A POISSON-FOLYAMAT EGY JELLEMZÉSE

RÉNYI ALFRÉD

Tegyük fel, hogy a $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$ időpontokban egy-egy esemény történik, és legyen $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ha a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ pozitív valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, a folyamatot *rekurrens*nek nevezzük. Jelölje $F(x)$ a δ_n valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét. $F(x)$-et a rövidség kedvéért a folyamathoz tartozó eloszlásfüggvénynek nevezzük. Ha

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x)$$

létezik, akkor a $\lambda = 1/\alpha$ számot a folyamat *eseménysűrűségének* nevezzük. Ha $\alpha = +\infty$, a sorozatot 0-sűrűségűnek, egyébként pozitív sűrűségűnek nevezzük. A legegyszerűbb rekurrens folyamat a Poisson-folyamat, amelynél $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ $(\lambda > 0)$. Ez egyben az egyetlen olyan rekurrens folyamat, amely Markov-típusú. A következőkben a Poisson-folyamat egy másik jellemző tulajdonságára kívánunk rámutatni, ami a Poisson-folyamatot a rekurrens folyamatok között kitünteti.

Jelölje K_q $(0 < q < 1)$ azt a transzformációt, amely a τ_n pontot a $q\tau_n$ pontba viszi át (q-adrészre való *komprimálás*). Jelölje továbbá R_q azt a transzformációt, amely a τ_n pontok mindegyikét q valószínűséggel változatlanul hagyja, és $p = 1 - q$ valószínűséggel törli a $\{\tau_n\}$ sorozatból, oly módon, hogy az egyes τ_n pontokra vonatkozó választások egymástól függetlenek (q-szoros *ritkítás*). Alkalmazzuk a szóbanforgó rekurrens folyamatra előbb az R_q, azután a K_q transzformációt (a sorrend egyébként mellékes). Ezáltal a sorozat sűrűsége nem változik meg, az $F(x)$ eloszlásfüggvény azonban megváltozik. Jelöljük röviden az R_qK_q transzformációt T_q-val.

A T_q transzformáció a folyamatot egy másik rekurrens folyamattá alakítja át, amelyhez tartozó eloszlásfüggvényt úgy tekintjük, mint $F(x)$-nek a T_q transzformációval való transzformáltját, és $T_q(F(x)) = F(x, q)$-val jelöljük.

1. lemma: *Ha* $0 < q_1 < 1$ *és* $0 < q_2 < 1$, *akkor*

$$T_{q_1}(T_{q_2}(F(x))) = T_{q_1 q_2}(F(x)) .$$

Bizonyítás:

Legyen

$$(1) \qquad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\, dF(x)$$

az $F(x)$ eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltja. Jelölje továbbá $F_n(x)$ az $F(x)$ n-edik kompozíció-hatványát, vagyis legyen

$$(2) \qquad F_1(x) = F(x) \quad \text{és} \quad F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t)\, dF(t)\,, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Akkor

$$(3) \qquad T_q(F(x)) = \sum_{n=1}^\infty q\, p^{n-1} F_n\left(\frac{x}{q}\right),$$

és így, ha $T_q[\varphi(s)]$ jelöli $T_q(F(x))$ Laplace-transzformáltját,

$$(4) \qquad T_q[\varphi(s)] = \frac{q\,\varphi(qs)}{1-(1-q)\,\varphi(qs)},$$

Ennélfogva

$$(5) \qquad \frac{1}{T_q[\varphi(s)]} - 1 = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\varphi(qs)} - 1\right),$$

és így

$$(6) \qquad \frac{1}{T_{q_1}[T_{q_2}[\varphi(s)]]} - 1 = \frac{1}{q_1}\left(\frac{1}{T_{q_2}[\varphi(q_1 s)]} - 1\right) = \frac{1}{q_1 q_2}\left(\frac{1}{\varphi(q_1 q_2 s)} - 1\right).$$

(6)-ból következik, hogy

$$(7) \qquad T_{q_1}[T_{q_2}[\varphi(s)]] = T_{q_1 q_2}[\varphi(s)]\,,$$

és a Laplace-transzformált unicitására való tekintettel

$$(8) \qquad T_{q_1}(T_{q_2}(F(x))) = T_{q_1 q_2}(F(x))\,.$$

Ezzel lemmánkat bebizonyítottuk.

