CIKLIKUS SZIMMETRIÁVAL BÍRÓ TÉRBELI RÁCSOS TARTÓK RÚDERŐINEK MEGHATÁROZÁSA HIPERMATRIXOK ALKALMAZÁSÁVAL

BÉRES ELEK, LOVASS-NAGY VIKTOR és SZABÓ JÁNOS

Bevezetés

Jelen dolgozat célja a matrixelmélet néhány újabb eredményének alkalmazása olyan térbeli rácsos tartók vizsgálatára, amelyek felépítésében ciklikus szimmetria mutatkozik. Az ilyen rácsos tartók rúdjai egyrészt egymással párhuzamos síkokban elhelyezkedő m-oldalú szabályos sokszögeket (úgynevezett *gyűrűket*), továbbá a gyűrűk síkjaira merőleges síkokban elhelyezkedő (általában nyílt) egymással egybevágó úgynevezett *meridiánpoligonokat* alkotnak, másrészt mint ferde *rács-rudak* létesítenek kapcsolatot a gyűrűk és meridiánpoligonok között. A rácsos tartó rúdjai kivétel nélkül csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz a tartó csomópontjaiban. Általában minden egyes csomópontban gyűrű-, meridián- és rács-rudak találkoznak. A megtámasztásokra vonatkozólag különleges kikötést nem teszünk. A tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria tehát azt jelenti, hogy ha a tartót a gyűrűk középpontjain átmenő szimmetria-tengelye körül $2\pi/m$ szöggel, illetve e szög egészszámú többszörösével elforgatjuk, a tartó elforgatás előtti helyzetével egybevágó helyzetbe jut, feltéve, hogy az ugyanazon gyűrűhöz tartozó rudak teljesen megegyezőek, továbbá a két szomszédos gyűrű közé eső rácsrudak teljesen megegyezőek, és végül két szomszédos gyűrű közé eső meridiánrudak is teljesen megegyezőek.

Az alábbiakban vizsgálatainkat a ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartóknak úgy a statikailag határozott, mint a statikailag határozatlan esetére ki fogjuk terjeszteni (lásd: [1], 455. oldal). A ciklikus szimmetriát mutató térbeli rácsos tartók vizsgálatával több szerző foglalkozott (lásd: [2], [3], [4]), e dolgozatokban azonban nem nyernek alkalmazást a matrixszámítás által nyújtott előnyök.

Jelölések:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ .... a_{ij} skalárelemekből álló kvadratikus matrix ([5])

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$ .... $\mathbf{A}_{ij}$ blokkokból álló kvadratikus hipermatrix ([6], [7])

$\mathbf{A}^{-1}$	**A** reciproka (inverze)
$\mathbf{A}^{*}$	**A** transzponáltja
adj **A**	**A** adjungáltja
$\lvert\mathbf{A}\rvert = \det \mathbf{A}$	**A** determinánsa
$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$	oszlopmatrix (vektor)
$\boldsymbol{a}^* = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n]$	sormatrix (vektor), (az $\boldsymbol{a}$ oszlopmatrix konjugált transzponáltja)
$\mathbf{A} \cdot\!\times \mathbf{B} = [\mathbf{A}\, b_{ij}]$; $\mathbf{B} = [b_{ij}]$	direkt szorzatok
$\mathbf{A} \times\!\cdot \mathbf{B} = [a_{ij}\, \mathbf{B}]$; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$	
$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$	diagonálmatrix
$\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$	ciklikus matrix
$\mathbf{E} = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$	egységmatrix
$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C}(0, 1, \ldots, 0)$	primitív ciklikus matrix
λ_ν	az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ν-edik sajátértéke
ω_ν	az $\boldsymbol{\Omega}$ m-edrendü primitív ciklikus matrix ν-edik sajátértéke, azaz az $x^m = 1$ egyenlet ν-edik gyöke (az m-edik egységgyökök közül a ν-edik)
$\boldsymbol{u}_\nu^* = [1, \bar{\omega}_\nu, \bar{\omega}_\nu^2, \ldots, \bar{\omega}_\nu{}^{-m-1}]$	
C_{ij}	az (alulról számítva) i-edik szabályos sokszöget alkotó csomópontok közül (az elsőnek választott csomóponttól jobbraeső j-edik csomópont
S_{hk}^{ij}	a statikailag határozott tartó C_{ij} és C_{hk} csomópontjait összekötő rúdban fellépő rúderő (pozitív előjelű, ha a rúd húzott; negatív előjelü, ha a rúd nyomott)
P^{ij}	a C_{ij} csomópontban támadó erő
P_x^{ij}, P_y^{ij}, P_z^{ij}	a P^{ij} erőnek a C_{ij} csomóponthoz rendelt (x, y, z) koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos összetevői
(x, y, z)	a C_{ij} csomóponthoz rendelt koordinátarendszer; origója a C_{ij} csomópont; x-tengelye a csomóponton átmenő gyűrű és meridián-poligon síkjának metszésvonala; y-tengelye a gyűrű síkjában, z-tengelye pedig a meridiánpoligon síkjában fekvő, az x-tengelyre merőleges egyenes. A pozitív x-tengely a szerkezetből kifelé, a pozitív z-tengely a nagyobb indexű gyűrű síkja felé mutat, az y-tengely pozitív iránya pedig úgy választandó, hogy (x, y, z) az adott sorrendben jobbcsavar-rendszert alkosson.

