

A MONTE-CARLO MÓDSZER MINT MINIMAX STRATÉGIA

PALÁSTI ILONA és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

Monte-Carlo módszernek az olyan eljárást nevezik, amelynél valamilyen numerikus matematikai feladat közelítő megoldása céljából egy sztochasztikus modellt konstruálnak, ezt realizálják, és a végzett kísérletek eredményeinek statisztikai feldolgozása segítségével egy közelítő értéket (tulajdonképpen *statisztikai becslést*) kapnak a keresett feladat megoldását nyújtó mennyiségre. A Monte-Carlo módszer elvileg bármely numerikus feladat megoldására alkalmazható; természetesen minden konkrét esetben külön kell megkonstruálni az alkalmas sztochasztikus modellt, megvalósítani azt, és megkeresni egy alkalmas statisztikai becslést. A módszer elnevezése arra céloz, hogy a Monte-Carlo-i kaszinó ruletteredményeit (amelyeket rendszeresen közzé tesznek) fel lehet használni, kellő transzformációk útján az említett célra, hiszen a ruletteredmények tulajdonképpen egy speciális véletlen számtáblázatot alkotnak, és a véletlen számtáblázatok nagy szerepet játszanak a szóban forgó módszerek alkalmazása során.¹⁾ A Monte-Carlo módszert olyan esetekben szokták alkalmazni, amikor a szokásos eljárások annyira bonyolult számításokra vezetnének, hogy gyakorlatilag nem jönnek számításba. Ez volt a helyzet a Monte-Carlo módszer első jelentős alkalmazásánál, amely az atomreaktorok méretezésével volt kapcsolatos, és NEUMANN JÁNOS, S. ULAM és E. FERMI nevéhez fűződik. Ez esetben olyan problémáról volt szó, amely egy fizikai realitással bíró sztochasztikus folyamatra, a neutronoknak az atommagreaktorban való mozgására vonatkozott, ami nagyon megkönnyítette az alkalmas sztochasztikus modell megválasztását, hiszen a tényleges fizikai folyamatot kellett csak matematikailag „lemásolni”. Ez az eljárás elvileg nem különbözik attól a matematikai statisztikában már régóta alkalmazott „kísérleti” módszertől, amikor például egy igen nehezen kiszámítható eloszlást úgy határoznak meg közelítőleg, hogy egy nagyobb statisztikai adathalmazból kiszámítják a szóban forgó statisztikai függvény empirikus eloszlását. Ezt a módszert alkalmazta STUDENT a róla elnevezett eloszlással kapcsolatban, amelyre ugyan adott egy (nem teljesen precíz) levezetést, de éppen mivel érezte ennek nem teljesen meggyőző voltát, azért ellenőrzésként kísérletileg is meghatározta az eloszlást.²⁾ A Monte-Carlo módszer alkalmazhatósági köre azonban

¹⁾ Ma már sokkal megbízhatóbb eljárásokkal rendelkezünk véletlen számsorozatok generálására.

²⁾ STUDENT 3000 bűnöző testmagasságára és mutatóujja hosszára vonatkozó adatokból számította ki a keresett empirikus eloszlást.

nem szorítkozik azokra a kérdésekre, amelyekhez van egy természetes sztochasztikus modell; elegendő bármely numerikus problémához egy olyan valószínűségszámítási problémát találni, amelynél valamely statisztikailag becsülhető mennyiség (vagy függvény) pusztán formálisan ugyanolyan egyenletnek (függvényegyenletnek) tesz eleget, illetve ugyanolyan analitikus alakra hozható, mint a keresett mennyiség.

Például, ha ki akarjuk számítani numerikusan az

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

integrál értékét, a következőképpen járhatunk el: választunk egy, az (a, b) intervallumban értelmezett pozitív $f(x)$ függvényt, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

ezután keresünk egy olyan könnyen megvalósítható véletlen tömegjelenséget, amelynél megfigyelhető egy olyan ξ valószínűségi változó, amelynek valószínűség-sűrűségfüggvénye $f(x)$; ezek után n független megfigyelést végzünk ξ értékére nézve; ha a kapott eredményeket $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jelölik, kiszámítjuk az

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{g(\xi_k)}{f(\xi_k)}$$

számot, és ezt fogadjuk el I becslésül. Az S valószínűségi változó várható értéke nyilván

$$\mathbf{M}\{S\} = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = I,$$

vagyis S az I integrálnak torzítatlan becslése. S szórása nyilván

$$\mathbf{D}\{S\} = \sqrt{\frac{1}{n} \int_a^b \left[\frac{g(x)}{f(x)} - I \right]^2 f(x) dx},$$

tehát n értékét elegendő nagyra választva $\mathbf{D}\{S\}$ tetszőleges kicsinné tehető. A legegyszerűbb eset az, amikor

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

A vázolt eljárás teljesen analóg módon alkalmazható akárhány dimenziós integrálok becslésére, és a szórás mindig $1/\sqrt{n}$ nagyságrendű lesz. Ez azért figyelemre méltó, mert a dimenziószám növelésével a szokásos numerikus kvadratura-eljárások pontossága csökken. Ha például egy kettős integrált közelítőleg ki akarunk számítani a függvény³⁾ n pontban felvett értékéből, és az n pontot egy szabályos síkrács csomópontjaiban választjuk, a hiba $1/\sqrt{n}$ nagyságrendű lesz, de a megfelelő eljárás hibája háromszoros integrálnál már $n^{-1/3}$, k -dimenziós integrálnál pedig $n^{-1/k}$ lesz. Ez a megjegyzés mutatja, hogy milyen előnyöket nyújthat a Monte-Carlo módszer.

