LA STRUCTURE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE OU DU TYPE PARABOLIQUE[1]

MIRON NICOLESCU[2]

1. §.

L'un des problèmes qui passionnait le plus les jeunes chercheurs en mathématiques de Roumanie, il y a un quart de siècle, c'était le problème d'étendre, d'une manière quelconque, la notion de fonction monogène d'une variable complexe. Je dois avouer que ce fut une de mes préoccupations comme candidat au doctorat. Ces préoccupations se sont manifestées dans les efforts d'obtenir une transformation ponctuelle de l'espace à quatre dimensions en lui-même, qui puisse conserver le plus possible des propriétés de la transformation conforme. C'est comme ça que je suis arrivé, dans l'un des chapitres de ma Thèse de 1928, au système différentiel suivant

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_4} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2}.$$

Mais je n'ai pas su trop que faire de ce système, après avoir mis en évidence le fait que les fonctions u_1, u_2, u_3, u_4 qui vérifient un tel système sont nécessairement des fonctions harmoniques des quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4. De sorte que j'ai abandonné cette direction de recherches (bien à tort, car quelques années plus tard ce système devait reparaître dans les recherches de R. Fueter et de mon collègue Moisil sur les quaternions monogènes), et j'ai pris un autre chemin. Cette nouvelle direction m'a été suggérée par quelques observations bien simples :

---

[1] Conférence tenue à l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie le 24 janvier 1955.

[2] Professeur á l'Université de Bucarest.

Tout d'abord, bien des propriétés importantes des fonctions analytiques complexes, et des familles de telles fonctions, sont en réalité des propriétés de leurs composantes réelles et se retrouvent pour les fonctions harmoniques de trois ou plusieurs variables. Deuxièmement, j'ai observé que la démonstration de ces propriétés, qui se fait habituellement (même dans les traités récents), à l'aide de la formule bien connue de Poisson, peut se faire plus simplement, en partant de la propriété d'invariance par médiation sphérique, mise en évidence par Gauss. Troisièmement, j'ai constaté que cette propriété d'invariance caractérise, dans des conditions très générales (mises en évidences par E. E. Levi, Volterra et Tonelli) les fonctions harmoniques d'un nombre arbitraire de variables.

D'autre part, en mécanique des fluides et en résistance des matériaux, se présentaient d'une manière très naturelle les fonctions appelées depuis *biharmoniques*, c'est-à-dire les solutions de l'équation de Laplace deux fois itérée :

$$\triangle \triangle u = \triangle^2 u = 0 \ .$$

Tout cela m'a donné l'idée d'une étude systématique de la classe des fonctions vérifiant l'équation itérée p fois ($p > 1$) :

$$\triangle^p u = 0 \ , \tag{1}$$

c'est-à-dire des fonctions polyharmoniques, dans l'espoir de retrouver, dans leur structure, quelque chose de la structure des fonctions harmoniques. Mais, comme dans le dernier cas, l'équation différentielle (1) ne pouvait pas donner directement des renseignements sur la structure interne des fonctions qu'elle définit. Il fallait se rappeler que dans le cas des fonctions analytiques, comme dans le cas des fonctions harmoniques, c'était une propriété integrale, l'intégrale de Cauchy dans le premier, l'intégrale de Poisson ou de Gauss dans le second, qui constituait la base de toute recherche. Donc, le succès de toute recherche concernant la structure des fonctions polyharmoniques dépendait de la résolution préalable du problème suivant : Peut-on caractériser une fonction polyharmonique par une propriété intégrale, analogue à la propriété exprimée par le théorème de Gauss?

J'ai donné une réponse affirmative à ce problème dans les années 1931—1932. Je rappelle ici, brièvement, le résultat obtenu :

Si D est un domaine de l'espace euclidien à n dimensions, désignons par D_ϱ le domaine de D après la suppression de l'ensemble des points des sphères de rayon ϱ centrées sur la frontière de D. Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(P)$ une fonction définie sur D, sommable sur ce domaine. Soit encore $S_R(P)$ la sphère de rayon r, ayant pour centre le point P. Nous désignerons par

$$\mu_0(u\,; P\,; r)$$

la moyenne des valeurs de u sur $Fr\ S_r(P)$.