1. §. Ciklikus blokkokból álló hipermatrixok analitikus függvényének kifejezése direkt szorzatok segítségével

Legyen a csupa m-edrendű kvadratikus blokkokból álló $(m \times n)$-edrendű $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ hipermatrix valamennyi blokkja ciklikus matrix. Ez esetben bármely $\mathbf{A}_{ij}$ blokk előállítható

$$(1.1) \qquad \mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_{\nu,ij} \boldsymbol{u}_\nu \boldsymbol{u}_\nu^*$$

kanonikus alakban, ahol

$$(1.2) \qquad \lambda_{\nu,ij} = a_{0,ij} + a_{1,ij}\omega_\nu + \ldots + a_{m-1,ij}\,\omega_\nu^{m-1} \ ;$$

$$(1.3) \qquad \omega_\nu = e^{\frac{2\pi i\nu}{m}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1 \ ; \ i \text{ a képzetes egységet jelenti}) \ .$$

A ciklikus blokkok fenti kanonikus előállításának felhasználásával az $\mathbf{A}$ hipermatrix nyilván felírható az alábbi módon, azaz direkt szorzatok összegeként:

$$(1.4) \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} [\lambda_{\nu,ij}] \times \cdot\, \boldsymbol{u}_\nu \boldsymbol{u}_\nu^* \ .$$

Minthogy két direkt szorzat összeszorzása az

$$(\mathbf{U}_1 \times \cdot\, \mathbf{V}_1) \cdot (\mathbf{U}_2 \times \cdot\, \mathbf{V}_2) = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 \times \cdot\, \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$$

alakban végezhető (feltéve, hogy $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{U}_2$, illetve $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{V}_2$ az adott sorrendben konformábilisak), továbbá mivel

$$\boldsymbol{u}_\mu^* \boldsymbol{u}_\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \mu \neq \nu \\ 1, & \text{ha} \quad \mu = \nu \ , \end{cases}$$

nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ hipermatrix bármely analitikus függvénye az alábbi kanonikus alakban állítható elő:

$$(1.5) \qquad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f([\lambda_{\nu,ij}]) \times \cdot\, \boldsymbol{u}_\nu \boldsymbol{u}_\nu^* \ .$$

Abban a speciális — de a statikailag határozatlan rácsos tartók matematikai vizsgálatánál előforduló — esetben, amidőn az $\mathbf{A}$ hipermatrix valamennyi blokkja nem csupán ciklikus, hanem egyidejűleg szimmetrikus is, tehát

$$a_{\nu,jk} = a_{m-\nu,jk} \ ,$$

akkor az (1.2) egyenletből azt nyerjük, hogy

$$\lambda_{\nu,jk} = a_{0,jk} + a_{1,jk}(\omega_\nu + \omega_\nu^{m-1}) + a_{2,jk}(\omega_\nu^2 + \omega_\nu^{m-2}) + \ldots + \tag{1.6}$$

$$+ \begin{cases} a_{\frac{m-1}{2},jk}\left(\omega_\nu^{\frac{m-1}{2}} + \omega_\nu^{\frac{m+1}{2}}\right), & \text{ha } m \text{ páratlan szám;} \\ a_{\frac{m}{2},jk}\,\omega_\nu^{\frac{m}{2}}, & \text{ha } m \text{ páros szám;} \end{cases}$$

és mert

$$\omega_\nu^l + \omega_\nu^{m-l} = e^{\frac{2\pi i\nu}{m}l} + e^{\frac{2\pi i\nu}{m}(m-l)} = e^{\frac{2\pi i\nu}{m}l} + e^{-\frac{2\pi i\nu}{m}l} = 2\cos\frac{2\pi\nu l}{m},$$

tehát

$$\lambda_{\nu,jk} = a_{0,jk} + 2a_{1,jk}\cos\frac{2\pi\nu}{m} + 2a_{2,jk}\cos 2\,\frac{2\pi\nu}{m} + \ldots + \tag{1.7}$$

$$+ \begin{cases} 2a_{\frac{m-1}{2},jk}\cos\frac{m-1}{2}\,\frac{2\pi\nu}{m}, & \text{ha } m \text{ páratlan szám;} \\ (-1)^\nu\, a_{\frac{m}{2},jk}, & \text{ha } m \text{ páros szám.} \end{cases}$$

Minthogy pedig — az (1.7) egyenletből nyilvánvaló módon — az $\mathbf{A}_{jk}$ sajátértékei között fennáll a

$$\lambda_{\nu,jk} = \lambda_{m-\nu,jk}$$

összefüggés, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}_{jk} = \frac{1}{m}\left[\lambda_{0,jk}\,\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{u}_0^* + \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \lambda_{\nu,jk}(\boldsymbol{u}_\nu\boldsymbol{u}_\nu^* + \boldsymbol{u}_{m-\nu}\boldsymbol{u}_{m-\nu}^*)\right], \tag{1.8}$$

ha m páratlan szám, és

$$\mathbf{A}_{jk} = \frac{1}{m}\left[\lambda_{0,jk}\,\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{u}_0^* + \sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1} \lambda_{\nu,jk}(\boldsymbol{u}_\nu\boldsymbol{u}_\nu^* + \boldsymbol{u}_{m-\nu}\boldsymbol{u}_{m-\nu}^*) + \right. \tag{1.9}$$

$$\left. + \lambda_{\frac{m}{2},jk}\,\boldsymbol{u}_{\frac{m}{2}}\boldsymbol{u}_{\frac{m}{2}}^*\right],$$

ha m páros szám. Minthogy továbbá

$$\overline{\omega}_{m-\nu} = \omega_\nu$$

és

$$\omega_\nu^l + \overline{\omega}_\nu^l = \cos\frac{2\pi\nu}{m}l + i\sin\frac{2\pi\nu}{m}l + \cos\frac{2\pi\nu}{m}l - i\sin\frac{2\pi\nu}{m}l = 2\cos\frac{2\pi\nu}{m}l\,,$$