A módszer elmélete még kezdeti stádiumban van, rendszeres és részletes összefoglalása az eddigi eredményeknek még nincsen. Nehezíti a szakirodalom áttekintését, hogy számos, a Monte-Carlo módszerrel foglalkozó tanulmányt csak belső használatra, bizalmas anyagként adtak ki, és ezeknek csak a címe hozzáférhető. A kérdés irodalmát illetőleg utalunk itt a [1] kötetre, amely nagyszámú, a Monte-Carlo módszerre vonatkozó dolgozaton kívül a kérdésre vonatkozólag eddigi irodalom szinte teljes felsorolását, és az egyes cikkek rövid összefoglalását is tartalmazza. A Monte-Carlo módszer egy konkrét kérdésnél való alkalmazásánál három alapkérdés merül fel:

- a) A sztochasztikus modell megválasztása,
- b) A sztochasztikus modell realizálása,
- c) A statisztikai becslés megválasztása.

Az *a)* probléma tulajdonképpen a megoldandó numerikus feladat valószínűségi számítási interpretációját jelenti. A *b)* probléma véletlen számtáblázatok konstruálását, illetőleg véletlen számsorozatok transzformálását jelenti. A *c)* probléma lényege a szórás csökkentése.

A szóban forgó módszerek jelentőségére vonatkozólag a hozzáférhető munkák kivétel nélkül egyetértenek a következőkben:

1. A Monte-Carlo típusú módszerek jelentőségét az adja meg, hogy éppen olyan esetekben alkalmazhatók, amikor más ismert módszerek gyakorlatilag nem jönnek számításba.

2. Nagy pontosságot a Monte-Carlo módszerrel csak igen nagy számolási munkával lehet elérni, tehát a módszer inkább első tájékozódásra szolgál.

3. A 2. alatti hátrányt ellensúlyozza, hogy a Monte-Carlo típusú módszerek általában különösen alkalmasak arra, hogy nagysebességű automatikus számológépek segítségével lehessen a számításokat elvégezni.⁴⁾

A legtöbb, a kérdéssel foglalkozó szerző az 1. ponttal kapcsolatban azt hangsúlyozza, hogy a Monte-Carlo módszerhez csak igen bonyolult numerikus feladatok esetében érdemes folyamodni⁵⁾; példaként azt szokták felhozni, hogy közönséges vagy kettős integrálok kiszámítására a szokásos bevált módszerekkel a Monte-Carlo módszer nem tud versenyezni, azonban igen sok dimenziós integrálok kiszámításánál a Monte-Carlo módszer lényegesen előnyösebb; ennek okára már rámutattunk. Ez a megállapítás azonban nem teljesen

³⁾ Az integrálandó függvényről csak annak folytonosságát tesszük fel.

⁴⁾ Egyesek szerint e módszerek egyenesen úgy tekintendők, mint a korszerű számológépek „testére szabott” számítási eljárások; ez azonban semmiképpen nem jelenti, hogy ilyen gépek hiányában a Monte-Carlo módszer egyáltalán nem alkalmazható, lásd pl.: [2].

⁵⁾ Igen tanulságos pl. a [3] dolgozat, amely a Monte-Carlo módszert integrálegyenletek sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek numerikus meghatározására használja.

helytálló, hiszen egy integrál numerikus kiszámításának bonyolultsága nemcsak az integrációs tartománytól függ, hanem legalább annyira függ az integrálandó függvény jellegétől, „sima” vagy „erősen oszcilláló” voltától. Egy folytonos függvény sokdimenziós integráljának numerikus kiszámítása lehet könnyű — ha ugyanis az integrandus rendkívül sima függvény —, viszont egy közönséges egydimenziós integrál kiszámítása lehet igen fogas kérdés — ha az integrandus bár folytonos ugyan, de nagyon erősen és szabálytalanul oszcillál.

Dolgozatunkban éppen az utóbbi kérdéssel fogunk foglalkozni. Célunk annak az elvi kérdésnek a tisztázása, hogy milyen esetekben célszerű a Monte-Carlo módszert alkalmazni. E kérdésre a *játékelmélet* segítségével adunk választ. Ki fogjuk mutatni, hogy a Monte-Carlo módszer némely esetben bizonyos értelemben a lehető legjobb, pontosabban: a játékelméletben szokásos értelemben *minimax* eljárás. A jelen dolgozatban adott tárgyalásmód arra is alkalmas, hogy megmutassa, hogy más, az említettektől eltérő esetekben milyen más módszer (esetleg melyik klasszikus módszer) lesz a minimax, azaz a legjobb módszer.

Az 1. §-ban a játékelmélet a továbbiakban szükséges alapfogalmait ismertetjük, a 2. §-ban pedig ezen fogalmakat alkalmazzuk az integrálok numerikus kiszámítására szolgáló módszerek összehasonlítására.

