# NÉHÁNY MEZŐGAZDASÁGI KÉRDÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VIZSGÁLATA, I.

L. ZIERMANN MARGIT

A Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet azzal a kéréssel fordult Intézetünkhöz, hogy dolgozzunk ki mérési eljárást vetőgépek vetésének, azaz a vetőgép által kiszórt magok egyenletességének az értékelésére, továbbá, hogy négyzetes kukoricavetés esetén — amidőn a kukorica elvetése géppel történik és az elvetett sorokra merőlegesen haladva kapálják ki az úgynevezett fészektávolságok közötti felesleges magokat — határozzuk meg az így okozott szemveszteséget amellett, hogy a fészekben lévő magok száma előírt biztonsággal egy adott értéknél nagyobb legyen.

A következőkben bizonyos modellt tételezve fel, a vetésegyenletesség mérésének kérdését tárgyaljuk, a négyzetes kukoricavetéssel kapcsolatos vizsgálatokról egy későbbi cikkben számolunk be.

## 1. §. A vetés egyenletességének a vizsgálata

Tegyük fel, hogy a vetőgép egyenesen halad, miközben az úgynevezett csoroszlyából, melyen egymástól meghatározott távolságban nyílások vannak, magok esnek ki. A vetést egyenletesnek mondjuk, ha a vetőgép által elvetett minden sorban a magok az előírt távolságra, az úgynevezett tőtávolságra helyezkednek el egymástól. A tőtávolságot a vetőgép (illetve a vetőgép tárcsájának) megfelelő beállításával kívánjuk elérni. Mégis, az elvetett sor egyenletessége nem csupán attól függ, hogy a tárcsát megfelelőképpen állítottuk-e be, hanem számos más olyan tényező együttes hatásától is, amelyet előre értékelni, megbecsülni rendkívül bonyolult. Gondoljunk itt például a talaj egyenetlenségeire, az egész gép konstrukciójára (berezgés stb.). Azt, hogy a gép egyenletesen vet-e, tapasztalati úton, kísérleti vetéssel kell ellenőrizni. A feladat, mint a bevezetésben mondottuk, olyan mérőszám konstruálása, amely kifejezi a vetés egyenletességét, és ezzel egyúttal magát a vetőgépet is minősíti.

Annak megállapítása, hogy az elvetett sorokban levő magok átlagban egymástól az előírásnak megfelelő távolságban (az úgynevezett tőtávolságra) helyezkednek-e el, nyilvánvalóan könnyű ; egyszerűen megmérjük a kísérleti vetésnél két-két mag egymástól való távolságát (az összes elvetett magnál), s e távolságok átlagát véve eldönthetjük, hogy az előírásnak a tényleges átlagos tőtávolság megfelel-e. Ez az egy adat azonban, tudniillik az átlagos tőtávolság még nem ad teljes képet a vetésről. Nem közömbös ugyanis az, hogy ugyanazon átlagos tőtávolság esetén az elvetett magok úgy helyezkednek-e el, hogy túl nagy és túl kis magtávolságok váltogatják egymást (tehát hézagok és torlódások), vagy pedig oly módon, hogy a tőtávolsághoz képest sem túl nagy, sem túl rövid távolságok nincsenek. Kézenfekvő tehát a magtávolságok szórását is meghatározni. Ha a szórás értéke közel zérus, akkor a vetés közel egyenletes ; ha azonban a szórás nagysága nem sokkal kisebb, mint az átlagos tőtávolság, akkor már a szórás sem mond sokat a vetés egyenletességéről, ugyanis nincs tekintettel az egymás utáni magtávolságok kapcsolatára. Nem közömbös ugyanis a hézagok és torlódások egymásutánja sem, így például elképzelhető két olyan, egymástól különböző, de azonos átlagos tőtávolságú és szórású vetés, amelyek közül az egyikben egy-két hézag után egy-két magtorlódás következik, ismét egy-két hézag, magtorlódás, és így tovább, míg a másiknál számos hézag után sok magtorlódás. Az előbbi vetést mezőgazdasági okokból kedvezőbbnek minősítik.