tehát ha bevezetjük a

$$(1.10)\qquad \mathbf{P}_0 = u_0 u_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, \ldots, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.11)\qquad 2\,\mathbf{P}_\nu = u_\nu u_\nu^* + u_{m-\nu}\, u_{m-\nu}^*$$

$$(1.12)\qquad \mathbf{P}_{\frac{m}{2}} = u_{\frac{m}{2}}\, u_{\frac{m}{2}}^*$$

rövid jelöléseket, általában írhatjuk, hogy

$$2\,\mathbf{P}_\nu = \mathbf{C}\left(2,\ 2\cos\frac{2\pi\nu}{m},\ \ldots,\ 2\cos(m-1)\frac{2\pi\nu}{m}\right) =$$

$$= 2\,\mathbf{C}\left(1,\ \cos\frac{2\pi\nu}{m},\ \ldots,\ \cos(m-1)\frac{2\pi\nu}{m}\right)$$

továbbá, ha bevezetjük az alábbi rövidítést:

$$(1.13)\qquad \mathbf{\Lambda}_\nu = [\lambda_{\nu,ij}]\ ; \qquad (\lambda_{\nu,jk} = \lambda_{\nu,kj})$$

akkor nyilvánvaló, hogy az **A** hipermatrix valamely analitikus függvénye a következő alakban írható:

$$(1.14)\qquad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m}\left[f(\mathbf{\Lambda}_0)\times\cdot\,\mathbf{P}_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1} f(\mathbf{\Lambda}_\nu)\times\cdot\,\mathbf{P}_\nu + f(\mathbf{\Lambda}_{\frac{m}{2}})\times\cdot\,\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}\right],$$

ha m páros szám, továbbá

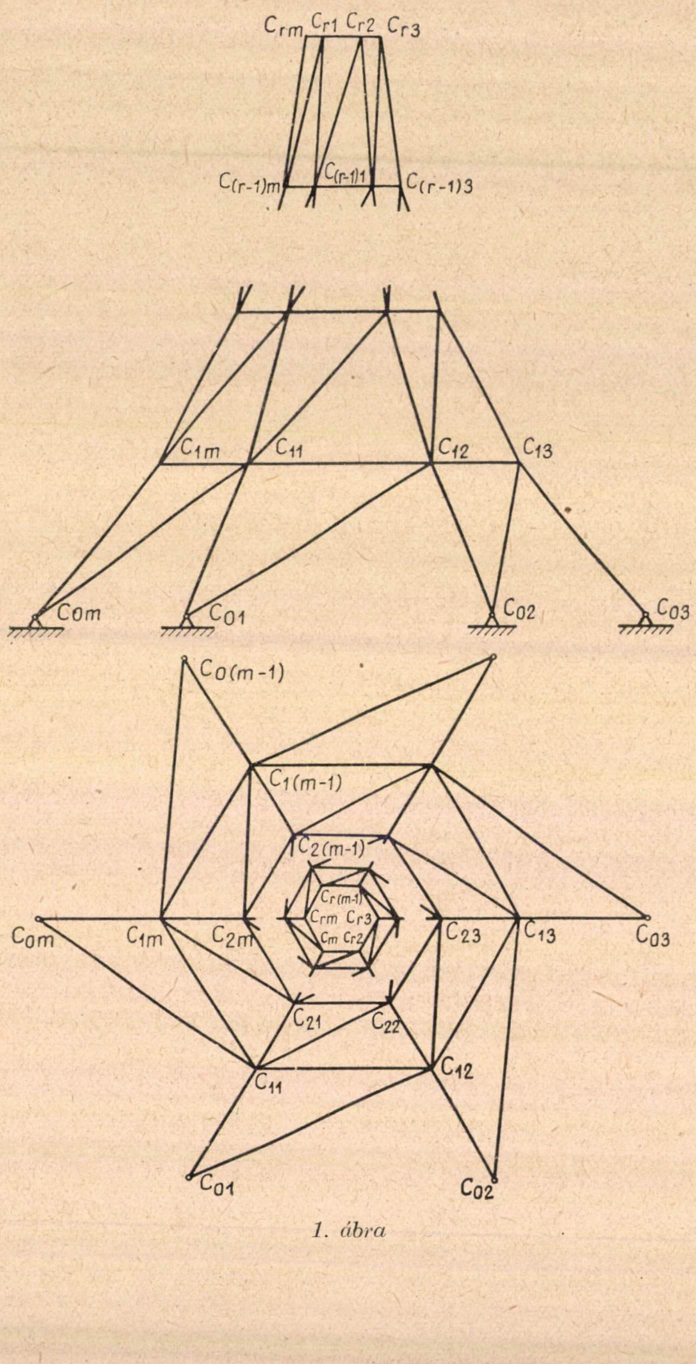
$$(1.15)\qquad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m}\left[f(\mathbf{\Lambda}_0)\times\cdot\,\mathbf{P}_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} f(\mathbf{\Lambda}_\nu)\times\cdot\,\mathbf{P}_\nu\right],$$

ha m páratlan szám. Az f (**A**) matrix-függvény ezen előállításában szereplő $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_\nu$ m-edrendű matrixok valamennyi eleme valós szám, továbbá az $\frac{1}{m}\mathbf{P}_0$ és $\frac{1}{m}\mathbf{P}_\nu$ matrixok projektorok (idempotens matrixok).