Il faut remarquer que cette moyenne s'exprime par une intégrale $(n-1)$-uple et que, par suite du théorème bien connu de Fubini, elle peut ne pas exister (avoir de sens) pour une infinité de valeurs de r, de mesure (linéaire) nulle.

Introduisons maintenant la suite des moyennes $\{\mu_s(u\,;\,P\,;\,r)\}$ définie par récurrence de la manière suivante

$$\mu_s(u\,;\,P\,;r) = \frac{n}{r^n}\int_0^r \varrho^{n-1}\,\mu_{s-1}(u\,;\,P'\,;\varrho)\,d\varrho \qquad (s = 1, 2, \ldots)\,.$$

Il est évident que pour $s > 0$ la restriction concernant l'existence de μ_0 disparaît, puisqu'un ensemble de mesure nulle n'a pas d'influence sur le procès d'intégration.

Posons encore

$$V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \dfrac{n}{n+2} & \ldots & \dfrac{n}{n+2p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\dfrac{n}{n+2p-2}\right)^{p-1} \end{vmatrix}$$

et désignons par

$$V\left(\mu(u\,;P\,;r)\,, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)$$

le déterminant obtenu du précédent en substituant à la première colonne la suite

$$\mu_0(u\,;P\,;r)\,,\ \mu_1(u\,;P\,;r)\,,\ \ldots\,,\ \mu_{p-1}(u\,;P\,;r)\,.$$

Le résultat fondamental que j'ai obtenu peut se formuler comme il suit :

1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $u(P)$, définie sur D, sommable sur ce domaine, soit polyharmonique d'ordre p à l'intérieur de ce domaine, est qu'il existe un nombre positif ϱ^* tel que, pour tout $\varrho \leqq \varrho^*$ on ait, en chaque point du domaine D_ϱ*

$$(2) \qquad u(P) = \frac{V\left(\mu(u\,;P\,;r)\,, \dfrac{n}{n+2}, \ldots, \dfrac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \dfrac{n}{n+2}, \ldots, \dfrac{n}{n+2p-2}\right)}$$

dès que $r \leqq c$.

Il est visible que cette caractérisation *intégrale* des fonctions polyharmoniques d'un ordre quelconque $p \geqq 1$, constitue bien une extension de la caractérisation des fonctions harmoniques par la relation de GAUSS.

Grâce au théorème précédent, l'étude de la structure des fonctions polyharmoniques est considérablement facilitée. Voici quelques conséquences de ce théorème :

2. *Une fonction polyharmonique, bornée dans tout l'espace, est nécessairement une constante.*

3. *L'éspace des fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqq p$ est compact par rapport à la convergence uniforme.*

4. *Si une série de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqq p$ converge uniformément sur la frontière d'un domaine normal et s'il en est de même des $p-1$ séries formées avec les laplaciens successifs, alors la série converge uniformément à l'intérieur* (vers une fonction polyharmonique d'ordre $\leqq p$, en vertu de **3.**).

5. *Si une série de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqq p$ complètement sousharmoniques dans D, converge en un point $P \in \operatorname{Int} D$, alors cette série converge uniformément dans D.*

Le dernier énoncé a besoin d'une explication. J'appelle fonction complètement sousharmonique dans D, toute fonction vérifiant dans ce domaine les relations

$$u \geqq 0\,, \quad \triangle u \leqq 0\,, \quad \triangle^2 u \geqq 0\,, \ldots, \triangle^p u = 0\,.$$

Vous reconnaissez dans la proposition **2.** l'extension du théorème bien connu de LIOUVILLE, dans la proposition **3.** l'extension d'un théorème de WEIERSTRASS, dans les deux dernières propositions l'extension de deux théorèmes célèbres de HARNACK. Tous ces résultats sont maintenant d'un usage courant. L'ensemble des résultats connus jusqu'en 1936 a été consigné dans le fascicule [1].