Szükségesnek látszik tehát a magtávolságok közötti korrelációt is tekintetbe venni. Célszerű ezért két — vagy általában $k$ — egymásutáni magtávolság szorzata négyzetgyökének — illetve általában $k$-adik gyökének — az átlagát venni. A vetésegyenletességgel foglalkozó szakirodalomban többnyire ezzel vagy más, hasonló mértékszámmal foglalkoznak.

A következőkben olyan matematikai modellt fogadunk el, amely lehetőleg jól írja le a vetés folyamatát, és amely ugyanakkor lehetővé teszi a vetésegyenletesség valószínűségszámítási tárgyalását. Következőleg, bizonyos feltevéseket kell tennünk a magok eloszlására nézve.

Tegyük fel, hogy a magok eloszlását egy $T$ hosszúságú vetési szakaszon vizsgáljuk, jelöljük ezt $(0, T)$-vel. A $(0, T)$ szakaszon az elvetett magok helyzetét jelöljék $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, ahol $\nu$ a $(0, T)$ szakaszra jutó magok száma. Feltesszük, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ értékek és maga $\nu$ is valószínűségi változó.

A valószínűségszámítási szempontból legegyszerűbb feltevés, ami gyakorlatilag elég indokolt, az, hogy a magok eloszlása Poisson-folyamatot alkot. Ezen azt értjük, hogy ha bevezetjük két-két szomszédos mag távolságára a $\tau_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ jelölést, akkor a $\tau_i$ valószínűségi változók függetlenek és a $\tau_i$ változó valószínűség-eloszlásfüggvénye :

$$\mathbf{P}\{\tau_i < x\} = 1 - e^{-\lambda x}\,, \quad \text{ha } x > 0\,.$$

Ebben az esetben a $\nu$ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, azaz

$$\mathbf{P}\{\nu = n\} = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

a valószínűsége annak, hogy a $T$ hosszúságú szakaszra $n$ mag esik. A $\lambda$ számot a Poisson-folyamat sűrűségének nevezik ; esetünkben ez nem más, mint az átlagos tőtávolság reciprok értéke. Ugyanis a $\tau_i$ távolságok várható értéke :

$$\mathbf{M}\{\tau_i\} = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Ismeretes, hogy a $\tau_i$ távolságok szórása :

$$\mathbf{D}\{\tau_i\} = \frac{1}{\lambda}\,,$$

azaz a magtávolságok várható értéke és szórása megegyezik egymással.

A Poisson-folyamat a következő érdekes sajátsággal rendelkezik. Ha tudjuk, hogy a Poisson-folyamatban a $(0, T)$ időközben $n$ esemény történt, vagyis, hogy a $T$ hosszúságú vetési sorban $n$ mag van, akkor ezen feltétel mellett az $n$ mag eloszlása megegyezik $n$ számú, a $(0, T)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pont eloszlásával. Tehát ha tudjuk, hogy $\nu = n$, akkor e feltételre vonatkozóan a $\tau_i$ várható értéke:

$$\mathbf{M}\{\tau_i | \nu = n\} = \frac{T}{n+1},$$

és szórása:

$$\mathbf{D}\{\tau_i | \nu = n\} = \frac{T}{n+1}\sqrt{\frac{n}{n+2}};$$

ugyanis $\tau_i$ sűrűségfüggvénye a $\nu = n$ feltétel mellett $n(1-x/T)^{n-1}/T$, feltéve, hogy $0 \leq x \leq T$.

Megjegyezzük, hogy Poisson-folyamatot feltételezni indokolt abban az esetben, amidőn a gép ideális működési viszonyok mellett tökéletesen vetne ugyan, de az adott működési viszonyok mellett a magok kiszórása nem biztosan történik meg, hanem csak egy bizonyos valószínűséggel.

A Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet rendelkezésünkre bocsátotta egy kísérleti vetés adatait, ezek átlaga és szórása közel megegyező, ami feltevésünk mellett szól. Az adatok a következők:

**Keresztbe kapálás céljából sűrűn vetett kukoricaszemek elhelyezkedése egy sorban 0—1500 cm-ig**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,4 | 107,8 | 318,2 | 468,7 | 682,6 | 857,0 | 1085,6 | 1318,4 |
| 9,2 | 109,6 | 322,3 | 493,8 | 686,7 | 865,4 | 1097,5 | 1335,2 |
| 11,0 | 113,2 | 325,7 | 507,6 | 688,2 | 868,4 | 1104,3 | 1337,7 |
| 12,6 | 132,5 | 330,2 | 511,0 | 704,3 | 869,5 | 1112,5 | 1340,7 |
| 19,3 | 138,6 | 331,7 | 512,8 | 708,5 | 871,4 | 1132,4 | 1341,7 |
| 19,4 | 142,8 | 348,7 | 512,8 | 710,0 | 874,5 | 1146,7 | 1355,5 |
| 20,7 | 143,0 | 350,2 | 525,7 | 712,6 | 875,2 | 1159,3 | 1363,0 |
| 22,8 | 144,6 | 355,0 | 551,2 | 717,8 | 884,3 | 1160,5 | 1369,2 |
| 25,6 | 154,0 | 361,2 | 587,1 | 723,2 | 888,1 | 1161,2 | 1371,4 |
| 28,5 | 159,7 | 368,5 | 588,3 | 730,7 | 912,5 | 1164,7 | 1372,5 |
| 40,2 | 164,5 | 373,4 | 596,0 | 750,6 | 917,6 | 1173,5 | 1373,8 |
| 40,7 | 165,7 | 374,5 | 607,5 | 755,6 | 919,4 | 1231,5 | 1380,1 |
| 47,8 | 179,7 | 376,5 | 623,8 | 756,4 | 921,2 | 1254,2 | 1395,0 |
| 56,2 | 182,5 | 379,4 | 625,5 | 767,5 | 923,4 | 1255,0 | 1402,4 |
| 71,3 | 238,2 | 387,8 | 629,1 | 767,9 | 958,5 | 1259,7 | 1427,5 |
| 71,9 | 266,5 | 392,5 | 636,0 | 770,1 | 961,2 | 1264,4 | 1433,2 |
| 81,2 | 281,3 | 401,8 | 640,9 | 785,8 | 974,1 | 1282,6 | 1435,1 |
| 82,9 | 283,5 | 411,6 | 644,7 | 800,0 | 986,7 | 1298,0 | 1448,5 |
| 83,7 | 302,0 | 421,7 | 649,2 | 822,5 | 1014,5 | 1308,2 | 1491,7 |
| 96,5 | 304,2 | 433,8 | 652,4 | 826,4 | 1020,2 | 1311,2 | |
| 104,5 | 310,6 | 447,0 | 668,9 | 828,9 | 1049,0 | 1316,0 | |

A magok átlagos tőtávolsága fenti vetési sorban 9,33, a szórás 9,83.

## 2. §. Mértékszámok

A következőkben feltesszük, hogy a magok eloszlása a $(0, T)$ szakaszon a Poisson-folyamat eseményeinek megfelelően történik. Jelölje $\nu$ a $(0, T)$ szakaszra eső magok számát és legyen $k$ egy rögzített pozítiv egész szám.

1. Javasoljuk a $\{\tau_i\}$ magtávolságok egyenletességének mérésére a következő mennyiségeket: Legyen $\vartheta_k = 0$, ha $\nu < k$, és

$$\vartheta_k = \frac{\Theta_k}{\nu - k + 1}, \quad \text{ahol} \quad \Theta_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \ldots \tau_{i+k-1})^{1/k}, \text{ ha } \nu \geqq k .$$

Abban az esetben, amidőn a magok eloszlása tökéletesen egyenletes, akkor $\vartheta_k = \tau$, ahol $\tau$ az előírt tőtávolság. Modellünk szerint azonban a $\{\tau_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ értékek valószínűségi változók, tehát a $\vartheta_k$ értékek is azok. Határozzuk meg ezek várható értékét és szórásnégyzetét.