2. §. Statikailag határozott tartók rúderőinek számítása

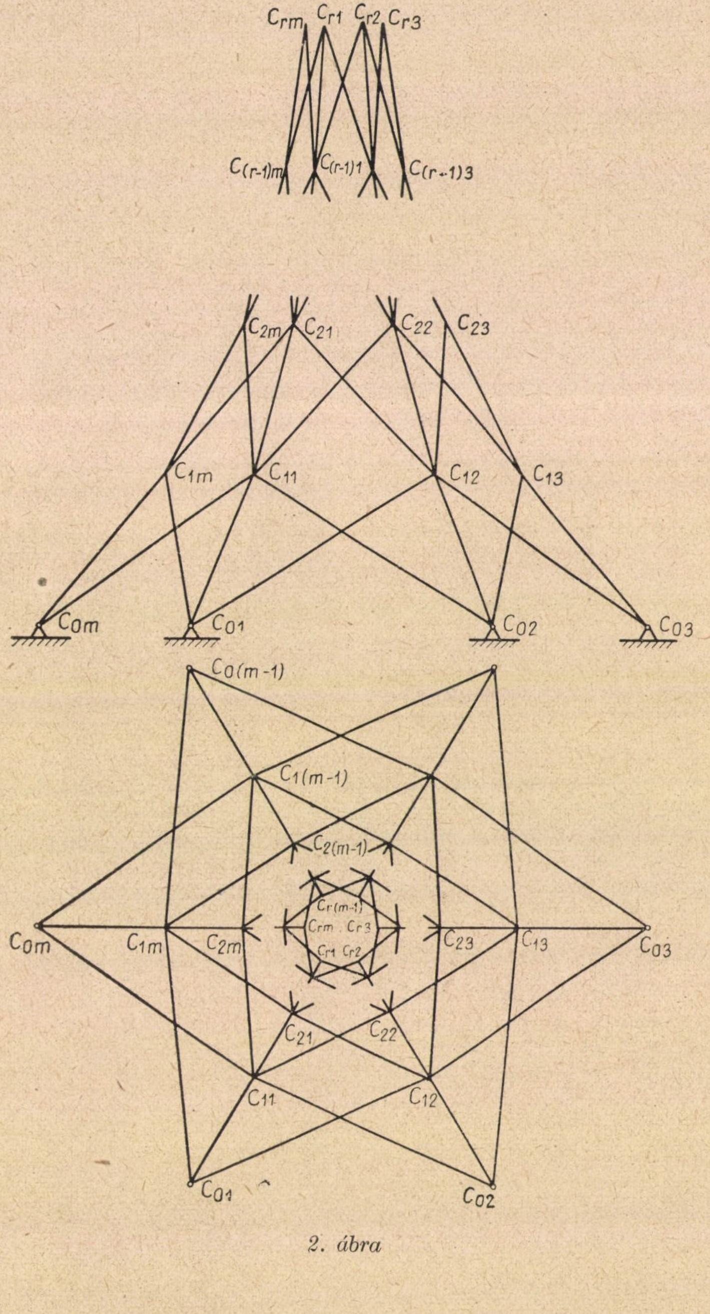
Az alábbiakban a következő két — statikailag határozott — tartótípus vizsgálatával fogunk foglalkozni:

a) A tartót r darab m oldalú gyűrű, m darab r oldalú meridiánpoligon és mr rácsrúd alkotja *(lásd az 1. ábrát)*.



1. *ábra*

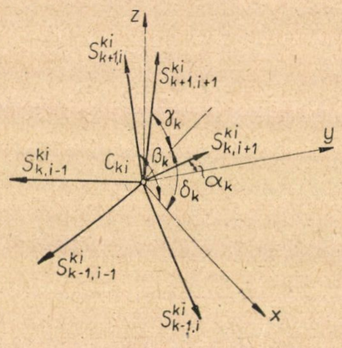
b) A tartó gyűrűrudakat nem tartalmaz, hanem m darab r oldalú meridiánpoligonból és $2mr$ darab rácsrúdból van felépítve *(lásd a 2. ábrát).*



2. ábra

a) eset

A 3. ábra figyelembevételével a C_{ki} csomópontban a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel:



3. ábra

$$
(2.1)\quad \begin{cases}
\begin{aligned}
& -S^{k,i}_{k,i-1}\sin\alpha_k - S^{k,i}_{k,i+1}\sin\alpha_k + S^{k,i}_{k+1,i+1}\cos\gamma_k\cos\delta_k + \\
& \quad + S^{k,i}_{k-1,i-1}\cos\gamma_{k-1}\cos\delta_{k-1} + S^{k,i}_{k+1,i}\cos\beta_k - S^{k,i}_{k-1,i}\cos\beta_{k-1} = -P^{k,i}_x \\
& -S^{k,i}_{k,i-1}\cos\alpha_k + S^{k,i}_{k,i+1}\cos\alpha_k + S^{k,i}_{k+1,i+1}\cos\gamma_k\sin\delta_k - \\
& \quad - S^{k,i}_{k-1,i-1}\cos\gamma_{k-1}\sin\delta_{k-1} = -P^{k,i}_y \\
& -S^{k,i}_{k+1,i+1}\sin\gamma_k - S^{k,i}_{k-1,i-1}\sin\gamma_{k-1} + S^{k,i}_{k+1,i}\sin\beta_k - \\
& \quad - S^{k,i}_{k-1,i}\sin\beta_{k-1} = -P^{k,i}_z
\end{aligned}
\end{cases}
$$

Könnyebb áttekinthetőség kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$
\begin{array}{lll}
a'_k = \sin\alpha_k & a''_k = \cos\alpha_k & \\
b'_k = \cos\gamma_k\cos\delta_k & b''_k = \cos\gamma_k\sin\delta_k & b'''_k = \sin\gamma_k \\
c'_k = \cos\beta_k & & c'''_k = \sin\beta_k\,.
\end{array}
$$