Il est évident que, depuis 1936 et jusqu'à l'heure actuelle, l'ensemble de nos connaissances sur les fonctions polyharmoniques a considérablement augmenté. J'ai moi-même attaqué en 1940 le problème du comportement d'une fonction polyharmonique autour d'un point singulier isolé P_0, obtenant le résultat suivant :

6. *Si n est impair, ou bien si n est pair et $p < n/2$, alors $u(P)$ peut s'écrire sous la forme suivante*

$$u(P) = \sum_{k=0}^{p-1} \varrho^{2k}\, u_k(P)\,, \tag{3}$$

où $\varrho = \overline{PP_0}$ et les fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ sont harmoniques en tout point du domaine, sauf au point P_0;

7. *Si n est pair et $p \geqq n/2$, alors on a*

$$u(P) = \sum_{k=0}^{p-1} \varrho^{2k}\, u_k(P) + \log \varrho \cdot \sum_{k=0}^{n-p/2} \varrho^{2k}\, U_{p-n/2+k}(P)\,, \tag{4}$$

où ϱ et les u_k ont la même signification que plus haut, et les U sont des polynomes harmoniques de degré égal à l'indice correspondant.

On a bien voulu donner à la formule (4) le nom de formule de PICONE—NICOLESCU puisque PICONE l'avait trouvé, dans un cas très particulier ($n = p = 2$) (mais ceci, je l'ignorais). Quant à la formule (3), elle conserve, dans le cas singulier traité, le même aspect qu'une formule bien connue, la soit disant formule d'ALMANSI.

En 1954, un de mes élèves, S. TELEMAN a montré que :

8. *Si le second membre de la relation (2) est indépendant, en chaque point, de $r \leqq \varrho$ (et cela pour tout $\varrho > 0$), alors la fonction u coïncide presque partout dans D avec une fonction polyharmonique d'ordre p.* (Voir : [4].)

2. §.

Les succès obtenus dans l'étude des fonctions polyharmoniques m'ont conduit à m'occuper aussi des équations du type parabolique.

Premièrement, j'ai étudié l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ ,$$

en démontrant, indépendamment de A. TYCHONOFF l'unicité de la solution du problème de CAUCHY, avec la loi suivante de croissance pour les données sur l'axe des x :

$$|f(x)| < Me^{Kx^2} \ .$$

Dans le Mémoire [2] j'ai réussi à étendre aux solutions de l'équation de la chaleur le théorème bien connu de LIOUVILLE. Voice l'énoncé de cette extension :

9. *Supposons que dans le demi-plan $t \leqq t_0 - \varepsilon$ (t_0 quelconque), le rapport $u(x, t)/\delta^\alpha$, où δ est la distance du point (x, t) à la droite $t = t_0$, α et ε deux nombres positifs, reste borné. Alors $u(x, t)$ est nécessairement un polynome, de degré $E(\alpha)$ en t.*

En particulier, si $0 \leqq \alpha < 1/2$, u est nécessairement une constante.

Pendant 13 ans, ces recherches n'ont pas eu de suite. En 1950 j'ai commencé à m'occuper de l'équation itérée

$$\left(\triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{(p)} = 0 \qquad \left(\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) \ .$$

Par différence avec l'équation $\triangle^p u = 0$ qui définit les fonctions polyharmoniques, cette dernière équation n'avait pas fait jusqu'à présent l'objet d'une étude systématique.

Les résultats obtenus ont été tellement nombreux, que j'ai dû donner un nom spécial aux solutions de l'équation précédente, à savoir le nom de «*fonctions polycaloriques d'ordre p*». J'ai appelé, aussi, fonction calorique toute solution de l'équation de la chaleur.

J'ai exposé, pendant quleques années, les résultats obtenus, dans des cours de spécialisation, à la Faculté de Mathématiques de l'Université. A la fin, je me suis décidé à les rassembler dans le Mémoire [3].

Je prends la liberté d'exposer ici les principaux résultats de ce Mémoire ainsi que des problèmes non résolus.

Pour éviter les longueurs, j'introduirai les notations

$$\bigcap = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\,; \qquad \bigcup = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Les notations $\bigcap$, $\bigcup^{(p)}$ s'entendent d'elles-mèmes.

Dans le premier chapitre de ce Mémoire, je montre que toute fonction $u(x, t)$, polycalorique d'ordre p dans un certain domaine, peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$u = u_0 + (t - t_0)\, u_1 + \ldots + (t - t_0)^{p-1}\, u_{p-1}\,,$$

u_0, u_1, . . ., u_{p-1} étant des fonctions caloriques.