A várható értékre vonatkozólag a teljes várható érték tétel alapján felírható, hogy

$$\mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n\} \mathbf{M}\{\vartheta_k | \nu = n\} = \tag{1}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{\nu = n\}}{n - k + 1} \mathbf{M}\{\Theta_k | \nu = n\},$$

ahol

$$\mathbf{P}\{\nu = n\} = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!},$$

és a $\nu = n$ feltétel mellett $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ekvivalens valószínűségi változók. A $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ változók együttes sűrűségfüggvénye a $\nu = n$ feltétel mellett:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k | \nu = n) = \tag{2}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{T^k} \left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{T}\right)^{n-k},$$

ha $0 < x_1, 0 < x_2, \ldots, 0 < x_k$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_k < T$, különben zérus. A fenti képlet könnyen indokolható, ha figyelembevesszük, hogy a $\nu = n$ feltétel mellett az $n$ pont a $(0, T)$ intervallumon egymástól függetlenül egyenletesen oszlik el. Mivel $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ekvivalens változók, tehát bármely $k$ különböző változó együttes sűrűségfüggvénye megegyezik a (2) alattival.

Számítsuk ki ezután az

$$\mathbf{M}\{(\tau_i \tau_{i+1} \ldots \tau_{i+k-1})^{1/k} | \nu = n\}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

illetve az ezekkel megegyező

$$\mathbf{M}\{(\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k)^{1/k} | \nu = n\}$$

várható értékeket.

Általában tekintsük az

$$\mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\tau_k^{\alpha_k}|\nu=n\}$$

várható értéket; ebből $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=1/k$ választással kapjuk a kívánt várható értéket.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\tau_k^{\alpha_k}|\nu=n\}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{T^k}\underset{\substack{x_1+\ldots+x_k<T\\0<x_1,\ldots,0<x_k}}{\int\cdots\int}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{T}\right)^{n-k}dx_1\,dx_2\ldots dx_k\,.$$

A jobboldal a Liouville-féle integráltétel [2] segítségével könnyen kiszámítható. E tétel szerint

$$\underset{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_k<T\\0<x_1,\,0<x_2,\ldots,\,0<x_k}}{\int\cdots\int}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_k^{\alpha_k}g(x_1+x_2+\ldots+x_k)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_k=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+1)}\int_0^T g(y)\,y^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+k-1}dy\,.$$

Ennek alkalmazásával

$$\mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\tau_k^{\alpha_k}|\nu=n\}=$$

$$=T^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_k+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+n+1)}\,.$$

Speciálisan

$$\mathbf{M}\{\tau_1^{1/k}\tau_2^{1/k}\ldots\tau_k^{1/k}|\nu=n\}=T\,\frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k}{n+1}\tag{3}$$

és

$$\mathbf{M}\{\Theta_k|\nu=n\}=\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathbf{M}\{\tau_i^{1/k}\tau_{i+1}^{1/k}\ldots\tau_{i+k-1}^{1/k}|\nu=n\}=\frac{n-k+1}{n+1}\,T\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k,$$

tehát

$$\mathbf{M}\{\vartheta_k|\nu=n\}=\frac{T}{n+1}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k.\tag{4}$$

Ugyanis az összeg minden tagja (3)-mal egyenlő.