E jelölések felhasználásával a (2.1) egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$
(2.2)\quad \begin{cases}
\begin{aligned}
& -a'_k S^{k,i}_{k,i-1} - a'_k S^{k,i}_{k,i+1} + b'_k S^{k,i}_{k+1,i+1} + \\
& \quad + b'_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} + c'_k S^{k,i}_{k+1,i} - c'_{k-1} S^{k,i}_{k-i,1} = -P^{k,i}_x \\
& -a''_k S^{k,i}_{k,i-1} + a''_k S^{k,i}_{k,i+1} + b''_k S^{k,i}_{k+1,i+1} - \\
& \quad - b''_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} = -P^{k,i}_y \\
& b'''_k S^{k,i}_{k+1,i+1} - b'''_k S^{k,i}_{k-1,i-1} + c'''_k S^{k,i}_{k+1,i} - \\
& \quad - c'''_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i} = -P^{k,i}_z
\end{aligned}
\end{cases}
$$

A (2.1), illetve (2.2) összefüggésekben megadott egyenletrendszert valamennyi csomópontra felírva nyerjük azt a $3rm$ darab egyenletből álló, és $3rm$ ismeretlent tartalmazó) egyenletrendszert, amelyből a rúderők kiszámíthatók. Ezen egyenletrendszer előnyösen oldható meg a matrixszámítás felhasználásával, tekintettel arra, hogy a tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria következtében *az egyes egyenletek, illetve az egyes ismeretlenek sorrendjének megfelelő választása esetén* az egyenletrendszer együtthatómatrixa *ciklikus blokkokból álló hipermatrix.*

A bevezetett jelölésekkel a tartó rúderőnek kiszámítására szolgáló egyenletrendszer az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} \tag{2.3}$$

matrixegyenletbe foglalható össze, ahol az egyenletrendszer együtthatómatrixa $9r^2$ darab m-edrendű kvadratikus blokkból álló kvadratikus hipermatrix :[1]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{r-1} & \mathbf{D}_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{r-2} & \mathbf{D}_{r-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \mathbf{G}_2 & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} -a'_k(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Omega}) & b'_{k-1}\mathbf{E} & -c'_{k-1}\mathbf{E} \\ -a''_k(\mathbf{E}-\boldsymbol{\Omega}) & -b''_{k-1}\mathbf{E} & 0 \\ 0 & -b'''_{k-1}\mathbf{E} & -c'''_k\mathbf{E} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & b'_k\boldsymbol{\Omega} & c'_k\mathbf{E} \\ 0 & b''_k\boldsymbol{\Omega} & 0 \\ 0 & b'''_k\boldsymbol{\Omega} & c'''_k\mathbf{E} \end{bmatrix}$$

(ahol **E** az m-edrendű egység-matrixot és $\boldsymbol{\Omega}$ az m-edrendű primitív ciklikus matrixot jelenti), továbbá az ismeretlen rúderők, illetve az adott terhelés oszlopvektorai (transzponált alakban) :

$$\boldsymbol{s}^* = [\boldsymbol{s}_r^*, \boldsymbol{s}_{r-1}^*, \dots, \boldsymbol{s}_1^*] \; ; \qquad \boldsymbol{p}^* = [\boldsymbol{p}_r^*, \boldsymbol{p}_{r-1}^*, \dots, \boldsymbol{p}_1^*] \, ,$$

ahol

$$\boldsymbol{s}_k^* = \left[S_{k,m}^{k,1}, S_{k,1}^{k,2}, \dots, S_{k,m-1}^{k,m}, S_{k-1,m}^{k,1}, S_{k-1,1}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m-1}^{k,m}, S_{k-1,1}^{k,1}, S_{k-1,2}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m}^{k,m}\right]$$

$$\boldsymbol{p}_k^* = -\left[P_x^{k,1}, P_x^{k,2}, \dots, P_x^{k,m}, P_y^{k,1}, P_y^{k,2}, \dots, P_y^{k,m}, P_z^{k,1}, P_z^{k,2}, \dots, P_z^{k,m}\right]$$

---

[1] Annak érdekében, hogy az **A** matrix felírását nyomdatechnikai szempontból egyszerűbbé tegyük, az **A** felírásánál kétszeres particionálást alkalmazunk.

Az 1. §-ban foglaltak szerint meghatározandók az **A** matrix $\mathbf{A}_{11} = - a'_r (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega})$, $\mathbf{A}_{12} = b'_{r-1}\mathbf{E}$ stb. m-edrendű ciklikus blokkjainak λ_k^{11}, λ_k^{12} stb. sajátértékei. E sajátértékekből képezzük az **A** matrix $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_1, \ldots, \mathbf{\Lambda}_{m-1}$ „saját-érték-matrixait".

