

ÚJ KÉSZÜLÉK SÍKBELI PROJEKTÍV TRANSZFORMÁCIÓ VÉGREHAJTÁSÁRA

HORVÁTH FERENC

Bevezetés

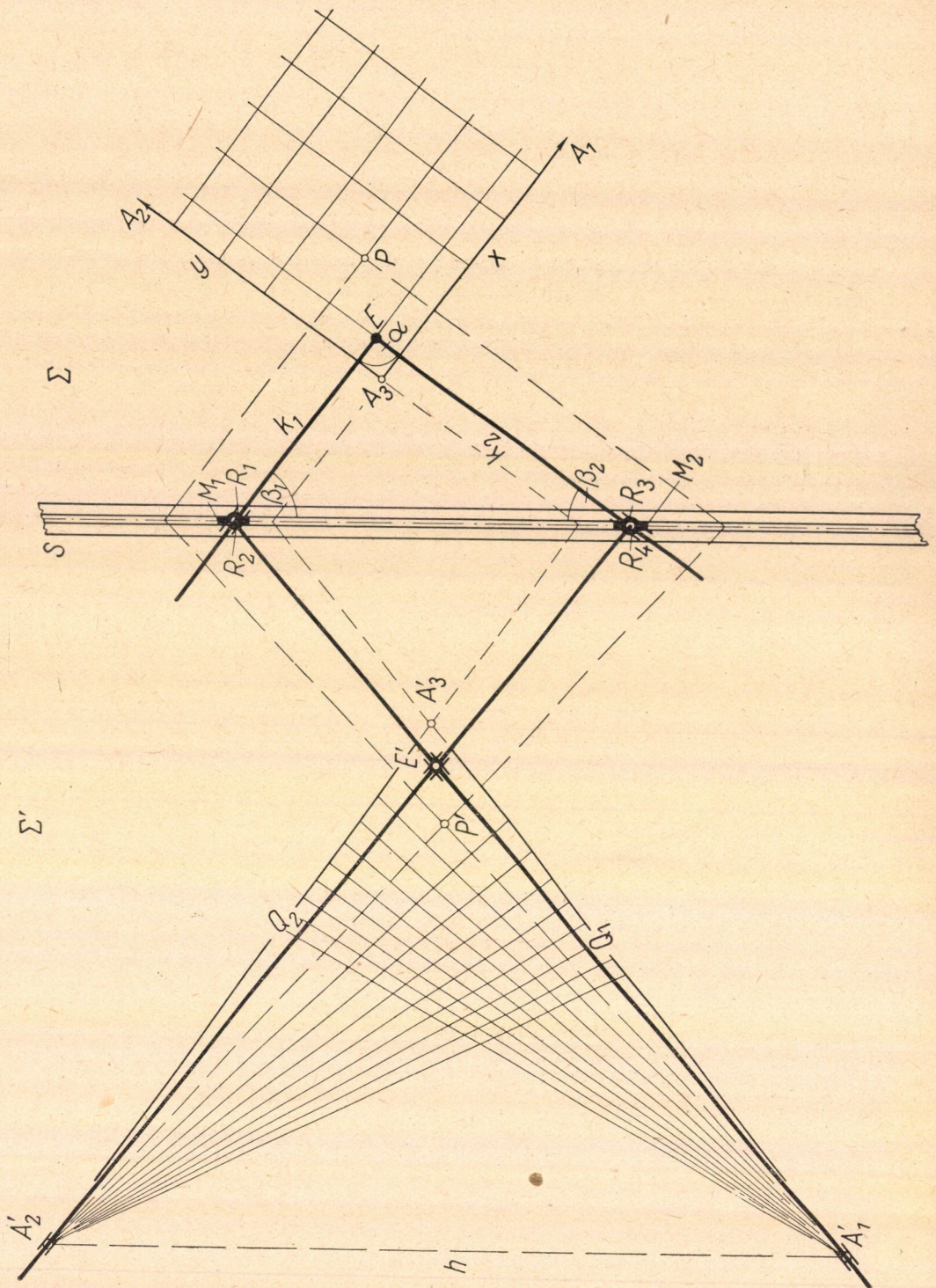
Nomogramok tervezésénél gyakran szükséges olyan projektív transzformáció alkalmazása, amely a Descartes-féle koordinátarendszert projektív koordinátarendszerbe viszi át. Egy nomogram Descartes-koordinátarendszerbeli pontjainak transzformálása projektív koordinátarendszerbe — az alkalmasan választott transzformációs formula segítségével — hosszadalmas számítási feladatot jelent, különösen bonyolultabb, többváltozós függvénykapcsolat ábrázolása esetén. Egy előző dolgozatban [1] felvetettük annak lehetőségét, hogy a nomogramok projektív transzformációját mechanikus úton, készülék, úgynevezett perspektrográf segítségével hajtsuk végre, mely esetben a számítási munkát megtakaríthatjuk. A dolgozatban egy ilyen készüléket ismertetünk. Előnye, hogy hosszadalmas számítási munkát takarítunk meg, mert viszonylag rövid idő alatt kiválaszthatjuk a nomogramnak a követelményeknek legjobban megfelelő transzformált alakját, és a nomogramnak ily módon megválasztott, kivitelezésre szánt transzformált alakját a készülék segítségével fel is rajzolhatjuk. Ez esetben célszerűnek mutatkozik készülékünk kísérőtűjének meglevő derékszögű koordinátográfunk rajzolótűjéhez való illesztése.