1. §. A játékelmélet néhány alapfogalma

A játékelméletben (lásd pl. [4], [5], [6]) a következő, úgynevezett „normál alakra” szokták redukálni a legegyszerűbb, úgynevezett „kétszemélyes 0-összegű” játékokat. A két játékos, akiket A -val, illetve B -vel jelölünk, egymástól teljesen függetlenül és egyidejűleg szabadon választhat egy-egy *tiszta stratégiát* (játékrendszert), az A számára számításba jövő tiszta stratégiák halmaza legyen A , A elemeit jelöljük a -val; a B számára számításba jövő tiszta stratégiák halmaza legyen B , ennek elemeit jelölje b . Feltesszük, hogy mindkét játékos ismeri az A és B halmazok összetételét; azonban az A játékos, amikor kiválasztja A egy a elemét, nem tudja, hogy a B játékos B mely b elemét választja ki ugyanakkor, és megfordítva. Mármost ha A az a , B a b tiszta stratégiát választotta, ezáltal a játék kimenetele meg van határozva, és így meg van határozva A vesztesége (illetve nyeresége, ami negatív veszteséggént fogható fel), amit $V(a, b)$ -vel jelölünk. Feltesszük, hogy B nyeresége egyenlő A veszteségével. Feltesszük továbbá, hogy mind az A , mind a B játékos veszteségének minimalizálására (nyereségének maximalizálására) törekszik. Egy játékot tehát két (absztrakt) halmaz, A és B , és az ezek direkt szorzatán értelmezett $V(a, b)$ kétváltozós korlátos függvény ($a \in A$, $b \in B$) segítségével lehet matematikailag leírni. További fontos fogalom az úgynevezett *kevert stratégia* fogalma; az A játékos kevert stratégiája abban áll, hogy rendszertelenül, de meghatározott valószínűséggel hol az egyik, hol a másik stratégiát választja. A egy kevert stratégiája jellemezhető egy, az A bizonyos részhalmazaiából álló σ -gyűrűn értelmezett α mértékkel, amelynek értéke a teljes A halmazon 1, és amely A minden (mérhető) részhalmazához hozzárendeli annak a valószínűségét, hogy A az illető részhalmazhoz tartozó valamelyik (tiszta) stratégiát választja. Egy kevert stratégiát a rövidség kedvéért az azt meghatározó α mértékkel fogjuk jelölni. Az összes kevert stratégiák (A -n értelmezett mértékek) halmazát jelöljük M_A -val. Hasonlóképpen B

egy kevert stratégiáját, illetve az azt meghatározó mértéket β -val, e kevert stratégiák halmazát M_B -vel jelöljük. A tiszta stratégiák is felfoghatók mint speciális kevert stratégiák; tiszta stratégiát kapunk ugyanis, ha az α mérték elfajult, azaz A egyetlen a pontjához, illetve bármely ezt tartalmazó mérhető részhalmazhoz α az 1 mértéket, bármely ezen a elemet nem tartalmazó mérhető részhalmazhoz pedig a 0 mértéket rendeli hozzá.

Mármost legyen pl. α az A játékos egy kevert stratégiája. Határozzuk meg az A játékos lehetséges veszteségének — ami kevert stratégia esetében (feltéve, hogy $V(a, b)$ a -nak mérhető függvénye) valószínűségi változó — a várható értékét, B egy rögzített b stratégiája esetében; jelöljük ezt $\bar{V}(\alpha, b)$ -vel, és határozzuk meg ennek maximumát, illetve, ha azt nem veszi fel, legkisebb felső korlátját, ha b befutja a B halmazt, vagyis a

$$\sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha, b)$$

értékeket. Könnyen belátható, hogy nincs szükség arra, hogy $\bar{V}(\alpha, b)$ felső határának megállapításánál a B játékos β kevert stratégiáit is figyelembe vegyük; ugyanis hogyha $\bar{V}(\alpha, \beta)$ jelöli $\bar{V}(\alpha, b)$ várható értékét, ha b eloszlását a β mérték szabja meg, akkor

$$\sup_{\beta \in M_B} \bar{V}(\alpha, \beta) = \sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha, b).$$

Ha létezik olyan $\alpha_0 \in M_A$ kevert stratégia A számára, amelyre

$$\sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha_0, b) = \inf_{a \in M_A} \sup_{b \in B} \bar{V}(a, b)$$

ezt az α_0 stratégiát az A játékos *minimax* stratégiájának nevezzük, és ha A ezt választja, akkor ezáltal várható maximális veszteségét minimálissá tette. A minimax stratégia választása tehát azt jelenti, hogy az A játékos abból indul ki, hogy ellenfele megtalálhatja az ő számára legelőnytelenebb játékrendszert, és arra törekszik, hogy vesztesége ez esetben is minimális (illetve nyeresége maximális) legyen.

2. §. Összegek és integrálok közelítő kiszámításának tárgyalása a játékelmélet alapján

Amikor egy határozott integrál közelítő kiszámítására szolgáló módszer jóságát vizsgáljuk, nyilván nem egy konkrét integrál kiszámítását tartjuk szem előtt (hiszen minden konkrét esetben ad hoc módszerek jöhetnek tekintetbe), hanem arra gondolunk, hogy olyan módszert adjunk meg, amely egy függvényosztályba tartozó bármely függvény integráljának kiszámítására használható sikerrel. A különböző módszerek jóságának mérlegelése csak akkor reális, ha a választott módszert nem egy, hanem sok esetben kívánjuk alkalmazni, hiszen általában igen rossz módszerek speciális esetekben nagyon jó

eredményt adhatnak. Kézenfekvő a numerikus integrálást mint „játékot” felfogni, amelynél az egyik játékos a matematikus, akinek stratégiája abban áll, hogy a számításba jövő módszerek közül egyet kiválaszt, az integrálandó függvényt azonban az „ellenfél” választja ki. (Az „ellenfél” ez esetben természetesen nem egy létező személy.) Az ellenfél egy tiszta stratégiája tehát abban áll, hogy függvények egy bizonyos osztályából kiválaszt egy meghatározott függvényt, amelyet a matematikusnak integrálnia kell.