Minthogy **E** valamennyi sajátértéke $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 1$, továbbá $\mathbf{\Omega}$ sajátértékei a

$$\lambda_\nu = \omega_\nu = e^{\frac{2\pi i\nu}{m}} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m-1$$

úgynevezett m-edik egységgyökök, és így $(\mathbf{E} + \mathbf{\Omega})$ ν-edik sajátértéke: $\lambda_\nu = 1 + \omega_\nu$, illetve $(\mathbf{E} - \mathbf{\Omega})$ ν-edik sajátértéke: $\lambda_\nu = 1 - \omega_\nu$, tehát az **A** ν-edik sajátérték-matrixa [2])

$$\mathbf{\Lambda}_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_{r,\nu} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mathbf{\Gamma}_{r-1,\nu} & \mathbf{\Delta}_{r-1,\nu} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{r-2,\nu} & \mathbf{\Delta}_{r-2,\nu} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{\Gamma}_{1,\nu} & \mathbf{\Delta}_{1,\nu} \end{bmatrix}$$

ahol:

$$\mathbf{\Delta}_{k,\nu} = \begin{bmatrix} -a'_k(1+\omega_\nu) & b'_{k-1} & -c'_{k-1} \\ -a''_k(1-\omega_\nu) & -b''_{k-1} & 0 \\ 0 & -b'''_{k-1} & -c'''_{k-1} \end{bmatrix}$$

továbbá:

$$\mathbf{\Gamma}_{k,\nu} = \begin{bmatrix} 0 & b'_k\,\omega_\nu & c'_k \\ 0 & b''_k\,\omega_\nu & 0 \\ 0 & b'''_k\,\omega_\nu & c'''_k \end{bmatrix}$$

Tehát a (2.3) egyenlet megoldása:

(2.4) $$\mathbf{s} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p},$$

ahol — az (1.5) összefüggés alapján — az $\mathbf{A}^{-1}$ matrix a következő kanonikus alakban állítható elő:

(2.5) $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \times \cdot\, \mathbf{u}_\nu \mathbf{u}_\nu^* .$$

Abban a speciális esetben, ha a meridiánpoligonok párhuzamos egyenesek, azaz a gyűrűk egybevágó sokszögek, nyilván

[2]) A sajátértékmatrixok felírásának nyomdatechnikai egyszerűsítése végett alkalmazzuk az **A** felírásánál használtnak megfelelő kétszeres particionálást.

$$\begin{aligned} a'_r &= a'_{r-1} = \ldots = a'_1 = a' \\ a''_r &= a''_{r-1} = \ldots = a''_1 = a'' \\ c'_r &= c'_{r-1} = \ldots = c'_1 = 0 \\ c'''_r &= c'''_{r-1} = \ldots = c'''_1 = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b'_r &= b'_{r-1} = \ldots = b'_1 = b' \\ b''_r &= b''_{r-1} = \ldots = b''_1 = b'' \\ b'''_r &= b'''_{r-1} = \ldots = b'''_r = b''' \end{aligned}$$

tehát ebben a speciális esetben :

$$\mathbf{\Delta}_{r,\nu} = \mathbf{\Delta}_{r-1,\nu} = \ldots = \mathbf{\Delta}_{1,\nu} = \mathbf{\Delta}_{\nu}$$

és

$$\mathbf{\Gamma}_{r-1,\nu} = \mathbf{\Gamma}_{r-2,\nu} = \ldots = \mathbf{\Gamma}_{1,\nu} = \mathbf{\Gamma}_{\nu} \,.$$

Ismeretes (lásd : [8]), hogy

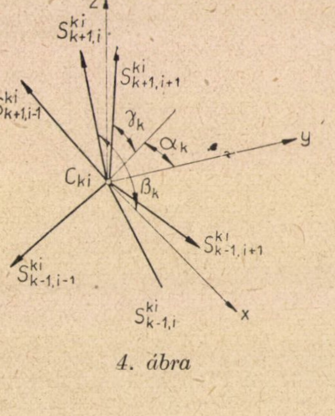
$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & 0 \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ \hline -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{array}\right]$$

Ennek az összefüggésnek a felhasználásával a $\mathbf{A}_\nu$ matrix reciprokmatrixára a következő képlet vezethető le :

$$\mathbf{A}_\nu^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_\nu^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ -\mathbf{\Delta}_\nu^{-1}\mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Delta}_\nu^{-1} & \mathbf{\Delta}_\nu^{-1} & \ldots & 0 \\ \mathbf{\Delta}_\nu^{-1}(\mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Delta}_\nu^{-1})^2 & -\mathbf{\Delta}_\nu^{-1}\mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Delta}_\nu^{-1} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{r+1}\mathbf{\Delta}_\nu^{-1}(\mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Delta}_\nu^{-1})^{r-1} & (-1)^r\mathbf{\Delta}_\nu^{-1}(\mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Delta}_\nu)^{r-2} & \ldots & \mathbf{\Delta}_\nu^{-1} \end{bmatrix}$$

b) eset

A 4. ábra figyelembevételével a C_{ki} csomópontban a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel :



4. ábra

$$(2.6)\begin{cases} -S^{k,i}_{k+1,i-i}\cos\gamma_k\sin\alpha_k - S^{k,i}_{k+1,i+1}\cos\gamma_k\sin\alpha_k + \\ \quad + S^{k,i}_{k+1,i}\cos\beta_k - S^{k,i}_{k-1,i-1}\cos\gamma_{k-1}\sin\alpha_{k-1} - \\ \quad - S^{k,i}_{k-1,i-1}\cos\gamma_{k-1}\sin\alpha_{k-1} - S^{k,i}_{k-1,i}\cos\beta_{k-1} & = -P^{k,i}_x \\ -S^{k,i}_{k+1,i-1}\cos\gamma_k\cos\alpha_k + S^{k,i}_{k+1,i+1}\cos\gamma_k\cos\alpha_k - \\ \quad - S^{k,i}_{k-1,i-1}\cos\gamma_{k-1}\cos\alpha_{k-1} + S^{k,i}_{k-1,i+1}\cos\gamma_{k-1}\cos\alpha_{k-1} & = -P^{k,i}_y \\ S^{k,i}_{k-1,i-1}\sin\gamma_k + S^{k,i}_{k+1,i+1}\sin\gamma_k + S^{k,i}_{k+1,i}\sin\beta_k - \\ \quad - S^{k,i}_{k-1,i-1}\sin\gamma_{k-1} - S^{k,i}_{k-1,i+1}\sin\gamma_{k-1} - S^{k,i}_{k-1,i}\sin\beta_{k-1} & = -P^{k,i}_z \end{cases}$$