1. §. A készülék és működése

Legyen E a Σ síkon az (x, y) koordinátarendszerben az egymáshoz α szög alatt mereven illesztett k_1, k_2 rudak csúcspontja (1. ábra). Az α mindenkor az x és y koordinátaegyenesek által bezárt szög. Az R_1 és R_2 , illetve R_3 és R_4 az S sín vájatában gördülő M_1 , illetve M_2 késes kerék két-két egymásbaépített (emeletes) csapja. Az egymásba épített csapok közül az alsó rész (R_1, R_3) tetszőleges helyzetben rögzített, míg a felső csap (R_2, R_4) szabadon forog.

A k_1 és k_2 rúd az S sínnel közbezárt β_1 , illetve β_2 szög irányában keresztül csúszhat az R_1 , illetve R_3 csapon. A β_1 és β_2 szög beállítása az R_1 , illetve R_3 csap rögzítésével történik az (x, y) koordinátarendszer Σ síkbeli helyzetének megfelelően.

A Σ' síkon az A'_1 , illetve A'_2 rögzített pont körül forgó csapokat jelent, amelyeknek h összekötő egyenese párhuzamos az S sínnel. Az R_2 és R_4 forgó



csaphoz rögzítve van a Q_1 , illetve Q_2 rúd egyik vége, míg a másik az A_1' , illetve A_2' forgócsapon keresztül csúszhat. A Q_1 és Q_2 rudak egymást az E' közös forgócsapostól csúszkán áthatolva keresztezik, így az E' mindkét rúdon egyszerre és külön-külön is — a rudak mozgásától függően — csúszhat.

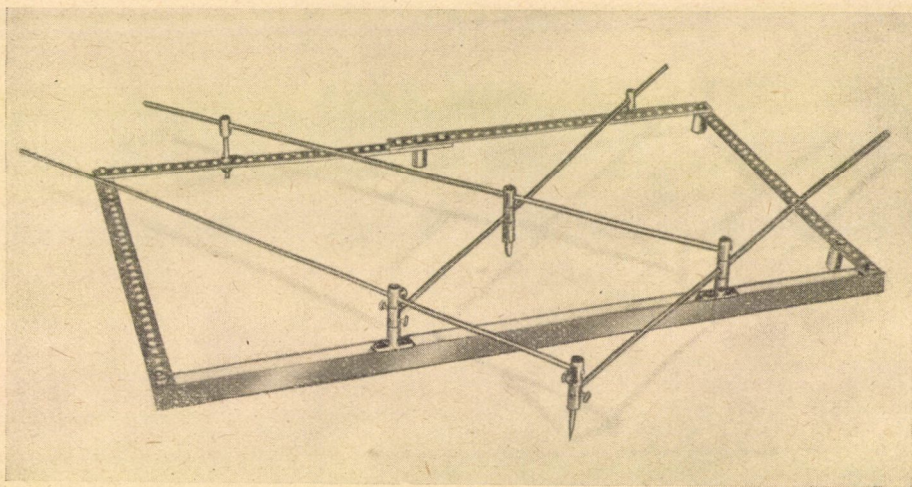
Helyezzünk az E -be kísértőtűt, az E' -be pedig rajzolóűtűt, és kísérvük figyelemmel a készülék mozgását.