Une conséquence importante de cette décomposition est que toute fonction polycalorique est analytique par rapport aux variables spatiales et de classe II au sens de Holmgren par rapport à t (la variable temporelle).

Un second problème important concernant les fonctions polycaloriques d'ordre p est résolu dans le chapitre II : on sait que si l'on impose à la solution de l'équation $\bigcap u = 0$ de prendre, pour $t \to t_0$, les valeurs $\varphi(x)$ soumises à la condition

$$|\varphi(x)| < M e^{Kx^2}\,,$$

cette solution s'obtient par la formule bien connue de Poisson

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}}\, d\xi\,. \tag{5}$$

Je me suis proposé de résoudre le problème analogue pour l'équation $\bigcap^{(p)} u = 0$. Seulement, il y a plusieurs extensions possibles, dont voici les deux les plus importantes :

1° On peut demander à déterminer la fonction $u(x, t)$ polycalorique d'ordre p dans la bande

$$0 < t < t_1\,,$$

connaissant les valeurs que la suite

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}$$

prend sur l'axe des x.

2° On peut demander à déterminer la fonction $u(x,t)$ connaissant les valeurs que prend la suite

$$u, \quad \square u, \quad \square^2 u, \quad \ldots, \quad \square^{p-1} u \ ,$$

sur l'axe des x.

J'ai résolu les deux problèmes, en donnant leur solution effective. Pour le premier problème, le résultat est le suivant

10. *Si les fonctions*

$$\varphi_0(x)\,, \quad \varphi_1(x)\,, \quad \ldots, \quad \varphi_{p-1}(x)$$

vérifient les conditions suivantes

1° $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ *est de classe* $C^{2(p-k+1)}$;

2° *Il existe deux constantes positives* M *et* K *telles que*

$$\left|\frac{d^i\varphi_k(x)}{dx^i}\right| < Me^{Kx^2} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+2\,; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1)\,,$$

alors il existe une fonction $u(x,t)$ *et une seule, polycalorique d'ordre* p *dans la bande*

$$0 < t < \frac{1}{4K}\,,$$

et telle que

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi_0(x)\ ,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2\,, \ \ldots\,, \ p-1)\,.$$

Cette solution peut s'exprimer symboliquement par la formule

$$u(x,t) = u(\varphi_0) + \frac{t}{1\,!}\left[u(\varphi_1) - \frac{\partial u(\varphi_0)}{\partial t}\right] + \frac{t^2}{2\,!}\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)\,!}\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]^{(p-1)}.$$

J'ai désigné, par $u(\varphi)$ la fonction calorique se réduisant, pour $t \to 0$, à $\varphi(x)$. Le sens du symbole $\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]^{(k)}$ devient alors très clair :

$$\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]^{(k)} = u(\varphi_k) - \binom{k}{1}\frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} + \binom{k}{2}\frac{\partial^2 u(\varphi_{k-2})}{\partial t^2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}\,.$$

Je dois avouer que j'ai eu à vaincre d'assez grandes difficultés de calcul pour montrer que la fonction ainsi construite vérifie bien les conditions initiales.

La résolution du second problème est bien plus facile. J'énonce ici le résultat obtenu :

11. *Soient*

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad \ldots, \quad f_{p-1}(x)$$

p fonctions continues sur la droite réelle, telles que

$$|f_i(x)| < Me^{Kx^2} \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

M et K étant deux constantes positives. Il existe une fonction $u(x, t)$ *et une seule polycalorique d'ordre p dans la bande* $(0, 1/4K)$ *telle que*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f_0(x)\,; \qquad \lim_{t\to 0} \bigcirc^s u(x,t) = f_s(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Cette fonction est donnée par la formule

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, t)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi\,,$$

où

$$F(x,t) = f_0(x) - \frac{t}{1} f_1(x) + \frac{t^2}{2!} f_2(x) - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} f_{p-1}(x).$$

Ce second problème paraît moins important que le premier problème, au point de vue des applications éventuelles en Physique. En échange, il requiert une importance théorique spéciale, par le fait qu'il nous conduit d'une façon trés naturelle à une notion nouvelle que j'ai appelée *l'analyticité parabolique*.

