. (A következőkben végig arra az esetre szorítkozunk, amikor ez a profil Zsukovszkij-profil.) Ilyen módon a profilsor vizsgálata visszavezethető egyetlen profil körüli áramlás vizsgálatára, igaz, hogy ez esetben viszont a $\tau = 0$, $\tau = \infty$



1. ábra

pontokban egy-egy örvényforrás lép fel. Ezen áramlás meghatározására a konform leképezés módszerét használjuk fel.

Induljunk ki a

$$w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\zeta - \varrho} + (Q - i\Gamma_1) \log \frac{1}{\zeta - \bar{\varrho}} - \\ - (Q + i\Gamma_2) \log \frac{1}{\zeta - i} - (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{\zeta + i},$$

komplex potenciálból, amely a $\zeta = \varrho, \bar{\varrho}, i, -i$ pontokban elhelyezkedő

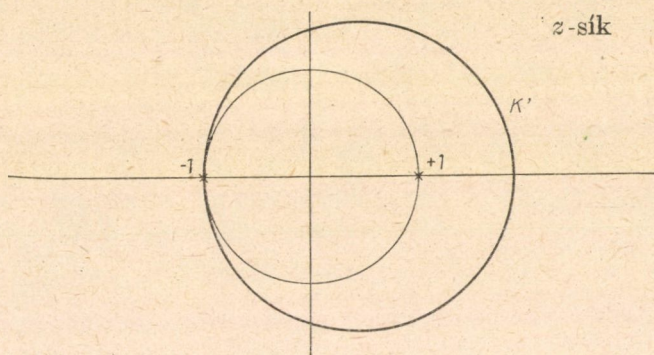
$$Q + i\Gamma_1, \quad Q - i\Gamma_1, \quad -Q - i\Gamma_2, \quad -Q + i\Gamma_2$$

„intenzitású” örvényforrások által létrehozott áramlást írja le. Minthogy $\Im m(\zeta) = 0$ esetén

$$\arg(\zeta - \varrho) + \arg(\zeta - \bar{\varrho}) = 0,$$

$$\log \left| \frac{\zeta - \bar{\varrho}}{\zeta - \varrho} \right| = 0,$$

ezért $\mathcal{I}m(\zeta) = 0$ esetén: $\mathcal{I}m(w) = 0$. A valós tengely tehát áramvonal.



2. ábra

Alkalmazzuk a

$$z = \frac{\zeta + i}{\zeta - i},$$

lineáris leképezést. Ekkor $\mathcal{I}m(\zeta) = 0$ a $|z| = 1$ körbe, a $\zeta = \varrho$ pont a

$$z = \sigma = \frac{\varrho + i}{\varrho - i},$$

pontba megy át ($\mathcal{I}m(\varrho) > 0$ esetén $|\sigma| > 1$). A komplex potenciál pedig (egy konstanstól eltekintve) a

$$(2) \quad w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{z - \sigma} + (Q - i\Gamma_1) \log \frac{1}{z - \sigma^{-1}} + (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{z}$$

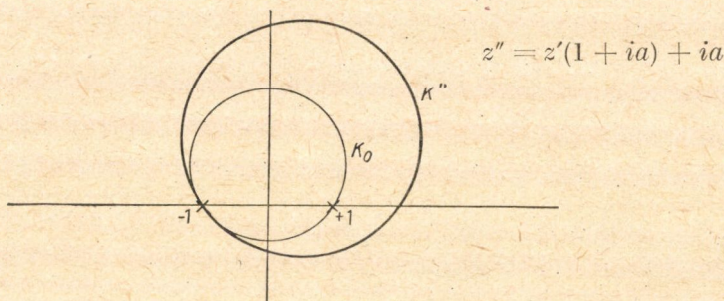
komplex potenciálba megy át. Ennek a $|z| > 1$ áramlási térben a $z = \sigma$ és $z = \infty$ pontokban örvényforrások vannak, $|z| = 1$ az áramlás partvonal. A

$$(3) \quad z' = \frac{z + \delta}{1 - \delta} \quad (0 \leq \delta < 1)$$

lineáris leképezés a $|z| = 1$ kört egy nagyobb K' körbe viszi át, amely a $|z'| = 1$ kört $z' = -1$ -ben érinti. A

$$(4) \quad z'' = (1 + ia)z' + ia$$

lineáris leképezés a $|z'| = 1$ kört egy, a $z'' = \pm 1$ pontokon átmenő, ia középpontú K_0 körbe viszi át, a K' kört pedig egy a K_0 -t tartalmazó, és azt a $z'' = -1$