Az E kísértőtű elmozdításával a k_1 , illetve k_2 rúd az S sínhez képest rögzített β_1 , illetve β_2 szög alatt csúszik keresztül az R_1 , illetve R_3 csapon, miközben ez a mozgás az M_1 , illetve M_2 kérés kerekeket az S sínen elmozdulásra kényszeríti. Az E kísértőtűnek az S sínhez való közeledésével az M_1 és M_2 kérés kerekek egymáshoz közelednek, ellenkező esetben távolodnak.

Az M_1 és M_2 kerekek elmozdulásával a Q_1 és Q_2 rúd az R_2 , illetve R_4 csappal együtt elfordul, és az E' közös csúszkát elcsúsztatja. Ugyanekkor a Q_1 és Q_2 rudak az A_1' , illetve A_2' rögzített forgó csapokon keresztül csúsznak, mivel az $A_1'R_2$, illetve $A_2'R_4$ távolság a mozgásnak megfelelően változott.

Rögzítsük az (x, y) koordinátarendszert a Σ síkon, és feleltessük meg a leképezés vizsgálatánál E -nek a Σ' sík E' pontját.

Csúsztassuk végig A_1 irányában az E kísértőtűt, akkor csak az M_2 kerék mozdul el, ami a Q_2 rudat A_2' körül való forgatásra és azon keresztül átcsúszásra kényszeríti. Ezzel egyidejűleg a forgó Q_2 rúd az E' csúszkát a nyugvó Q_1 rúdon A_1' irányában elcsúsztatja. A Σ sík $A_1 = (1, 0, 0)$ ideális (végtelen távoli) pontjának ezek szerint a Σ' síkon az A_1' pont a megfelelője. Ugyanígy belátható, hogy az $A_2 = (0, 1, 0)$ ideális pontnak a Σ' síkon az A_2' pont felel meg. Ha az E pont az S sínre illeszkedik, akkor a képével, E' -vel egybeesik.



2. ábra

A készülék modellje a 2. ábrán látható. Elkészítéséért ezúton fejezem ki köszönetemet ELTER JÁNOSNAK, a Magyar Tudományos Akadémia Csillag-

vizsgáló Intézete technikusának. A modellel való kísérletezés tapasztalatai alapján kívánjuk a készüléket végleges formájában elkészíteni, figyelembe véve a precíziós kivitelezés technikai követelményeit. Ezért itt a végleges mechanikai konstrukcióra vonatkozó elképzeléseinkre részletesen nem térünk ki.

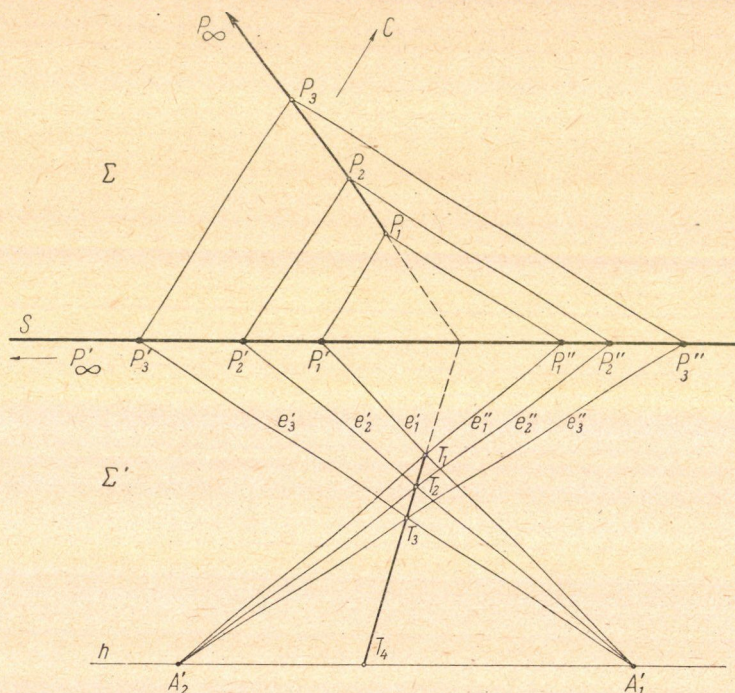
2. §. A készülék által megvalósított projektív leképezés igazolása

Látható, hogy a Σ tárgysík derékszögű négyszög-hálózata a Σ' síkon Moebius-rácsba megy át, hiszen a készülék működése éppen a Moebius-rács ismert szerkesztési eljárásának felel meg. A készülék leképezése projektív, sőt perspektív is, azaz a megfelelő tárgy- és képpontokat összekötő egyenesek közös O pontba, a perspektivitás centrumába futnak össze.