J'appele dans le Mémoire cité, fonction paraboliquement analytique toute fonction qui, dans la bande $0 < t < 1/4K$ peut se mettre sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(x, t)\,,$$

où les $u_n(x, t)$ sont des fonctions caloriques, vérifiant la loi de croissance

$$|u_n(x,t)| < Me^{Kx^2} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

J'ai pu montrer qu'une fonction paraboliquement analytique peut s'écrire d'une seule manière sous la forme précédente.

Je passerai sur les chapitres consacrés aux problèmes de frontière auquels donne lieu la considération des fonctions polycaloriques d'ordre p, pour arriver plus rapidement à l'étude de la structure des fonctions polycaloriques, définies dans une bande infinie.

Le modèle créé antérieurement pour les fonctions polyharmoniques exigeait qu'on trouvât, ici aussi, une caractérisation intégrale, et non pas différentielle, des fonctions polycaloriques d'ordre p. Il fallait, premièrement, construire une fonctionnelle qui puisse jouer le même rôle que la moyenne circulaire dans la théorie des fonctions harmoniques et polyharmoniques. J'avais déjà construit cette fonctionnelle, dans mon Mémoire de 1937, mais je n'ai pu alors en tirer toutes les riches conséquences que j'en ai tirées depuis 1950.

Voici comment j'ai procédé : La formule de POISSON

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-t_0)}} \frac{u(\xi,t_0)}{\sqrt{t-t_0}}\, d\xi$$

exprime, comme on sait bien, les valeurs de la fonction calorique $u(x, t)$ dans la bande

$$t_0 < t < t_0 + \frac{1}{4K}$$

au moyen des valeurs que cette fonction prend sur la droite $t = t_0$. Faisons, dans la formule précédente, le petit changement de variable $t = t_0 + h$. La formule devient

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} u(\xi, t-h)\, d\xi$$

et sous cette nouvelle forme elle met en évidence une propriété nouvelle des fonctions caloriques, une propriété d'invariance tout-à-fait analogue à la propriété exprimée par le théorème de GAUSS. Elle exprime que le second membre est indépendant de h et j'ai pu montrer en 1937, que cette propriété *caractérise* les fonctions caloriques.

C'est cette propriété qui m'a conduit à étudier la fonctionnelle représentée par l'intégrale précédente, dans le cas général où u n'est plus une fonction calorique, mais une fonction quelconque. Voici le résultat surprenant obtenu :

12. *Désignons par* $v([u]; h)$ *le second membre de l'égalité précédente, c'est-à-dire posons*

$$v([u]; h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u(\xi, t-h)}{\sqrt{h}}\, d\xi\,.$$

Faisons encore les hypothèses suivantes:

1°. La fonction u possède seulement les dérivées partielles nécessaires pour la formation de l'opérateur $\bigcirc^{(p)}u$ *et ces dérivées sont continues dans la bande considérée* $(0, t_1)$.

2°. Il existe deux nombres positifs M *et* K, *avec* $K < 1/4t_1$, *tels que*

$$|D^m u| < Me^{Kx^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2p) .$$

Dans ces conditions, il existe un nombre $\varepsilon_p(h)$, *tendant vers zéro avec* h, *tel que l'on a*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u(\xi, t-h)}{\sqrt{h}} d\xi = u(x,t) + \frac{h}{1!} \bigcirc u(x,t) +$$

$$+ \frac{h^2}{2!} \bigcirc^2 u(x,t) + \ldots + \frac{h^p}{p!} [\bigcirc^p u(x,t) + \varepsilon_p(h)] .$$

Si $\bigcirc^{p+1}u(x,t) \equiv 0$, alors $\varepsilon_p(h) \equiv 0$.

Ce développement où au second membre les opérateurs itérés $\bigcirc u$, $\bigcirc^2 u, \ldots$ apparaissent tout naturellement nous a donné l'idée d'une caractérisation intégrale des fonctions polycaloriques, en utilisant la même voie que j'avais suivie jadis pour les fonctions polyharmoniques. À cet effet, j'ai introduit la suite de fonctionneles définies par récurrence de la façon suivante :

$$\mu_0(u\,;h) = v([u]\,;h) ,$$

$$\mu_s(u\,;h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h h' \mu_{s-1}(u\,;h')\,dh' \qquad (s = 1, 2, \ldots) .$$

Donnons encore une définition : Nous dirons que la fonction u, polycalorique d'ordre p dans la bande $(0, t_1)$, est à croissance complètement régulière dans cette bande, si l'on a dans cette bande

$$|u(x,t)| < Me^{Kx^2},$$

$$|\bigcirc^m u(x,t)| < Me^{Kx^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots, p-1) ,$$

M et K ayant les significations connues.