Ezután (1) értelmében

$$\mathsf{M}\{\vartheta_k\} = T\left(\Gamma\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{(n+1)!}\,.$$

Átalakítva:

$$\mathsf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\right)^{k-1} \left(1-\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!}\right). \tag{5}$$

Rendszerint azonban $\lambda T$ igen nagy. Nagy $\lambda T$-értékekre jó közelítéssel a következő aszimptotikus képletet alkalmazhatjuk:

$$\mathsf{M}\{\vartheta_k\} \sim \frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\right)^{k} \left[1-\Phi\left(\frac{k+1-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right)\right], \tag{6}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du\,.$$

Ha tehát $k$ kicsiny $\lambda T$-hez képest, akkor

$$\mathsf{M}\{\vartheta_k\} \sim \frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\right)^{k}, \tag{7}$$

és a relatív hiba $\exp(-\lambda T)$ nagyságrendű.

Mivel $\lambda T$ a vizsgált szakaszra eső magok átlagos számát jelenti, feltehető, hogy $\lambda T > 50$, $k$ számára pedig a 2, 3, 4 értékek jönnek csak számításba, tehát számolhatunk egyszerűen úgy, mintha $\mathsf{M}\{\vartheta_k\}$ pontosan a (7) reláció jobboldalával volna egyenlő.

A $\vartheta_k$ számok várható értéke tehát $k$-val a következőképpen változik:

| $k$ | $\mathsf{M}\{\vartheta_k\}$ |
|---|---|
| 1 | $\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 1{,}0000\ldots$ |
| 2 | $\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0{,}9477\ldots$ |
| 3 | $\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0{,}7121\ldots$ |
| 4 | $\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0{,}6749\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Ez a táblázat kiindulásul szolgálhat a ténylegesen észlelt $\vartheta_k$ számok vizsgálatához. Ha a $\vartheta_k \Big/ \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{1/k}$ számok közel egyenlőek, akkor a magok feltehetőleg egyenletes eloszlásúak, ha viszont nem, akkor az egyenletestől eltérő vetéssel van dolgunk. További matematikai statisztikai módszerekkel eldönthető azután, hogy ez az eltérés a véletlennek tulajdonítható-e, vagy pedig valamely más olyan oknak, amelyet felderítve és kiküszöbölve a gép vetésének egyenletessége javítható. Arra is gondolhatunk, hogy az azonos vetési körülmények között több ugyanolyan típusú géppel végzett kísérleti vetéseket a fenti táblázat számaitól való százalékos eltérés alapján lehetne minősíteni, illetve rangsorolni.

Ismert általános tételekből következik, hogy a $\vartheta_k$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel konvergál az

$$M_k = \frac{1}{k}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{1/k}$$

határértékhez, ha $T \to \infty$.

Ez a következőképpen lehet belátni: Legyen

$$\xi_n = (\tau_n \tau_{n+1} \ldots \tau_{n+k-1})^{1/k}.$$

Akkor a $\xi_n$ valószínűségi változók stacionárius sorozatot alkotnak, továbbá $\xi_n$ és $\xi_m$ függetlenek, ha $|n-m| \geq k$. Mivel $\mathbf{M}\{\xi_n\}$ létezik, 1 valószínűséggel létezik az

$$\eta_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$$

valószínűségi változó-sorozat határértéke, ha $n \to \infty$. Azt is könnyen be lehet látni,[1] hogy ez a határérték éppen $M_k$ (lásd pl.: [6], 465. oldal). Mivel továbbá $\nu$ 1 valószínűséggel $+\infty$-hez tart, ha $T \to \infty$, következik, hogy

$$\vartheta_k = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{\nu-k+1}}{\nu-k+1}$$

is 1 valószínűséggel konvergál $M_k$-hoz.

2. Tekintsük a következőképpen értelmezett mértékszámokat:

$$R_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1}\left(\tau_i+\tau_{i+1}+\ldots+\tau_{i+k-1}-\frac{k}{\lambda}\right)^2,$$

illetve

$$r_k = \frac{R_k}{\nu-k+1},$$

[1] Ugyanis a szóban forgó stacionárius sorozat „metrikusan tranzitív."

ahol $1/\lambda$ az előírt tőtávolságot jelenti. Ha a gépi vetés tökéletesen egyenletes (a gép a magokat pontosan az előírt tőtávolságra szórja ki), akkor valamennyi $R_k$, illetve $r_k$ érték zérus.