A $\{T_q\}$ transzformációsereg tehát, amely a valószínűségeloszlások félcsoportján van értelmezve, maga is félcsoportot alkot. Még egy segédtételt bizonyítunk be.

2. lemma: *Ha* $F(x, q) = T_q(F(x))$, $0 < q < 1$, *továbbá*

$$\alpha_1 = \int_0^\infty x\,dF(x)$$

létezik, akkor

$$\alpha_q = \int_0^\infty x\,dF(x, q)$$

is létezik, és $\alpha_q = \alpha_1$, $0 < q < 1$. *Ha* $\alpha_1 = +\infty$, akkor $\alpha_q = +\infty$. *Ha*

$$\beta_1 = \int_0^\infty x^2\,dF(x)$$

is létezik, akkor

$$\beta_q = \int_0^\infty x^2\,dF(x, q)$$

is létezik, és $\beta_q - 2\alpha_q = q\,(\beta_1 - 2\alpha_1^2)$.

Bizonyítás:

(5)-ből egyszerű számolással adódik, hogy ha $\varphi_q(s) = T_q[\varphi(s)]$, akkor $\varphi_q'(0) = \varphi'(0)$ és

$$\varphi_q''(0) = q\,\varphi''(0) + 2(1 - q)[\varphi'(0)]^2 .$$

Innét a lemma állítása azonnal következik.

Megjegyzés: A T_q transzformáció tehát nem változtatja meg egy rekurrens folyamat sűrűségét.

Bármely T_q transzformációnál[1] $(0 < q \leqq 1)$ az összes exponenciális eloszlások invariánsak. Ha ugyanis

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \geqq 0) ,$$

akkor $\varphi(s) = \lambda/(\lambda + s)$, és így

$$T_q[\varphi(s)] = \frac{q\dfrac{\lambda}{\lambda + qs}}{1 - (1 - q)\dfrac{\lambda}{\lambda + qs}} = \frac{\lambda q}{\lambda q + qs} = \frac{\lambda}{\lambda + s} = \varphi(s) .$$

[1] T_1 nem más, mint az identikus transzformáció, vagyis minden $F(x)$-re $T_1(F(x)) \equiv F(x)$

Be fogjuk bizonyítani, hogy az exponenciális eloszlások a T_q transzformációk egyedüli invariáns elemei, ha $0 < q < 1$, vagyis, hogy érvényes a következő

1. tétel: *A T_q transzformáció egyedüli invariáns elemei az exponenciális eloszlások, vagyis egy rekurrens folyamat jellege a T_q transzformációnál akkor és csak akkor nem változik meg, ha a folyamat Poisson-típusú.*

Megjegyzés: Az 1. tétel tehát a Poisson-folyamatok egy jellemző sajátságára mutat rá, ami a Poisson-folyamatokat a rekurrens folyamatok között kitünteti.

Bizonyítás:

(5) szerint, ha $T_q(F(x)) = F(x)$, akkor teljes indukcióval és az 1. lemmára való tekintettel következik, hogy $T_{q^n}(F(x)) = F(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Jelölje $\varphi(s)$ az $F(x)$ függvény Laplace-transzformáltját, akkor (5)-ből

$$\frac{1}{q^n}\left(\frac{1}{\varphi(q^n s)} - 1\right) = \frac{1}{\varphi(s)} - 1\,, \tag{9}$$

tehát, mivel $\varphi(0) = 1$, és $\varphi(s)$ a 0 helyen folytonos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(0) - \varphi(q^n s)}{q^n s} = \frac{1 - \varphi(s)}{s\varphi(s)}\,. \tag{10}$$