Az utóbbi állításra a teljesség kedvéért rövid bizonyítást adunk.

Először megmutatjuk, hogy a Σ tárgysík bármely egy egyenesben fekvő három P_1, P_2, P_3 pontjának egy egyenesben fekvő T_1, T_2, T_3 képpont-hármas felel meg.

Vegyünk fel a Σ síkon egy egyenesben fekvő P_1, P_2, P_3 ponthármas, tartójuk végtelen távoli pontját jelöljük P_∞ -nel. Szerkesszük meg a készülék működési elvének megfelelő T_1, T_2, T_3 képpontheármas (3. ábra). A készülék



3. ábra

három különböző helyzetének megfelelően az M_1 és M_2 késes kerék három-három különböző helyzetet vesz fel, jelöljük ezeket így: P'_1, P'_2, P'_3 , illetve P''_1, P''_2, P''_3 , a Q_1 és Q_2 rúd három-három különböző helyzetének meg-

felelő egyenesek pedig legyenek e'_1, e'_2, e'_3 , illetőleg e''_1, e''_2, e''_3 . Jelölje továbbá a T_1T_2 egyenesnek az e'_3 -n fekvő pontját T'_3 , az e'_3 -n fekvő pontját T''_3 , az $A'_1A'_2$ -n fekvő pontját pedig T_4 . Feladatunk: bebizonyítani, hogy

$$T'_3 \equiv T''_3 \equiv T_3.$$

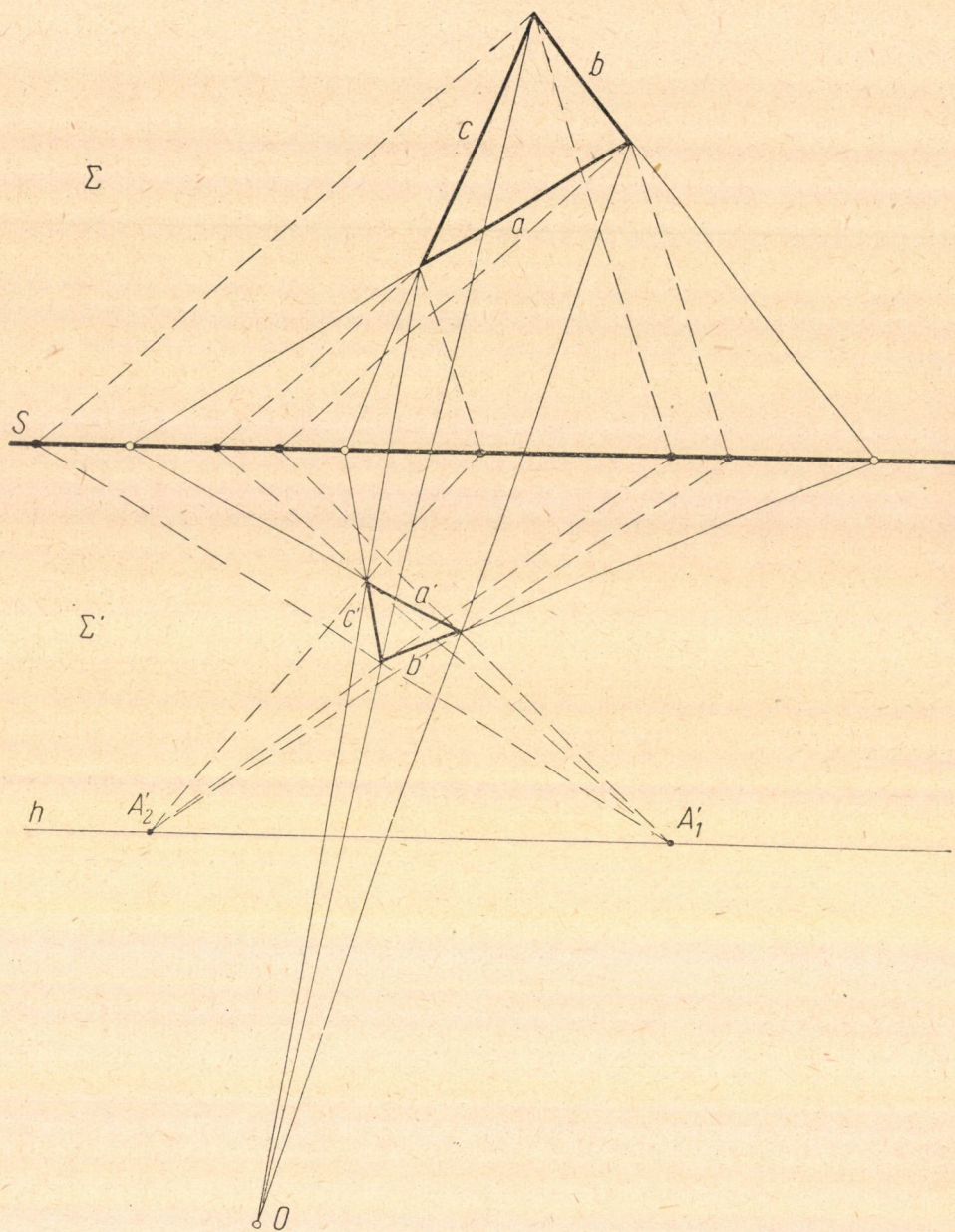
A szerkesztésből világos, hogy a $(P_1P_2P_3P_\infty)$ kettősviszony megegyezik a $(T_1T_2T'_3T_4)$ kettősviszonnyal, hiszen a P_1, P_2, P_3, P_∞ pontnégyesnek a C végtelen távoli pontból az S egyenesre vetített $P'_1, P'_2, P'_3, P'_\infty$ képe azonos a T_1, T_2, T'_3, T_4 pontnégyesnek az A'_1 -ből vetített képével.