3. ábra

pontban érintő K'' körbe (3. ábra). A (3) és a (4) leképezésnek a $z = -1$ pont fixpontja, a $z = \sigma$ pont ezzel szemben a

$$z'' = \sigma'' = \frac{\sigma(1 + ia) + \delta + ia}{1 - \delta},$$

pontba megy át. Ha

$$(5) \quad \sigma = \sigma_1 - ia(1 + \sigma_1) \quad [\sigma_1 = \operatorname{Re}(\sigma), \quad |\sigma| > 1],$$

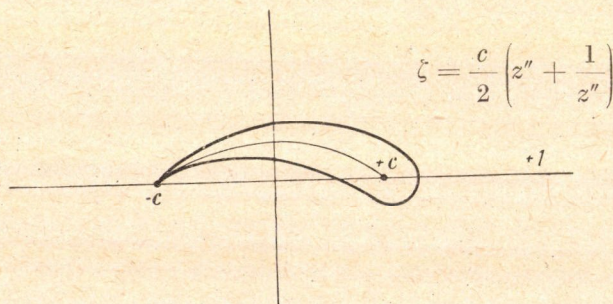
akkor

$$(6) \quad \sigma'' = \frac{\sigma_1 + a^2(1 + \sigma_1) + \delta}{1 - \delta} > \frac{1 + \delta}{1 - \delta}.$$

A

$$(7) \quad \zeta = \frac{c}{2} \left(z'' + \frac{1}{z''} \right)$$

leképezés a K_0 kört egy, a $-c$ és $+c$ pontokat összekötő körívbe, a K'' kört egy Z Zsukovszkij-profilba viszi át (4. ábra). A σ_1 -et úgy választjuk meg,



4. ábra

hogy a $z'' = \sigma''$ pont a $\zeta = 1$ pontba menjen át, azaz :

$$(8) \quad 1 = \frac{c}{2} \left(\sigma'' + \frac{1}{\sigma''} \right),$$

$$(9) \quad \sigma'' = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}.$$

Ezek után csupán az van hátra, hogy a profilt az $1/2$ pontra tükrözzük, amit a

$$(10) \quad \tau = 1 - \zeta$$

leképezéssel érünk el. A (3), (4), (7), (10) leképezések összetevéseként adódó

$$\tau = f(z)$$

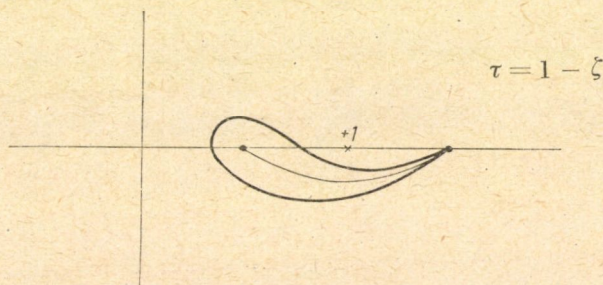
leképezés inverzét, a

$$z = f^{-1}(\tau) = f^{-1} \left(e^{\frac{2\tau}{a} u} \right) = \varphi(u)$$

leképezést behelyettesítve (2)-be, a

$$(11) \quad w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\varphi(u) - \sigma} + (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\varphi(u) - \sigma^{-1}} - \\ - (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{\varphi(u)},$$

komplex potenciálhoz jutunk. Azt állítjuk, hogy éppen a vizsgált áramlás komplex potenciálja áll előttünk. Tekintve, hogy az előbbi konstrukció a