Ha létezik $\varphi'(0) = -1/\lambda$, akkor tehát (10)-ből

$$\frac{1 - \varphi(s)}{s\,\varphi(s)} = \frac{1}{\lambda}\,,$$

és így

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}\,,$$

amivel állításunkat erre az esetre már be is bizonyítottuk. Azt, hogy $\varphi'(0)$ létezik, nem kell külön feltenni, mert ez (10)-ből következik ; ugyanis $\varphi'(0)$ akkor és csakis akkor létezik (nem negatív valószínűségi változóról lévén szó), ha

$$\int_0^\infty x\,dF(x)$$

létezik és

$$\varphi'(0) = -\int_0^\infty x\,dF(x)\,.$$

Mármost (10)-ből ez esetben bármely $s > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1-e^{-q^n sx}}{q^n s}\, dF(x) = \frac{1-\varphi(s)}{s\,\varphi(s)}, \tag{11}$$

és így, figyelembe véve, hogy $1 - e^{-t} \leqq t$, ha $t > 0$, Lebesgue tétele szerint (11)-ből következik:

$$\int_0^\infty x\, dF(x) = \frac{1-\varphi(s)}{s\,\varphi(s)}. \tag{12}$$

Mivel (12) baloldala nem függ s-től, következik, hogy $\varphi'(0) = -1/\lambda$ létezik, és $\varphi(s) = \lambda/(\lambda + s)$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Vizsgáljuk most meg, hogy mi történik, ha egy nem Poisson-típusú folyamatra alkalmazzuk a T_q transzformációt. A mondottak után nem meglepő, hogy a $q \to 0$ határesetben a folyamat Poisson-folyamattá alakul át, feltéve, hogy az eseménysűrűség pozitív volt. Ezt fejezi ki a következő

2. tétel: *Ha $F(x)$ egy eloszlásfüggvény, $F(0) = 0$ és*

$$\int_0^\infty x\, d\,F(x) = \frac{1}{\lambda}$$

létezik, akkor

$$\lim_{q\to 0} T_q\big(F(x)\big) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \geqq 0).$$

Bizonyítás:

Feltevésünk szerint $\varphi'(0) = -1/\lambda$ létezik. Ennélfogva

$$\lim_{q\to 0} \frac{1}{T_q\,[\varphi(s)]} = 1 + s \lim_{q\to 0} \frac{1-\varphi(qs)}{q\,s\,\varphi(qs)} = 1 + \frac{s}{\lambda},$$

tehát

$$\lim_{q\to 0} T_q\,[\varphi(s)] = \frac{\lambda}{\lambda + s}, \tag{13}$$

amiből a Laplace-transzformáció jólismert folytonossága alapján következik

$$\lim_{q\to 0} T_q\big(F(x)\big) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \geqq 0). \tag{14}$$

Megjegyzés: A T_0 transzformációt tehát értelmezhetjük, mint egy olyan transzformációt, amely bármely, a $(0, +\infty)$ intervallumban értelmezett véges várható értékű eloszlást átvisz a vele egyenlő várható értékű exponenciális eloszlásba. Azonban, ha

$$\int_0^\infty x\,dF(x) = +\infty\ ,$$

$T_0(F(x))$ nincsen értelmezve. Megjegyzendő továbbá, hogy míg $q > 0$ esetén T_q értelmezhető az egész számegyenes valószínűségeloszlásain is, T_0 csak a pozitív féltengelyen megadott valószínűségeloszlásokra van értelmezve.

3. tétel: *Legyen* $0 < q_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ *és*

$$\lim_{n\to\infty} q_1 q_2 \ldots q_n = 0$$

Ha egy tetszőleges véges sűrűségű rekurrens folyamatra egymás után alkalmazzuk a $T_{q_1}, T_{q_2}, \ldots, T_{q_n}, \ldots$ *transzformációkat, határértékben egy Poisson-folyamatot nyerünk,*[2] *amelynek eseménysűrűsége megegyezik a folyamat eredeti sűrűségével.*

Bizonyítás:

Mivel az 1. lemma szerint $T_{q_n} T_{q_{n-1}} \ldots T_{q_1} = T_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, a 2. tételből, figyelembevéve a 2. lemmát, következik a 3. tétel állítása.