Feltesszük, hogy amikor a matematikus a módszerét megválasztja, még nem tudja, hogy milyen függvényt kell integrálnia, és az „ellenfél”, amikor a függvényt kiválasztja, nem „tudja”, hogy a matematikus milyen módszer mellett döntött. Ahhoz, hogy a közelítő integrálást kétszemélyes 0-összegű játékként foghassuk fel, már csak arra van szükség, hogy a matematikus „veszteségét” definiáljuk. A legkisebb négyzetek módszerének analógiájára kézenfekvő a közelítő integrálásnál elkövetett hiba négyzetét tekinteni a matematikus „veszteségének”, bár persze a veszteség más, szintén észszerű értelmezései is elképzelhetők. Mi a következőkben mindig a hibanégyzettel fogjuk mérni a „veszteséget”. A közelítő integrálás ilyen felfogása mellett igen észszerű, ha a matematikus az „ellenfél” tiszta stratégiái halmazának, tehát az összes számbajövő integrálandó függvények halmazának ismeretében minimax stratégiát fog választani — ha ilyen létezik —, vagyis arra törekszik, hogy az integrálásnál elkövetett hiba (illetve annak négyzetének várható értéke) a módszere szempontjából legkedvezőtlenebb függvény esetében minimális legyen.

Meg fogjuk mutatni, hogy a számításba jövő függvények halmazának bizonyos eléggé tág választásánál a minimax stratégia a Monte-Carlo módszer választásában áll.

Az egyszerűség kedvéért közönséges integrálokra szorítkozunk, megjegyezve azonban, hogy az egész tárgyalás minden nehézség nélkül átvihető akárhánydimenziós integrálokra is.

Vizsgáljuk tehát a következő játékot:

A B játékos választ egy, a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvényt. Legyen

$$(1) \quad I = \int_0^1 f(x) dx .$$

Az A játékos, anélkül, hogy tudná, hogy B milyen függvényt választott, választ egy (x_1, x_2, \dots, x_n) pontot az n -dimenziós tér K_n egységkockájában $[0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n]$. Ezek után kiszámítja az

$$(2) \quad S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

közeliítő összeget; az A játékos veszteségén a

$$(3) \quad \Delta = (S - I)^2$$

mennyiséget értjük. Az A játékos minden „tiszta” stratégiája tehát K_n egy pontjának választásában áll. Az A játékos egy vegyes stratégiája ennél fogva jellemezhető egy μ mértékkel, amely K_n -ben van definiálva, és amelyre $\mu(K_n) = 1$. A tiszta stratégiáknak természetesen olyan elfajult mérték felel meg, amely egyetlen pontra van koncentrálna. Jelölje Φ azon $f(x)$ folytonos függvények halmazát, amelyből a B játékos választhat. Az A játékos minimax stratégiája nyilván a Φ halmaztól függ. Ha például Φ kizárólag a legfeljebb harmadfokú polinomokból áll, és $n = 6$, akkor A számára egy minimax stratégia, ha az (x_1, x_2, \dots, x_6) pontot a következőképpen választja $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$, $x_6 = 1$, vagyis a Simpson-féle szabály szerint jár el; ugyanis ez esetben $\Delta = 0$. Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor Φ azon $f(x)$ folytonos függvényekből áll, amelyekre

$$(4) \quad \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(u) du \right]^2 dx = 1,$$

vagyis Φ az egységnyi négyzetes ingadozású függvényekből áll. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez esetben az A játékos számára a minimax stratégia abban áll, hogy az x_1, x_2, \dots, x_n pontokat egymástól függetlenül találomra (egyenletes eloszlással) választja a $[0, 1]$ intervallumban, más szóval a stratégiájára jellemző μ mérték egyszerűen a közönséges Lebesgue-mérték K_n -ben.

Mielőtt ennek bizonyítására rátérnénk, a gondolatmenet megértésének megkönnyítése céljából egy, az említett analóg diszkrét problémát tárgyalunk, mégpedig egy N tagú véges összeg közelítő kiszámítását oly módon, hogy az összeg tagjaiból csak n tagot adunk össze, és ezt az összeget N/n -nel szorozzuk.

Vizsgáljuk tehát először a következő problémát: Az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget kívánjuk becsülni, úgy, hogy az y_1, y_2, \dots, y_N számok közül kiválasztunk n számot ($n < N$), és ha ezek: $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}$, akkor az Y összeget az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

értékkel becsüljük. Jelöljük a rövidség kedvéért az $1, 2, \dots, N$ számokból alkotott n -edosztályú (k_1, k_2, \dots, k_n) kombinációt \mathbf{k} -val. A fent leírt becslési eljárás jóságának megítéléséhez ismernünk kell azt, hogy a \mathbf{k} kombináció milyen valószínűséggel kerül kiválasztásra. Ezt a valószínűséget jelöljük $p_{\mathbf{k}}$ -val, ahol tehát \mathbf{k} végigfut az $1, 2, \dots, N$ elemekből képezhető $\binom{N}{n}$ számú különböző n -edosztályú kombináción. Az η becslés hibáján az η valószínűségi változónak az Y -től való négyzetes eltérésének várható értékét értjük, vagyis a „hiba”:

$$(5) \quad \delta = \mathbf{M}\{(\eta - Y)^2\} = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{N}{n} (y_{k_1} + \dots + y_{k_n}) - Y \right]^2 p_{\mathbf{k}}.$$