Az általunk vizsgált modell esetén $R_k$, illetve $r_k$ valószínűségi változó. Határozzuk meg először $R_k$ várható értékét. A teljes várható érték tétel alapján

$$\mathbf{M}\{R_k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} \mathbf{P}\{\nu = n\} . \tag{8}$$

Mivel a $\nu = n$ feltétel mellett $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ekvivalens valószínűségi változók, tehát

$$\mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} = (n - k + 1)\mathbf{M}\left\{\left(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k - \frac{k}{\lambda}\right)^2\right\} .$$

A $\nu = n$ feltétel mellett $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k$ sűrűségfüggvénye:

$$g_k(x | \nu = n) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{x}{T}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{x}{T}\right)^{n-k}\frac{1}{T}, \text{ ha } x \geqq 0 .$$

Így

$$\mathbf{M}\{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k | \nu = n\} = \int_0^{\infty} x\, g_k(x | \nu = n)\, dx = \frac{kT}{n+1}$$

és

$$\mathbf{M}\{(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k)^2 | \nu = n\} = \int_0^{\infty} x^2 g_k(x | \nu = n)\, dx = \frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)} .$$

Következésképpen

$$\mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} = (n - k + 1)\left\{\frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)} - 2\frac{k}{\lambda}\frac{kT}{n+1} + \frac{k^2}{\lambda^2}\right\}. \tag{9}$$

Fentiek ismeretében $\mathbf{M}\{R_k\}$ explicite felírható (8) alapján. Aszimptotikusan, $T \to \infty$ esetében

$$\mathbf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda} .$$

(9) felhasználásával

$$\mathbf{M}\{r_k\} = \sum_{n=k}^{\infty}\left\{\frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)} - 2\frac{k}{\lambda}\frac{kT}{n+1} + \frac{k^2}{\lambda^2}\right\} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!} =$$

$$= \frac{k(k+1)}{\lambda^2}\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{2k^2}{\lambda^2}\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{k^2}{\lambda^2}\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!} =$$

$$= \frac{k}{\lambda^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{k+1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\right) + \frac{k^2}{\lambda^2} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda T}{k+1}\right) .$$

Igen nagy $T$ értékekre

$$\mathbf{M}\{r_k\} \sim \frac{k}{\lambda^2} .$$

Ha a vetés egyenletes, akkor valamennyi $R_k = 0$, illetve $r_k = 0$. Ha a vetés az általunk leírt modell szerint történik, akkor az $\{r_k/k\}$ sorozat közel állandó. Ha ez nem teljesül, akkor a magok eloszlása eltér az egyenletességtől. Ugyanugy, mint $\vartheta_k$ esetében, ez esetben is meg lehet mutatni, hogy $r_k$ 1 valószínűséggel konvergál $k/\lambda^2$-hez, ha $T \to \infty$.

KERTÉSZ ISTVÁN [4] a vetésegyenletesség mérésére a $\sigma_k$ mértékszámot javasolja, amelyet $r_k$ segítségével a következőképpen fejezhetünk ki:

$$\sigma_k = \sqrt{r_{2^{k-1}}} .$$

Egyenletes vetés esetén valamennyi $\sigma_k = 0$.

(Beérkezett: 1956. IX. 17.)

## IRODALOM

[1] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[2] Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ: *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том III.*, p. 478.) Гостехиздат, Москва, 1949.

[3] KERTÉSZ I.: *Mezőgazdasági gépkísérletekkel kapcsolatos statisztikai számítások.* Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai, Budapest, 1946.

[4] KERTÉSZ I.: *A hosszanti vetésegyenletesség kiértékelésének új módszere.* (Sajtó alatt)

[5] TAKÁCS L.: „Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **4** (1954) 473–504.

[6] J. L. DOOB: *Stochastic processes.* Wiley, New York, 1953.

## ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВОПРОСОВ

M. L. ZIERMANN

### Резюме

Работа занимается с различными величинами, которые измеряют равномерность сева сеялкой. Работа исходит из предположения, что в случае равномерного сева зерна располагаются вдоль линии, по которой следует сеялка, соответствуя процессу Пуассона, т. е. расстояния между отдельными зернами, которые обозначаются через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, — независимые случайные величины с одинаковыми показательными распределениями. Рассмотрим зерна, попадающие на фиксированный отрезок $(0, T)$. Их число, $\nu$ также является случайной величиной. Автор для измерения равномерности сева предлагает величину

(1) $$\vartheta_k = \frac{\Theta_k}{\nu - k + 1},$$

где $k$ данное целое положительное число,

(2) $$\Theta_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \ldots \tau_{i+k-1})^{1/k} \text{ для } \nu \geq k \text{ и } \Theta_k = 0 \text{ для } \nu < k \, .$$

Она доказывает, что если сев в указанном смысле равномерен, то математическое ожидание величины $\vartheta_k$

(3) $$\mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^k \left(1 - \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\right),$$

где $1/\lambda$ математическое ожидание расстояний между зернами. Доказано, что для $T \to \infty$, $\vartheta_k$ сходится с вероятности 1 к пределе $\frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k$. Работа занимается также следующим альтернативным способом измерение равномерности сева:

(4) $$r_k = \frac{R_k}{\nu - k + 1},$$

где

(5) $$R_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1}\left(\tau_i + \tau_{i+1} + \ldots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda}\right)^2.$$

Доказывает, что, если $T \to \infty$, то

(7) $$\mathbf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda},$$

и при $T \to \infty$, $r_k$ сходится с вероятности 1 к пределе $k/\lambda^2$.

## WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG EINIGER LANDWIRTSCHAFTLICHER PROBLEME

M. L. ZIERMANN

### Zusammenfassung

In der Arbeit werden verschiedene Verfahren zur Messung der Gleichmässigkeit der von Säemaschinen geleisteten Saat angegeben. Es wird angenommen, dass die Samen längs der Linie, auf der die Säemaschine fortschreitet, Poissonsche Verteilung besitzen, d. h. die Abstände der nächstbenachbarten Samen sind unabhängig und von exponentialer Verteilung. Diese Abstände mögen mit $\tau_1$, $\tau_2$, ... bezeichnet werden.

Als Mass der Gleichmässigkeit der Saat wird die Zahl

(1) $$\vartheta_k = \frac{\Theta_k}{\nu - k + 1}$$

vorgeschlagen, wobei $\nu$ den Anzahl der Samen auf der Strecke $(0, T)$ bedeutet, $k$ eine gegebene positive ganze Zahl ist, und

(2) $$\Theta_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \ldots \tau_{i+k-1})^{1/k}$$

für $\nu \geq k$ und $\Theta_k = 0$, wenn $\nu < k$.

Es wird gezeigt, dass für den Erwartungswert $\mathbf{M}\{\vartheta_k\}$ von $\vartheta_k$ die Formel

(3) $$\mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k \left(1 - \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\right)$$

gilt, wobei $\lambda$ den Erwartungswert der $\tau_j$ bedeutet. Es wird gezeigt dass für $T \to \infty$ $\vartheta_k$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den Grenzwert $\frac{1}{\lambda}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k$ strebt.

Ferner wird eine andere Masszahl der Gleichmässigkeit der Saat behandelt. Es sei gesetzt

$$r_k = \frac{R_k}{\nu - k + 1} \tag{4}$$

wobei

$$R_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} \left(\tau_i + \tau_{i+1} + \ldots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda}\right)^2. \tag{5}$$

Es wird die asymptotische Relation

$$\mathsf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda} \qquad (T \to \infty) \tag{6}$$

bewiesen ferner wird bewiesen dass für $T \to \infty$ $r_k$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen $k/\lambda^2$ strebt.