Avec cette définition, on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

13. *Toute fonction* $u(x,t)$ *polycalorique d'ordre* p *dans la bande* $(0, t_1)$, *à croissance complètement régulière dans cette bande, vérifie, en tout point de la bande, la relation de moyenne*

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \dots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1}
\end{vmatrix}
u(x,t) =
\begin{vmatrix}
\mu_0(u\,;h) & 1 & \dots & 1 \\
\mu_1(u\,;h) & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_{p-1}(u\,;h) & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \dots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1}
\end{vmatrix}.
\tag{6}
$$

Inversement, si $u(x, t)$ est sommable dans la bande considérée, si l'on a

$$|u(x,t)| < Me^{Kx^2}$$

et si la relation (6) est vérifiée en chaque point de cette bande, alors u est nécessairement une fonction polycalorique d'ordre p, à croissance complètement régulière dans la bande considérée.

Une fois en possession d'un tel théorème de moyenne, il était possible d'envisager une étude de la structure des fonctions polycaloriques et des familles de telles fonctions. J'énoncerai ici quelques propriétés obtenues :

14. *Si la fonction $u(x, t)$ polycalorique d'ordre p dans le demi-plan $t \leqq t_1$, à croissance complètement régulière dans ce demi-plan, est bornée dans ce demi-plan, alors elle se réduit nécessairement à une constante.*

15. *L'ensemble des fonctions polycaloriques d'ordre $\leqq p$ dans une bande* $(0, t_1]$, *est compact dans toute bande* $[\varepsilon, t_1]$ $(\varepsilon > 0)$, *par rapport à la convergence uniforme.*

16. *Tout ensemble de fonctions polycaloriques d'ordre $\leqq p$, également bornées dans $[\varepsilon, t_1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, est compact dans cette bande.*

17. *Si la suite de fonctions $\{u_n(x, t)\}$, polycaloriques d'ordre $\leqq p$ dans la bande $[0, t_1]$, converge uniformément sur l'axe des x, s'il en de même des suites*

$$\{\bigcirc u_n\}, \ \dots, \ \{\bigcirc^{p-1} u_n\}$$

et si les fonctions de cette suite sont à égale croissance complètement régulière (j'entends par là qu'il existe deux nombres positifs M et $K < 1/4t_1$, indépendants de n, tels que l'on ait

$$|\bigcirc^k u_n(x,t)| < Me^{Ke^2} \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \dots \\ k = 0, 1, \dots, p-1 \end{pmatrix}$$

dans la bande considérée), alors les suites

$$\{u_n\}, \ \{\bigcirc u_n\}, \ \dots, \ \{\bigcirc^{p-1} u_n\}$$

convergent uniformément dans toute bande $[\varepsilon, t]$ $(\varepsilon > 0)$ vers

$$u, \bigcirc u, \ \dots, \ \bigcirc^{p-1} u\ ,$$

u étant une fonction polycalorique d'ordre $\leqq p$.

Vous rencontrez à nouveau ici les principales propriétés des fonctions et des familles de fonctions harmoniques, cette fois-ci étendues aux fonctions polycaloriques.

J'ai pu aussi étendre aux fonctions polycaloriques, comme je l'avais fait jadis pour les fonctions polyharmoniques, la notion de fonctions sous-harmoniques, introduite dans la science par le prof. F. RIESZ. Dans la classe des fonctions u, ayant les dérivées partielles nécessaires à la formation de $\bigcirc^p u$, les fonctions sous-caloriques d'ordre p sont caractérisées par l'inégalité

$$(-1)^p \bigcirc^p u(x,t) \leqq 0 \ .$$

J'arrèterai là l'exposition des résultats obtenus.

Il me reste à faire quelques remarques d'ordre général sur des problèmes encore non résolus dans cette théorie.