Hasonlóképpen látható be, hogy $(P_1P_2P_3P_\infty) = (T_1T_2T''_3T_4)$, ennél fogva $(T_1T_2T'_3T_4) = (T_1T_2T''_3T_4)$, és így $T'_3 \equiv T''_3$, de ekkor e'_3, e''_3 és T_1T_2 közös pontban metszik egymást, vagy más szóval: T_3 (az e'_3 és e''_3 metszéspontja) rajta fekszik a T_1T_2 egyenesen.

A bizonyításból is látható, hogy az A'_1, A'_2 csapokkal meghatározott egyenest gondosan párhuzamosra kell állítanunk az S sínnel, különben a leképezés nem lesz egyenes-tartó.

Mivel pedig az S egyenesen fekvő pontok képpontjaikkal egybeesnek, ezért minden, a Σ tárgysíkon fekvő, a, b, c oldalú háromszögnek és a Σ' síkbeli, a', b', c' képének megfelelő aa', bb', cc' oldalpárja az S sínen metszi egymást (4. ábra). A leképezés már bizonyított egyenes-tartó voltából és a Desargues-tételből következik, hogy van egy O perspektív centrum, amelyet a háromszögek megfelelő csúspontjait összekötő egyenesek közös metszéspontja jelöl ki:

(Beérkezett: 1956. VII. 28. — Átdolgozva: 1956. VIII. 15.)



4. ábra

IRODALOM

- [1] HORVÁTH FERENC: „Nomogrammok kivitelezése.” A *Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 343–352.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЕКАРТА В ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ НОВОГО ИНСТРУМЕНТА

F. HORVÁTH

Резюме

При планировании номограмм часто необходимо проективное преобразование системы координат Декарта. Чтобы избежать вычислений, найти преобразованную форму номограммы и, приключая к координатографу, окончательно построить номограмму, был сконструирован описываемый в работе инструмент. Принцип его действия построен на графическом преобразовании квадратной решетки в решетку Моебиуса. В ходе доказательства используется перспективность и теорема Декарта.

NEUES GERÄT ZUR PROJEKTIVEN TRANSFORMATION EINES EBENE KOORDINATENSYSTEMS

F. HORVÁTH

Zusammenfassung

Bei der Konstruktion von Nomogrammen ist oft die Transformation des Koordinatensystems nötig. Das in der Arbeit beschriebene Gerät dient zur Vermeidung von Kalkulationen zur experimentellen Bestimmung der Gestalt von Nomogrammen, und — indem es man zum Koordinatograph schaltet — zur Bestimmung der endgültigen Gestalt von Nomogrammen.

Das Gerät beruht auf der graphischen Transformation von quadratischen Gittern in Moebiussche Gitter. Bei dem Beweise werden die Perspektivität und der Desarguesche Satz benutzt.