Rövidebb írásmód végett itt a következő jelölések bevezetése mutatkozik célszerűnek:

$$a_k = \cos\gamma_k\sin\alpha_k \qquad c_k = \cos\gamma_k\cos\alpha_k$$

$$b_k = \cos\beta_k \qquad d_k = \sin\gamma_k$$

$$e_k = \sin\beta_k\ .$$

E jelölések felhasználásával a (2.6) egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$(2.7)\quad\begin{cases} -a_k S^{k,i}_{k+1,i-1} - a_k S^{k,i}_{k+1,i+1} + b_k S^{k,i}_{k+1,i} - \\ \quad - a_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} - a_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i+1} - b_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i} & = -P^{k,i}_x \\ -c_k S^{k,i}_{k+1,i-1} + c_k S^{k,i}_{k+1,i+1} - c_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} + c_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i+1} & = -P^{k,i}_y \\ d_k S^{k,i}_{k+1,i-1} + d_k S^{k,i}_{k+1,i+1} + e_k S^{k,i}_{k+1,i} - d_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} - \\ \quad - d_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i-1} - e_{k-1} S^{k,i}_{k-1,i} & = -P^{k,i}_z \end{cases}$$

A (2.6), illetve (2.7) egyenleteket valamennyi csomópontra felírva megkapjuk a tartó rúderőnek kiszámítására szolgáló és az $\mathbf{As} = \boldsymbol{p}$ matrixegyenletbe összefoglalható egyenletrendszert, amelynek együttható-matrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{r-1} & \mathbf{D}_{r-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{r-2} & \mathbf{D}_{r-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{G}_2 & \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} -a_k\mathbf{E} & -a_k\mathbf{E} & -b_k\mathbf{E} \\ -c_k\mathbf{E} & c_k\mathbf{E} & 0 \\ -d_k\mathbf{E} & -d_k\mathbf{E} & -e_k\mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_k & -a_k & -b_k \\ -c_k & c_k & 0 \\ -d_k & -d_k & -e_k \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{E}$$

és

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} -a_k\Omega & -a_k\Omega^{m-1} & b_k\mathbf{E} \\ c_k\Omega & -c_k\Omega^{m-1} & 0 \\ d_k\Omega & d_k\Omega^{m-1} & e_k\mathbf{E} \end{bmatrix}$$

(Itt is $\mathbf{E}$ az m-edrendű egységmatrix, és Ω az m-edrendű primitív ciklikus matrix.)

Ez esetben az ismeretlen rúderők, illetve az adott terhelés oszlop matrixai:

$$\boldsymbol{s}^* = [\boldsymbol{s}_r^*, \boldsymbol{s}_{r-1}^*, \ldots, \boldsymbol{s}_1^*] \;; \qquad \boldsymbol{p}^* = [\boldsymbol{p}_r^*, \boldsymbol{p}_{r-1}^*, \ldots, \boldsymbol{p}_1^*] \,,$$

ahol

$$\boldsymbol{s}_k^* = [S_{k-1,m}^{k,1}, S_{k-1,1}^{k,2}, \ldots, S_{k-1,m-1}^{k,m}, S_{k-1,2}^{k,1}, S_{k-1,3}^{k,2}, \ldots, S_{k-1,1}^{k,m}, S_{k-1,2}^{k,2}, \ldots, S_{k-1,m}^{k,m}]$$

és

$$\boldsymbol{p}_k^* = -[P_x^{k,1}, P_x^{k,2}, \ldots, P_x^{k,m}, P_y^{k,1}, P_y^{k,2}, \ldots, P_y^{k,m}, P_z^{k,1}, P_z^{k,2}, \ldots, P_z^{k,m}] \,.$$

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p}$ matrixegyenlet megoldása ez esetben is elvégezhető az előző *a)* pontban ismertetett módon, azaz az $\mathbf{A}^{-1}$ reciprokmatrix kanonikus előállításával. Ez esetben azonban a legcélszerűbb az alább ismertetett módszer alkalmazása. E módszer alkalmazásának előnyös volta abból következik, hogy az ($r\times r$ számú, egyenként $3m$-edrendű blokkból álló) $\mathbf{A}$ hipermatrix (amely csak a fődiagonálisában és a fődiagonális alatt tartalmaz nullától különböző blokkokat) főátlójában álló valamennyi blokk egy közönséges harmadrendű matrixnak és az m-edrendű egységmatrixnak a direkt szorzataként állítható elő.

Írjuk át az $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p}$ egyenletet a következő alakba:

$$(2.8)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{D}_{r-1}\boldsymbol{s}_r & = \boldsymbol{p}_r \\ \mathbf{G}_{r-1}\boldsymbol{s}_r + \mathbf{D}_{r-2}\boldsymbol{s}_{r-1} & = \boldsymbol{p}_{r-1} \\ \qquad \mathbf{G}_{r-2}\boldsymbol{s}_{r-1} + \mathbf{D}_{r-3}\boldsymbol{s}_{r-2} & = \boldsymbol{p}_{r-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \qquad\qquad \mathbf{G}_2\boldsymbol{s}_3 + \mathbf{D}_1\boldsymbol{s}_2 & = \boldsymbol{p}_2 \\ \qquad\qquad\qquad \mathbf{G}_1\boldsymbol{s}_2 + \mathbf{D}_0\boldsymbol{s}_1 & = \boldsymbol{p}_1 \end{array} \right.$$