Egy 0-sűrűségű rekurrens folyamatot az említett módon természetesen nem lehet Poisson-folyamattá alakítani (hiszen a T_q transzformáció a 0 sűrűséget is invariánsul hagyja). Ez elérhető azonban, ha eljárásunkat némiképpen általánosítjuk. Vizsgáljuk a $T_{q,t} = R_q K_t$ transzformációkat. (Nyilvánvalóan $T_{q,q} = T_q$). Ha $\varphi(s)$ jelöli újból az $F(x)$ eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját, és $T_{q,t}[\varphi(s)]$ a $T_{q,t}(F(x))$ eloszlásfüggvény Laplacetranszformáltját, akkor (5) általánosításaként adódik:

$$\frac{1}{T_{q,t}[\varphi(s)]} - 1 = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\varphi(ts)} - 1\right). \tag{15}$$

(15)-ből azonnal leolvasható, hogy

$$T_{q_1,t_1} T_{q_2,t_2} = T_{q_1 q_2,\, t_1 t_2}\ .$$

Ma̋rmost, ha q és t egyidejűleg alkalmas módon 0-hoz tartanak, elérhető, hogy $T_{q,t}[\varphi(s)]$ konvergáljon egy valódi eloszlás Laplace-transzformáltjához. Ha például $F(x) = 1 - x^{-1}$, ha $1 \leq x < +\infty$, és $F(x) = 0$, ha $x < 1$, akkor

$$\varphi(s) = \int_1^\infty \frac{e^{-xs}}{x^2}\,dx \sim 1 - s\log\frac{1}{s} + O(s)\ ,$$

[2] Azon, hogy a folyamat határértékben Poisson-folyamattá válik, itt csak azt értjük, hogy a folyamat meghatározó függvénye egy exponenciális eloszláshoz konvergál. Lehetséges volna a kérdés mértékelméleti szempontból való vizsgálatával elmélyíteni a tárgyalást. E kérdésre a szerző vissza kíván térni.

ha $s \to 0$, és így

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_{\varepsilon \log 1/\varepsilon,\, \varepsilon} [\varphi(s)] = \frac{1}{1+s} ,$$

vagyis alkalmazva a szóbanforgó 0-sűrűségű folyamatra a $T_{\varepsilon \log 1/\varepsilon,\, \varepsilon}$ transzformációt, ha $\varepsilon \to 0$, határértékben 1 sűrűségű Poisson-folyamatot nyerünk. Ezt nyilván azzal értük el, hogy sokkal erősebben komprímáltuk a folyamatot, mint ahogy ritkítottuk.

(Beérkezett: 1956. IX. 15.)

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА POISSON

A. RÉNYI

Резюме

Рассмотрим некоторый рекуррентный процесс, т. е. такой стохастический процесс, который состоит из событий, происходящих в случайные моменты времени $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$, где положительные случайные величины $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x)$. Рекуррентный процесс есть процесс Poisson, если $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ где $\lambda > 0$. Если существует

$$a = \int_0^\infty x\, dF(x) ,$$

то величина $\lambda = 1/a$ называется *плотностью* процесса. В настоящей работе рассматривается следующее преобразование рекуррентных процессов: первый шаг есть *контракция* процесса, т. е. замена моментов τ_n на $q\tau_n$ где $0 < q < 1$. С помощью этого преобразования плотность увеличивается от λ до λ/q. Исходная плотность процесса восстанавливается на втором шаге, *разрежении*. Это достигается исключением определенных событий, исключение производится так, что каждое событие процесса исключается с вероятностью p и остается без изменения с вероятностью q $(p = 1 - q)$; исключение (соотв. неисключение) некоторого события не зависит от исключения (соотв. неисключения) другого события. Через T_q обозначается преобразование, состоящее из последовательного проведения указанных шагов. Показывается, что если преобразование T_q применяется к некоторому реккуррентному процессу, снова получается рекуррентный процесс, но функция распределения расстояния следующих друг за другом событий переходит из $F(x)$ в

$$F(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q\, F_n\left(\frac{x}{q}\right),$$

где $F_1(x) = F(x)$ и

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x - t)\, dF(t) , \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Полагая $T_q(F(x)) = F(x, q)$, T_q может рассматриваться как преобразование, определенное на множестве распределений случайных величин. Легко показать, что $T_{q_1} T_{q_2} =$