Legyen

$$z_k = y_k - \frac{Y}{N},$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^N z_k = 0.$$

Tehát

$$(5') \quad \delta = \frac{N^2}{n^2} \sum_k (z_{k_1} + \dots + z_{k_n})^2 p_k.$$

Szorítkozzunk azokra az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összegekre, amelyekre

$$(7) \quad \sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = 1,$$

vagyis amelyekre

$$(7') \quad \sum_{k=1}^N z_k^2 = 1.$$

A minimax eljárás megkeresése tehát a következőt jelenti: Legyen $P = (p_k)$ egy tetszőleges valószínűségeloszlás az $1, 2, \dots, N$ számok összes n -edosztályú kombinációinak halmazában; legyen $\delta(P)$ az (5') által definiált mennyiség maximuma, ha a z_k számok a (6) és (7') feltételeknek tesznek eleget; megkeresendő az a P_0 eloszlás, amelyre $\delta(P)$ értéke minimális.

A δ kvadratikus alak a négyzetreemelések elvégzése után a következő alakú lesz:

$$\delta = \frac{N^2}{n^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} z_i z_j,$$

ahol

$$(8) \quad \delta_{jj} = \sum_{j \in k} p_k$$

annak a valószínűsége, hogy a j szám benne van a kiválasztott k kombinációban, és ha $i \neq j$.

$$(9) \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{\substack{i \in k \\ j \in k}} p_k$$

annak a valószínűsége, hogy az i és j számok mindketten benne vannak a k kombinációban. Legyen $\xi_{ij} = 1$, ha i és j mindketten hozzátartoznak a k kombinációhoz, ellenkező esetben legyen $\xi_{ij} = 0$. Mivel a

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \xi_{ij}$$

valószínűségi változó δ_{jj} valószínűséggel $(n-1)$ -gyel, $1-\delta_{jj}$ valószínűséggel 0-val egyenlő, továbbá $\mathbf{M}\{\xi_{ij}\} = \delta_{ij}$, fennállnak a

$$(10) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \delta_{ij} = \delta_{jj}(n-1) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

összefüggések. Mivel továbbá

$$\sum_{j=1}^N \xi_{jj} = n,$$

tehát teljesül a

$$(11) \quad \sum_{j=1}^N \delta_{jj} = n$$

összefüggés is. (10)-ből és (11)-ből következik, hogy

$$(12a) \quad \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \delta_{ij} = n(n-1)$$

és

$$(12b) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} = n^2$$

Mivel a (6) és (7) feltételek a z_k változóknak szimmetrikusak, ha P egy tetszőleges eloszlás, és P^n egy olyan eloszlás, amely P -ből az $1, 2, \dots, N$ számok permutálása útján keletkezik, akkor $\delta(P) = \delta(P^n)$. Másrészt, ha képezzük különböző P_1, P_2, \dots, P_s eloszlások P keverékeloszlását q_1, q_2, \dots, q_s súlyokkal, akkor nyilvánvalóan

$$\delta(P) \leq \sum_{r=1}^s q_r \delta(P_r) \leq \max_{1 \leq r \leq s} \delta(P_r).$$

Ha tehát P_0 az az eloszlás, amelyet úgy kapunk, hogy a P eloszlásból képezzünk $N!$ eloszlást úgy, hogy az $1, 2, \dots, N$ számokat az összes lehetséges módon permutáljuk, és ezen eloszlásoknak vesszük a keverékét oly módon, hogy abban mind az $N!$ eloszlás egyforma $1/N!$ súllyal szerepel, akkor

$$\delta(P_0) \leq \delta(P).$$

A P_0 eloszlás azonban invariáns az $1, 2, \dots, N$ számok minden permutációjára vonatkozólag. Ebből következik, hogy a P_0 eloszlásnál p_k nem függ k -től, vagyis $p_k = \binom{N}{n}^{-1}$. Ez esetben természetesen δ_{ij} sem függ az (i, j) ($i \neq j$) számpártól és δ_{jj} sem függ a j számtól, vagyis (10) és (11) szerint

$$\delta_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \quad \text{ha } i \neq j \quad \text{és} \quad \delta_{jj} = \frac{n}{N}.$$

Mivel $\delta(P)$ értéke kizárólag a δ_{ij} számoktól függ, ha P_0^* egy olyan eloszlás, hogy a hozzátartozó

$$\sum \sum \delta_{ij} z_i z_j$$

kvadratikus alak azonos a P_0 -hoz tartozóval, akkor $\delta(P_0^*) = \delta(P_0)$ és így $\delta(P_0) = \delta(P_0^*) \leq \delta(P)$ bármely P eloszlásra. A $\delta(P_0)$ értéket könnyen meghatározhatjuk, ugyanis a (6) és (7) feltételek mellett

$$\delta(P_0) = \frac{N(N-n)}{n(N-1)}$$

Ennélfogva bármely P eloszlásra

$$(13) \quad \frac{N(N-n)}{n(N-1)} = \delta(P_0) \leq \delta(P) .$$

Az elmondottakból következik, hogy ha az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

kifejezéssel kívánjuk becsülni és a szóban forgó összeg választása kizárólag a

$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = 1$$

feltétellel van korlátozva, akkor egy lehetséges minimax stratégia abban áll, hogy az összes lehetséges n -edosztályú (k_1, k_2, \dots, k_n) kombinációkat ugyanazzal az $\binom{N-1}{n}$ valószínűséggel választjuk. Ez esetben η torzítatlan becslése

Y -nak és η szórásnégyzete $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}$ lesz.