5. ábra

profilsor körüláramlását biztosítja, csupán az áramlásnak a $\operatorname{Re}(u) = \pm\infty$ -beli sebességét kell megvizsgálnunk. Mint ismeretes, ha V_x , V_y jelölik a sebesség-komponenseket :

$$-V_x + iV_y = \frac{dw}{du} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{f'(z)} \frac{2\pi}{a} \tau.$$

Minthogy

$$(12) \quad \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_1) \frac{1}{z - \sigma} - (Q - i \Gamma_1) \frac{1}{z - \bar{\sigma}^{-1}} + (Q - i \Gamma_2) \frac{1}{z},$$

és $\operatorname{Re}(u) = -\infty$ esetén $\tau = 0$, $z = \sigma$ és

$$\lim_{z \rightarrow \sigma} (z - \sigma) \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_1), \quad \lim_{z \rightarrow \sigma} \frac{\tau}{z - \sigma} = f'(\sigma),$$

ezért $\operatorname{Re}(u) \rightarrow -\infty$ esetén

$$-V_x + i V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} (Q + i \Gamma_1),$$

$$V_x \rightarrow \frac{2\pi}{d} Q = \xi, \quad V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} \Gamma_1 = \eta_1.$$

Minthogy másrészt $\operatorname{Re}(u) = +\infty$ esetén $\tau = \infty$, $z = \infty$ és

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_2), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\tau}{z} = f'(\infty),$$

ezért $\operatorname{Re}(u) \rightarrow +\infty$ esetén

$$-V_x + i V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} (Q + i \Gamma_2),$$

$$V_x \rightarrow \frac{2\pi}{d} Q = \xi, \quad V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} \Gamma_2 = \eta_2,$$

Mint látjuk, a Q , Γ_1 , Γ_2 mennyiségek az áramlás ∞ -beli sebesség-komponenseitől függenek:

$$\xi = V_x(\pm \infty) = \frac{2\pi}{d} Q$$

$$(13) \quad \eta_1 = V_y(-\infty) = -\frac{2\pi}{d} \Gamma_1$$

$$\eta_2 = V_y(+\infty) = \frac{2\pi}{d} \Gamma_2$$

(Megjegyezzük, hogy az áramlás forrásmentessége miatt szükségképpen $V_x(-\infty) = V_y(+\infty)$. Az áramlás α , illetve β beesési, illetve kilépési szögét a

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta_1}{\xi} = -\frac{\Gamma_1}{Q}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta_2}{\xi} = -\frac{\Gamma_2}{Q},$$

összefüggésekből lehet meghatározni.)

Megjegyezzük, hogy a δ paraméter a Z profil vastagságától, az a paraméter a görbülségétől, a c paraméter a nagyságától függ. Utóbbi onnan látható, hogy l -el jelölve a profil „fókusz távolságát”,

$$2\pi \frac{l}{d} = \log \frac{1+c}{1-c}.$$

3. §.

Az áramlás sebességének nagysága:

$$\left| \frac{dw}{du} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \left| \frac{dz}{dz''} \right| \left| \frac{dz''}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{du} \right|.$$

Mint hogy ennek mindenütt végesnek kell lennie, de ugyanakkor

$$\left[\frac{dz''}{d\zeta} \right]_{z''=-1} = \left[-\frac{2}{c} \frac{z''^2}{1-z''^2} \right]_{z''=-1} = \infty,$$

$$\left[\frac{dz}{dz''} \right]_{z''=-1} \neq 0, \quad \left[\frac{d\zeta}{du} \right]_{\zeta=-c} \neq 0,$$

tehát szükségképpen:

$$(15) \quad \left[\frac{dw}{dz} \right]_{z=-1} = 0.$$

(12) alapján tehát:

$$\begin{aligned} 0 &= (Q + i\Gamma_1) \frac{1}{1+\sigma} + (Q - i\Gamma_1) \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} - (Q - i\Gamma_2) = \\ &= Q \left\{ \frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} - 1 \right\} + i\Gamma_1 \left\{ \frac{1}{1+\sigma} - \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} \right\} + i\Gamma_2 = \\ &= Q \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{(1+\sigma)(1+\sigma)} - i\Gamma_1 \frac{\sigma\bar{\sigma} - 1}{(1+\sigma)(1+\bar{\sigma})} + i\Gamma_2; \\ 0 &= Q \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{i} - \Gamma_1(\sigma\bar{\sigma} - 1) + \Gamma_2(1+\sigma)(1+\bar{\sigma}) = \end{aligned}$$

$$= (1+\sigma_1) \{ 2aQ - \Gamma_1[\sigma_1 - 1 + a^2(\sigma_1 + 1)] + \Gamma_2(1+a^2)(1+\sigma_1) \},$$

elhasználva (5)-öt. Továbbá (6) alapján:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - 1 + a^2(\sigma_1 + 1) &= (1-\delta)(\sigma'' - 1) - 2\delta, \\ (1+\sigma_1)(1+a^2) &= (1-\delta)(\sigma'' + 1), \end{aligned}$$

tehát folytatólag

$$2aQ - \Gamma_1\{(1-\delta)(\sigma''-1) - 2\delta\} + \Gamma_2(1-\delta)(\sigma''+1) = 0.$$

Itt σ'' értékét (9)-ből helyettesítve, és a $\frac{2\pi}{d} \frac{c}{1-\delta}$ tényezővel szorozva, (13) alapján:

$$(16) \quad \frac{2ac}{1-\delta} \xi + \left(1 - c + \sqrt{1-c^2} - \frac{2\delta c}{1-\delta}\right) \eta_1 - (1 + c + \sqrt{1-c^2}) \eta_2 = 0,$$

illetve (14) alapján:

$$(17) \quad \frac{2ac}{1-\delta} + \left(1 - c + \sqrt{1-c^2} - \frac{2\delta c}{1-\delta}\right) \operatorname{tg} \alpha - (1 + c + \sqrt{1-c^2}) \operatorname{tg} \beta = 0.$$

(16), illetve (17) azt mutatják, hogy a ξ , η_1 , η_2 (illetve α , β) mennyiségek nem függetlenek egymástól hanem ξ , η_1 már az η_2 -t (illetve α a β -t) meghatározza. A (17) formula az áramlás „törési törvényének” tekinthető. Speciálisan az $a = \delta = 0$ esetben

$$(18) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}},$$

4. §.

Számítsuk ki a felhajtóerőt. Ha C a kvázi-Zsukovszkij profil kontúrja, a Blasius—Csapligin jól ismert formula alapján a felhajtóerő:

$$P = \frac{1}{2} i \oint_C \left(\frac{dw}{du} \right)^2 du = \frac{1}{2} i \oint_{|z|=1} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} dz,$$

ha a folyadék sűrűségét egységnyinek vesszük. Minthogy az integrandus $|z| < 1$ -ben egyértékű és meromorf, tehát a reziduum-tétel alapján:

$$(19) \quad P = -\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res} \left\{ \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} dz \right\}.$$

Tekintettel $\frac{dw}{dz}$ (12) alatti előállítására, valamint arra, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \frac{dz}{dz'} \frac{dz'}{dz''} \frac{dz''}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{2\pi}{d} \frac{1-\delta}{1+ia} \frac{z''^2}{z''^2-1} \left(z'' + \frac{1}{z''} - \frac{2}{c} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{d} \frac{1-\delta}{1+ia} \frac{z''(z''-\sigma'')(z-\sigma''^{-1})}{z''^2-1}, \end{aligned}$$

csupán $z = 0$, $z = \bar{\sigma}^{-1}$, $z'' = 1$ pontbeli reziduumokat kell figyelembe venni. (A $z = z'' = -1$ pontban nincs pólus, (15) alapján.) Ezen reziduumok meghatározása a δ , a , c paraméterek rögzített értékei mellett semmi nehézséget nem okoz.