$= T_{q_1 q_2}$ (лемма 1) и что показательные распределения инвариантны по отношению к каждому преобразованию T_q. В работе доказывается, что не существует других инвариантных распределений, т.е. если $T_q\big(F(x)\big) = F(x)$ для какого либо q $(0 < q < 1)$, то $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ с некоторым $\lambda > 0$. Показывается, далее, что если $F(x)$ есть любая функция распределения с конечным математическим ожиданием

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x) ,$$

то

$$T_0\big(F(x)\big) = \lim_{q \to 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x}$$

при $x \geq 0$, где $\lambda = 1/\alpha$. Отсюда следует (теорема 3), что если рассматривать любой рекуррентный процесс с положительной плотностью событий и последовательно применять преобразования T_{q_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ где $0 < q_n < 1$ и

$$\lim_{n \to \infty} q_1 q_2 \ldots q_n = 0 ,$$

то процесс стремится к некоторому процессу Poisson с той же плотностью.

Если плотностью исходного процесса равна нулю, то этот процесс не ведет к цели. Однако, с помощь примера показывается, что изменяя преобразование так, что контракция и разрежение применяется в разной мере, рекуррентный процесс с плотностью, равной нулю, в пределе может быть преобразован в процессе Poisson.

A CHARACTERIZATION OF POISSON PROCESSES

A. RÉNYI

Summary

Let us consider a recurrent process, i. e. a stochastic process consisting of events occuring at random moments $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$; the positive random variables $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ being independent and identically distributed with the distribution function $F(x)$. A recurrent process is a Poisson-process, if $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$, where $\lambda > 0$. If

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x)$$

exists, $\lambda = 1/\alpha$ is called the *density* of events in the process. In the present paper the following transformation of recurrent processes is considered : The first step consists in a *contraction* of the process, i. e. in replacing the moments τ_n by the moments $q\tau_n$, where $0 < q < 1$. By means of this transformation, the density of events is increased from λ to λ/q. The original density of the process is reestablished by the second step, which is a *rarification* of the process. This is done by cancelling some of the events, the cancelling is made in such a way, that each event of the process in cancelled with probability p and left unchanged with probability q $(p = 1 - q)$, the cancelling (or not cancelling) of any event being independent of the cancelling (or not cancelling) of any other event.

We denote by T_q the transformation consisting in the successive performance of the two steps described above. It is shown that if we apply the transformation T_q to a recurrent process, we obtain again a recurrent process, but the distribution function the of distances between successive events is changed from $F(x)$ to

$$F(x, q) = \sum_{n=1}^\infty p^{n-1}\, q\, F_n\left(\frac{x}{q}\right)$$

where $F_n(x)$ denotes the n-th convolution of $F(x)$ with itself, i. e. $F_1(x) = F(x)$ and

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t)\, dF(t) \ , \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Putting $T_q(F(x)) = F(x, q)$, the transformation T_q may be considered as operating on the set of probability distributions. It is easy to show that $T_{q_1} T_{q_2} = T_{q_1 q_2}$ (Lemma 1.), further that the exponential distributions are left invariant by any of the transformations T_q. It is shown in the paper, that there are no other invariant distributions, i. e. if $T_q(F(x)) = F(x)$ for some q $(0 < q < 1)$, it follows that $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$ with some $\lambda > 0$ (Theorem 1.). It is shown further that if $F(x)$ is an arbitrary distribution function with finite mean value

$$\alpha = \int_0^\infty x\, dF(x) \ ,$$

then

$$T_0(F(x)) = \lim_{q \to 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x}$$

for $x > 0$ with $\lambda = 1/\alpha$. It follows (Theorem 3.) that if we take an arbitrary recurrent process having a positive density of events, and apply one after another the transformations T_{q_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ where $0 < q_n < 1$ and

$$\lim_{n \to \infty} q_1 \ldots q_n = 0 \ ,$$

then the process converges to a Poisson-process having the same density.

If the original process has density 0, then this procedure does not work. It is pointed out, however, by an example, that a modification of the transformation (consisting in the application of a contraction and a rarification of unequal power) we may transform a recurrent process with zero density of events in the limit into a Poisson-process.