Il y a tout d'abord le problème de la soit dite «analyticité parabolique». Dans un travail antérieur, j'avais défini «l'analyticité hyperbolique». Il y a, enfin, l'analyticité classique des fonctions de variables réelles. La confrontation de ces trois notions fait ressortir une base commune aux trois espèces d'analyticité, que je voudrais souligner ici, comme première conclusion de ma conférence.

Dire qu'une fonction d'une variable réelle est analytique en un certain intervalle, c'est dire que cette fonction est développable, en chaque point de cet intervalle en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, en l'espèce x ou $x-a$, les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\frac{du}{dx} = 0 \ .$$

Dire qu'une fonction de deux variables réelles est hyperboliquement analytique, c'est dire que cette fonction est développable en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, en l'espèce $(x-a)(y-b)$, les coefficients de cette série étant des solutions de l'équation

$$Du = 0 \ .$$

L'analyticité parabolique d'une fonction $u(x, t)$ a été définie plus haut comme la propriété d'être développable en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, à savoir $t-a$, les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\bigcirc u = 0 \ .$$

Il semblerait qu'il manque un chaînon à notre chaîne. Qu'est-ce que pourrait bien être l'analyticité elliptique? Mais ce chaînon a déjà été forgé en 1937 par mon collègue N. CIORANESCU qui a montré que toute fonction *analytique* réelle de *deux* variables peut être développée en une série de puissances de la fonction particulière

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\triangle u = 0 ,$$

c'est-à-dire des fonctions harmoniques, et réciproquement.

Vous voyez donc que dans chaque cas la fonction particulière f qui intervient dans le développement en série par ses puissances successives est telle que l'équation $f = 0$ constitue l'ensemble des lignes caractéristiques de l'opérateur différentiel considéré, tandis que les coefficients du développement sont des solutions de l'équation obtenue en égalant cet opérateur à zéro. Cela suggère un problème général, à savoir le problème d'une analyticité par rapport à un opérateur différentiel donné, mettons un opérateur linéaire, problème qui engloberait les quatre cas particuliers signalés plus haut.

Enfin, un autre problème qui mériterait d'être approfondi, serait le probléme des singularités des classes de fonctions présentées ici.

Je ne puis terminer cette conférence sans remercier de tout coeur mes collègues mathématiciens de Budapest, et aussi ceux de Szeged, dont l'accueil si chaleureux m'a fait presque oublier que j'ai passé la frontière de mon pays. Je conserverai de mon séjour, hélas si brèf à Budapest, et à Szeged, l'image précieuse et réconfortante d'une ardeur toujours jeune, d'une application très sérieuse au travail de la recherche mathématique. C'est là, je pense, l'enseignement le plus précieux que j'ai reçu ici, et que je ne tarderai pas de transmettre à mes collègues roumains.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Nicolescu : *Les fonctions polyharmoniques.* Hermann, Paris, 1936. („Actualités Scientifiques et Industrielles")

[2] M. Nicolescu : «Sur l'équation de la chaleur». *Commentarii Mathematici Helvetici* **10** (1937-38) 3—17.

[3] M. Nicolescu : «L'équation itérée de la chaleur.» *Studii si cercetari Matematice* **5** (1954) 243—332.

[4] S. Teleman : «La méthode de la projection orthogonale et les deux premiers problèmes de la théorie de l'élasticité.» *Bulletin Scientifique de l'Académie de R. P. R.* **7** (1955) 105—125.

ELLIPTIKUS VAGY HIPERBOLIKUS TÍPUSÚ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK SZERKEZETE

M. NICOLESCU

Kivonat

A dolgozat a szerzőnek az iterált Laplace-féle differenciálegyenlet és az iterált hővezetési differenciálegyenlet megoldásaira vonatkozó, már közel harminc éve folyó vizsgálatairól nyújt vázlatos áttekintést.