A kapott eredményt interpretálhatjuk mint a numerikus integrációra vonatkozó állítást is. Ha ugyanis az

$$\int_0^1 f(t) dt$$

integrált kívánjuk meghatározni, ahol $f(t)$ egy értéktáblázatával megadott függvény, és feltesszük, hogy $f(t)$ értékeinek táblázata t -nek $t_k = k \cdot 10^{-m}$

alakú értékeire van megadva ($k = 1, 2, \dots, 10^m$), akkor az

$$\int_0^1 f(t) dt$$

integrálon nem érthetünk mást, mint az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget, ahol $N = 10^m$ és $y_k = N^{-1}f(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Mármost az összehasonlítás tárgyát képező közelítő integrálási eljárások abban állnak, hogy valamilyen szabály szerint kiválasztunk a t_1, t_2, \dots, t_N pontok közül n darabot, és ha ezek $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_n}$, akkor képezzük az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n y_{k_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(t_{k_j})$$

közelítő összeget.

A (7) feltevés a szóban forgó esetben azt jelenti, hogy

$$(14) \quad \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = N$$

A nyert eredmény úgy szól, hogy a felsorolt feltételek mellett a legcélszerűbb a k kombinációt véletlenszerűen megválasztani, oly módon, hogy teljesüljenek a

$$\delta_{jj} = \frac{n}{N} \quad \text{és} \quad \delta_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}, \quad \text{ha } i \neq j$$

feltételek. Ezt elérjük, ha pl. az összes k kombinációt ugyanazzal a valószínűséggel választjuk.

Nyilvánvaló, hogy a (14) feltételt pótolhatjuk az

$$(15) \quad \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 = s^2$$

feltétellel; ehhez csak minden y_k értéket s/\sqrt{N} -nel kell beszoroznunk. Ez esetben η szórása, vagyis a Monte-Carlo eljárás hibája

$$s \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$$

lesz.

A kapott eredmény nyilvánvalóan teljesen független attól, hogy egy- vagy többdimenziós integrálról van szó.

Nincs akadálya annak, hogy a fentieket átvigyük a kérdés folytonos tárgyalásmódjára.

Legyen

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

a kiszámítandó integrál; közelítő eljárásunk álljon abban, hogy választunk egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontot az n -dimenziós tér K_n egységkockájában, és képezzük az

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

közelítő összeget. Ha az \mathbf{x} pont valószínűség-eloszlását K_n -ben a μ mérték adja meg, akkor a várható hiba:

$$(16) \quad \Delta(f, \mu) = \int_{K_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - I \right)^2 d\mu$$

Osszuk fel az x_1, x_2, \dots, x_n koordinátatengelyeket N egyenlő részintervallumra. Ezáltal K_n -et N^n egybevágó, $1/N^n$ köbtartalmú kockára bontottuk fel. Jelölje π a K_n egységkockának egy olyan transzformációját, amely abban áll, hogy az említett N^n kockát valahogyan permutáljuk. Legyen μ^π az a mérték, amibe e transzformációnál a μ mérték átmegy, és legyen

$$\mu_N = \frac{\sum \mu^\pi}{(N^n)!}$$

ahol az összegezés az összes említett típusú π permutációkra vonatkozik. Ugyanúgy, mint a diszkrét esetben, belátható, hogy

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu^\pi) = \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu),$$

és így

$$(17) \quad \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_N) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu),$$

ahol Φ az összes

$$(18) \quad \int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2$$

feltételeknek eleget tevő függvények halmazát jelöli. A μ_N mérték az említett K_n kocka mindegyikéhez az $1/N^n$ mértéket rendel hozzá. Ebből következik, hogy ha E K_n -nek egy tetszőleges mérhető részhalmaza, akkor

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(E) = \mu_0(E),$$

ahol μ_0 az n -dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Ebből következik, hogy ha $f(t)$ tetszőleges a (18) feltételnek eleget tevő függvény, akkor

$$\Delta(f, \mu_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(f, \mu_N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left\{ \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_N) \right\},$$

tehát (17) szerint

$$\Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

és így

$$(19) \quad \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu).$$

Ebből már következik, hogy a μ_0 mérték választása minimax stratégia választását jelenti. A μ_0 mérték választása azonban nyilvánvalóan azt jelenti, hogy az x_1, x_2, \dots, x_n pontokat egymástól függetlenül találomra választjuk a $(0, 1)$ intervallumban, vagyis úgy, hogy x_1, x_2, \dots, x_n a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású és független valószínűségi változók. Vagyis a folytonos tárgyalásmód is ahhoz a konklúzióhoz vezetett, hogy a Monte-Carlo módszer választása minimax stratégiát jelent. μ_0 választása esetében $\Delta(f, \mu_0) = s^2/n$, vagyis S szórása s/\sqrt{n} . Abban az esetben, ha a számbajövő függvények összességét (15) helyett valamilyen más feltétel jellemzi, természetesen általában más lesz a minimax stratégia.