A számítást példaképpen abban a legegyszerűbb speciális esetben végezzük el, amikor $a = 0$, $\delta = 0$, c tetszőleges. Ekkor $z'' = z$, $\sigma'' = \sigma = \bar{\sigma}$. A $z = 0$ -ban elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\text{Res}(0) = -\frac{2\pi}{d}(Q - i\Gamma_2)^2.$$

A $z = \bar{\sigma}^{-1} = \sigma^{-1}$ helyen elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\text{Res}(\sigma^{-1}) = \frac{2\pi}{d}(Q - i\Gamma_1)^2.$$

A $z = 1$ helyen ugyancsak elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\begin{aligned} \text{Res}(1) &= \left\{ -(Q + i\Gamma_1) \frac{1}{1 - \sigma} - (Q - i\Gamma_1) \frac{1}{1 - \sigma^{-1}} + (Q - i\Gamma_2) \right\} \frac{2\pi}{d} \left(1 - \frac{1}{c} \right) = \\ &= - \left(\Gamma_1 \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \Gamma_2 \right)^2 \frac{2\pi}{d} \left(1 - \frac{1}{c} \right) = \left(\Gamma_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} - \Gamma_2 \right)^2 \frac{2\pi}{d} \left(\frac{1}{c} - 1 \right) = \\ &= \Gamma_1^2 \frac{2\pi}{d} \frac{4c}{1 + c} = \frac{4\pi}{d} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2), \end{aligned}$$

felhasználva (9)-et és (18)-at. Tehát, (13)-at felhasználva:

$$\begin{aligned} P &= -\pi \frac{2\pi}{d} \{ -(Q - i\Gamma_2)^2 + (Q - i\Gamma_1)^2 + 2(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2) \} = \\ &= -\frac{d}{2} \left(\frac{2\pi}{d} \right)^2 \{ \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 2iQ(\Gamma_1 - \Gamma_2) \} = \\ &= \frac{d}{2} \{ \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2i\xi(\eta_1 - \eta_2) \} = P_x - iP_y, \end{aligned}$$

$$P_x = \frac{d}{2} (\eta_2^2 - \eta_1^2) = -\frac{c}{1 + c} d \eta_1^2; \quad P_y = d \xi (\eta_1 - \eta_2) = d \left(1 - \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} \right) \xi \eta_1.$$

Az általános esetben is P mint a ξ , η_1 , η_2 sebesség-komponensek homogén kvadratikus alakja adódik.

A fenti eredmények a Ganz Vagon és Gépgyár egy megbízásával kapcsolatban jöttek létre, amelyet FREUD GÉZA osztályvezető kezdeményezésére az Intézet Differenciálegyenletek-osztálya számára végeztem.

(Beérkezett: 1956. VI. 25.)

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ ПРОФИЛЕЙ
КВАЗИ-ЖУКОВСКОГО ТИПА

Т. КÖVÁRI

Резюме

Под рядом профилей понимается множество расположенных вдоль прямой равноотстоящих конгруэнтных и одинаково расположенных профилей. Рассмотрим плоскостный поток, который под некоторым углом падает на ряд профилей. Ряд профилей изменяет направление потока, а поток оказывает силовое влияние на профили. В настоящей статье (для специальных, похожих на профили Жуковского профилей) находится комплексный потенциал потока, величина изменения направления потока и «подъемная сила», действующая на профили.

HYDRODYNAMICAL INVESTIGATION OF QUASI-ŽUKOWSKY PROFILE-ROWS

Т. KÖVÁRI

Summary

We consider an infinity of profiles, which are equidistantly arranged along a straight line. This arrangement we call a profile-row. Let us consider a flow in the plane, which falls with a given angle on the profile-row. The profile-row changes the direction of the flow, on the other hand the flow exerts force on the profiles. In the present paper we determine (in case of special profiles, similar to the Žukowsky-type) the complex potential of the flow, the change in the direction and the lifting force.