Az első paragrafus poliharmonikus függvényekkel foglalkozik. Az n-változós u függvényt p-edrendű poliharmonikus függvénynek nevezzük, ha kielégíti a

$$\triangle^p u = 0$$

differenciálegyenletet. E differenciálegyenlet teljesülése helyett lehet az n-változós p-edrendű poliharmonikus függvényeket egy integrális tulajdonsággal is jellemezni. Ez az integrális tulajdonság általánosítása a közönséges harmonikus függvényekre vonatkozó GAUSS-féle gömbi átlagérték-tételnek (lásd az **1.** tételt). E jellemzés birtokában sikerült számos, harmonikus függvényekre vonatkozó tételt (pl. LIOUVILLE tételét, HARNACK-féle tételeket) poliharmonikus függvényekre kiterjeszteni (lásd a **2.**—**5.** tételeket).

Két további tétel a poliharmonikus függvények szinguláris hely körüli kifejtésének pontos alakját adja meg (a **6.** és **7.** tétel).

Az első paragrafus a poliharmonikus függvények integrális jellemzésére vonatkozó tétel egy, S. TELEMANtól származó élesítésével zárul (lásd a **8.** tételt).

A második paragrafus az úgynevezett polikalorikus függvények elméletével foglalkozik. Egy $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ függvényt p-edrendű polikalorikus függvénynek nevezünk, ha u kielégíti a

$$\square^p u \equiv \left(\triangle - \frac{\partial}{\partial t}\right)^p u = 0$$

differenciálegyenletet.

Erre a differenciálegyenletre vonatkozó két kerületérték-probléma explicite megoldható. Mindkét esetben u-t a $0 < t < t_1$ sávon keressük. Az első esetben adva van $u, \partial u/\partial t, \ldots \partial^{p-1}u/\partial t^{p-1}$; a második esetben u, $\square u$, ..., $\square^{p-1}u$. A kapott megoldások a jól ismert Poisson-formula általánosítását jelentik (lásd a **10.** és **11.** tételt).

Az n hely-változós p-edrendű polikalórikus függvények is jellemezhetők integrális tulajdonsággal (lásd a **13.** tételt). Ez az integrális jellemzés megint számos olyan tételhez vezet el, amelyek harmónikus függvényekre vonatkozó tételek analogonjai (lásd a **14.**—**17.** tételeket).

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИЛИ ГИПЕРВОЛИЧЕСКОГО ТИПА

M. NICOLESCU

Резюме

Работа дает схематический обзор почти тридцатилетних исследований автора относительно решений полигармонического уравнения и итерированного уравнения теплопроводности.

Первый параграф занимается полигармоническими функциами. Функция u n переменных называется полигармонической функцией p-ого порядка, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\triangle^p u = 0 .$$

Вместо выполнения этого дифференциального уравнения можно характеризировать полигармонические функции n переменных p-ого порядка также некоторым интегральным свойством. Это интегральное свойство есть обобщение относящейся к гармоническим функциям теоремы GAUSS о шаровом среднем значении. (см. Теорему **1.**) С помощью этой характеристики удалось распространить на полигармонические функции ряд теорем, относящихся к гармоническим функциям (например, теорему LIOUVILLE, теоремы HARNACK) (см. Теоремы **2.**—**5.**)

Две дальнейшие теоремы дают точную форму разложения полигармонических функций в окрестности сингулярной точки (Теоремы **6.** и **7.**).

Первый параграф заканчивается данным S. TELEMAN обострением теоремы, относящейся к интегральной характеристике гармонических функций (Теорема **8.**).

Второй параграф занимается теорией так называемых поликалорических функций. Функция $u(x_1 \ldots, x_n, t)$ называется поликалорической функцией p-ого порядка, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Box^p u \equiv \left(\triangle - \frac{\partial}{\partial t}\right)^p u = 0 \; .$$

Относящиеся к этому уравнению две граничные задачи могут быть решены явным образом. В обоих случаях u ищется в полосе $0 < t < t_1$. В первом случае даны u, $\partial u/\partial t, \ldots$, $\partial^{p-1} u/\partial t^{p-1}$, во втором случае u, $\Box u, \ldots, \Box^{p-1} u$. Полученные решения являются обобщением хорошо известной формулы Poisson (см. Теоремы **10.** и **11.**).

Поликалорические функции n переменных места p-ого порядка также могут характеризоваться интегральным свойством (см. теорему **13.**). Эта интегральная характеристика снова приводит к ряду теорем, являющихся аналогами теорем, относящихся к гармоническим функциям (см. Теоремы **14.**—**17.**).