A Monte-Carlo módszerrel nagyszámú kísérletet végeztünk konkrét függvények integráljának közelítő kiszámítására. Az empirikus eredmények összhangban voltak a fent közölt elméleti megfontolásokkal. A kísérleteket a következőképpen végeztük el: Milliméterpapíron több, igen szabálytalan menetű, erősen ingadozó $f(x)$ folytonos függvényt rajzoltunk fel. Abból a célból, hogy a függvények integráljának pontos értéke rendelkezésünkre álljon, e függvényeket úgy választottuk, hogy grafikonjaik egy törtvonalat alkossanak, amelynek töréspontjai a milliméterpapiros rácspontjaiba estek. Ezek után különböző n értékek mellett kiszámítottuk az

$$\int_0^1 f(x) dx$$

integrál közelítő értékét a következő három módszerrel:

1° Az x_k pontokat rögzített helyzetűnek és ekvidisztánsnak választottuk ($x_k = k/n$, $k = 1, 2, \dots, n$).

2° Az x_k pontokat ekvidisztánsnak választottuk, azonban úgy, hogy az első pontot, x_1 -et, egyenletes eloszlásúnak választottuk a $(0, 1/n)$ intervallumban:

$$0 \leq x_1 < \frac{1}{n}; \quad x_k = x_1 + \frac{k-1}{n}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

3° Az x_k pontokat egymástól függetlenül, találomra választottuk a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlással.

Az egyenletes eloszlást természetesen csak közelítőleg valósíthatjuk meg, véletlen számtáblázat segítségével.⁶⁾

Tapasztalatainkat a következőkben foglalhatjuk össze :

a) Amíg n értéke jóval kisebb volt, mint az $f(x)$ függvényt ábrázoló törtvonal töréspontjainak száma, általában a 3^o eljárás adta a legjobb eredményt. n értékének növelésével a 3^o eljárás pontossága egy bizonyos határon túl már nagyon lassan javult, míg az 1^o, illetve 2^o eljárás pontossága lényegesen megjavult.

A tanulság ebből, hogy a Monte-Carlo módszert csak igen szabálytalan menetű függvények esetében érdemes alkalmazni, akkor, ha a felvehető pontok száma, n , olyan kicsiny, hogy ha az integrációs intervallumot n egyenlő részre osztjuk, ezeken az egyes részintervallumokon belül $f(x)$ még erősen ingadozik ; ha n értékét olyan nagyra vesszük, hogy az említett $1/n$ hosszúságú részintervallumokon belül $f(x)$ már csak keveset változik, a triviális ekvidisztáns felosztás jobb eredményt ad, mint a Monte-Carlo módszer.

b) A Monte-Carlo módszernél a hiba n növelésével (amint az várható is volt) általában $1/\sqrt{n}$ nagyságrendű volt, tehát igen lassan csökkent csak. Ez is arra mutat, hogy ha az alappontok számának nagymértékű növelésére lehetőség van, nem célszerű a Monte-Carlo módszert alkalmazni, mert az eredmény nem áll arányban a végzett munka mennyiségével. Ezzel szemben előnyös a módszer, ha kevés számú alapponttal kívánunk dolgozni, és nincs szükségünk nagy pontosságra. Természetesen, mivel egyes esetekben az átlagosnál lényegesen nagyobb hibák is előfordulhatnak, a Monte-Carlo módszer alkalmazása elsősorban akkor indokolt, ha nagyszámú integrál közelítő kiszámítására van szükség, és megelégszünk azzal, hogy a kapott értékek az integrálok túlnyomó részére tűrhető közelítést adjanak.

c) A 2^o eljárás, amely a triviális eljárás és a Monte-Carlo módszer kombinációjának tekinthető, nagy n esetében gyakran jobb közelítést nyújtott, mint az 1^o eljárás.

Nyilvánvaló, hogy ha az x_k pontok mindegyikét taláломra választottuk volna, mégpedig úgy, hogy x_k egyenletes eloszlású legyen a $((k-1)/n, k/n)$ részintervallumban, még jobb eredményt kaptunk volna. Ez érthető, hiszen ez az eljárás az úgynevezett „rétegezett mintavételnek” (stratified sampling) felel meg, és ezt más statisztikai eljárásoknál is sikerrel alkalmazzák a szórás csökkentésére.

Befejezésül még csak azt jegyezzük meg, hogy a véges összeg becslésére vonatkozó tárgyalás szoros kapcsolatban áll a véges sokaságokból való mintavétel kérdésével ; e téren legújabban J. HAJEK ért el figyelemre méltó eredményeket. (Ilyen vonatkozású előadásának kivonatát lásd e füzetben, a 635—636. oldalakon.)

(Beérkezett : 1956. X. 15.)

IRODALOM

- [1] H. A. MEYER (ed.) : *Symposium on Monte-Carlo methods*. Wiley, New York, 1956.
 [2] I. M. HAMMERSLEY—K. W. MORTON : „Poor man's Monte-Carlo.” *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.* **16** (1954) 23—38.

⁶⁾ Főként a [7] táblázatot használtuk.

- [3] V. S. VLADIMIROV: „On the application of Monte-Carlo methods for obtaining the lower characteristic number and the corresponding eigenfunction for a linear integral equation.” *Теория Вероятностей и ее Применения I* (1956) 113—130.
- [4] J. VON NEUMANN—O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [5] D. BLACKWELL—M. A. GIRSHICK: *Theory of games and statistical decisions*. Wiley, New York, 1954.
- [6] I. C. C. MCKINSEY: *Introduction to the theory of games*. McGraw-Hill (RAND Series), New York, 1952.
- [7] H. STEINHAUS: „Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych.” *Rozprawy Matematyczne* 6 (1954) 1—45.

МЕТОДЫ „MONTE-CARLO” КАК МИНИМАКСНЫЕ СТРАТЕГИИ

I. PALÁSTI и A. RÉNYI

Резюме

В настоящей работе рассматриваются методы Monte-Carlo с точки зрения теории игр. В качестве примера рассматривается численное приближение интеграла

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

непрерывной функции $f(x)$ суммой

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Чистая стратегия игрока В состоит из выбора функции $f(x)$. Предполагается, что множество Φ допустимых функций $f(x)$ состоит из всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2,$$

где $s > 0$ заданная постоянная. Чистая стратегия игрока А состоит из выбора системы точек (x_1, x_2, \dots, x_n) интервала $(0, 1)$. Проигрыш А определяется величиной $\Delta = (S - I)^2$. Какую-нибудь смешанную стратегию игрока А очевидно определяет какая-нибудь мера μ , определённая на измеримых подмножествах n -мерного куба K_n , и, если игрок А выбирает смешанную стратегию, определённую мерой μ , то его средний проигрыш:

$$\Delta(f, \mu) = \int_{K_n} (S - I)^2 d\mu.$$

В работе доказывается, что одна из минимаксных стратегий игрока А есть смешанная стратегия, определённая обычной мерой Lebesgue-а μ_0 в K_n , т. е.

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

для всех мер μ в K_n . Таким образом для игрока А является минимаксной стратегией выбор независимых и случайных (т. е. равномерно распределённых) точек x_1, x_2, \dots, x_n интервала $(0, 1)$, т. е. выбор стратегии „Monte-Carlo”! То же самое имеет место и в случае r -мерного интеграла ($r = 2, 3, \dots$). Средняя погрешность независимо от r равна s/\sqrt{n} . В связи с этим фактом часто подчёркивают, что метод Monte-Carlo выгоден лишь для

вычисления многомерных интегралов. В настоящей работе показывается, что эти же преимущества имеют место и в случае одномерных интегралов если предположить что интегрируемая функция сильно колеблется.

В работе исследуется и аналогичная проблема : оценка суммы

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

величиной

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j},$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ некоторое подмножество множества $(1, 2, \dots, N)$. Показывается, что если множество допустимых сумм состоит из таких сумм

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k,$$

для которых

$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = s^2,$$

то мы получим минимаксную стратегию, если каждому подмножеству k , состоящему из n различных элементов множества $(1, 2, \dots, N)$, сопоставим одна и та же вероятность $\binom{N}{n}^{-1}$.

Подчеркивается, что если изменяется множество допустимых функций или сумм, то минимаксная стратегия также изменяется.

Наконец, описывается ряд опытов, произведённых методом Monte-Carlo.

MONTE-CARLO METHODS AS MINIMAX STRATEGIES

I. PALÁSTI and A. RÉNYI

Summary

Monte-Carlo methods are considered in the present paper from the point of view of the theory of games. As an example, the numerical approximation of the integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

of the continuous function $f(x)$ by the sum

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

is considered. A pure strategy of the player B consists in the choice of a function $f(x)$. It is supposed that the set Φ of admissible functions $f(x)$ consists of all continuous functions satisfying the condition

$$\int_0^1 \left[f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2$$

where $s > 0$ is a given constant. A pure strategy of player A consists in the choice of an n -tuple of points (x_1, x_2, \dots, x_n) of the interval $(0, 1)$. The loss of A is defined by $\Delta = (S - I)^2$. A mixed strategy of A is clearly determined by a measure μ defined on the measurable subsets of the unit cube K_n of n -space, and if player A chooses the mixed strategy characterized by the measure μ his average loss is

$$\Delta(f, \mu) = \int_{K_n} (S - I)^2 d\mu .$$

It is shown in the paper that a minimax strategy for player A is to choose the mixed strategy corresponding to the ordinary Lebesgue measure μ_0 in K_n , i. e.

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

for any measure μ in K_n . Thus a minimax strategy for player A is to choose the points x_1, x_2, \dots, x_n independently at random (i. e. with uniform distribution) in the interval $(0, 1)$, i. e. to play a „Monte-Carlo” strategy. The same holds for an r -dimensional integral ($r = 2, 3, \dots$). The mean error is, independently of r , equal to s/\sqrt{n} . In connection with this fact, it has been frequently emphasized, that the Monte-Carlo method is advantageous only for many-dimensional integrals. In the present paper it is pointed out, that the same advantages present themselves for ordinary one-dimensional integrals, provided that the function to be integrated is very strongly oscillating.

The analogous problem of estimating the finite sum

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

by

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

where $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ is some subset of the set $(1, 2, \dots, N)$, is also considered. It is shown that if the set of admissible sums consists of those sums

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

for which

$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = s^2 ,$$

a minimax strategy is if the same probability $\binom{N}{n}^{-1}$ is attributed to all possible subsets k with n different elements of the set $(1, 2, \dots, N)$. It is pointed out that if the set of admissible functions resp. sums is changed, the minimax strategy changes too.

Finally account is given of some experimentation with Monte-Carlo methods.