A (2.8) egyenletrendszer megoldása nyilván:

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{D}_{r-1}^{-1}\mathbf{p}_r\ ; \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{D}_{k-1}^{-1}[\mathbf{p}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{s}_{k+1}]\ , \qquad k = r-1, \ldots, 2, 1 \tag{2.9}$$

Bevezetve a

$$\mathbf{p}'_r = \mathbf{p}_r\ ; \quad \mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{s}_{k+1}\ , \quad k = 1, 2, \ldots, r-1$$

és a

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} -a_k & -a_k & -b_k \\ -c_k & -c_k & 0 \\ -d_k & -d_k & -e_k \end{bmatrix}$$

jelöléseket, minthogy $\mathbf{D}_k = \Delta_k \times \cdot \mathbf{E}$, azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{s}_k = (\Delta_k^{-1} \times \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{p}'_k \qquad k = r, r-1, \ldots, 1$$

Tehát ez esetben a rúderők meghatározásához csupán a $\Delta_{r-1}, \Delta_{r-2}, \ldots, \Delta_1, \Delta_0$ *harmadrendű* közönséges matrixok invertálása szükséges. Abban a speciális esetben pedig, amikor a meridiánpoligonok párhuzamos egyenesek:

$$\Delta_{r-1} = \Delta_{r-2} = \ldots = \Delta_1 = \Delta_0 = \Delta$$

és

$$\mathbf{G}_{r-2} = \mathbf{G}_{r-3} = \ldots = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}$$

a (2.9) képlet a következő alakot nyeri:

$$\mathbf{s}_k = (\Delta^{-1} \times \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{p}'_k \qquad k = r, r-1, \ldots, 1\ .$$

E speciális esetben tehát egyetlen harmadrendű közönséges matrix invertálása szükséges.

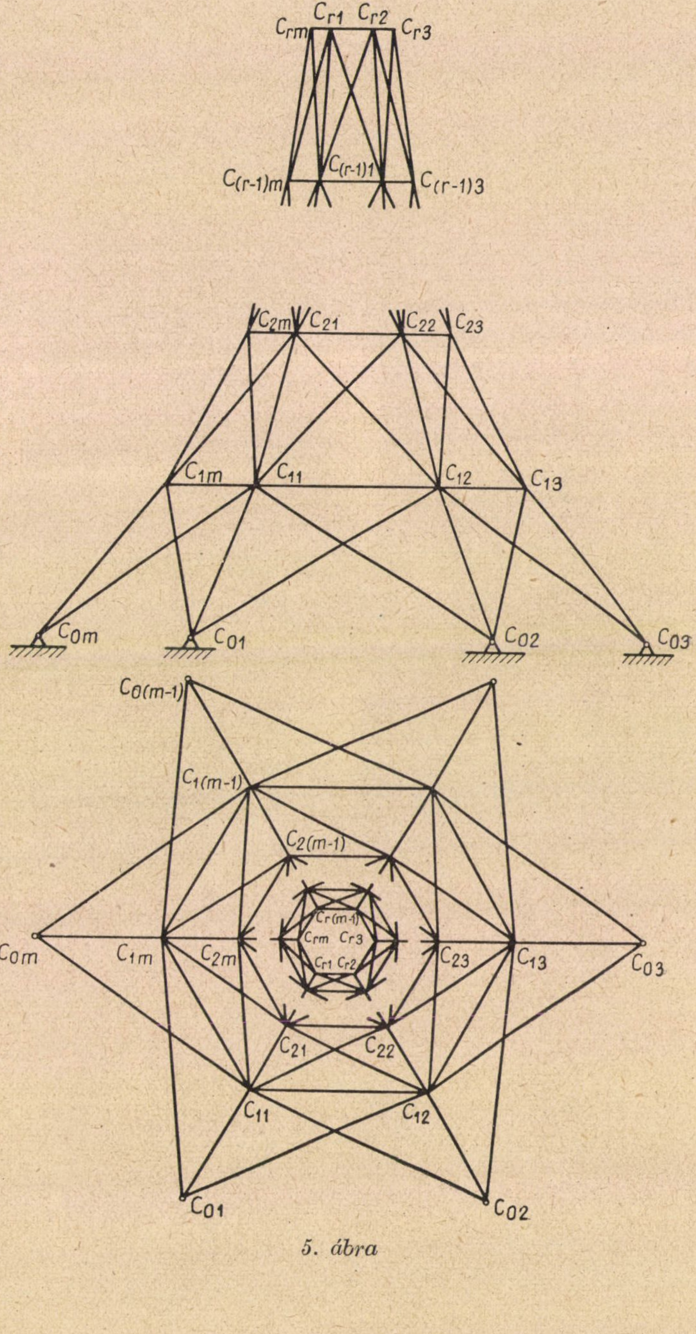
3. §. Statikailag határozatlan tartók rúderőinek számítása

Ebben a §-ban annak a — statikailag határozatlan — tartónak vizsgálatával foglalkozunk, amely r darab m oldalú gyűrűt, m darab r oldalú meridiánpoligont és $2mr$ darab rácsrudat tartalmaz *(lásd az 5. ábrát)*.

Mint ismeretes (lásd: [1], 458. oldal), a statikailag határozatlan tartó rúderőinek kiszámítása egyrészt a statikai határozatlanságot okozó rudak rúderőinek meghatározását, másrészt ezek felhasználásával az úgynevezett „törzstartó" rúderőinek kiszámítását jelenti. A statikai határozatlanságot okozó rudak rúderőinek meghatározására az

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1s}X_s &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2s}X_s &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}X_1 + a_{s2}X_2 + \ldots + a_{ss}X_s &= b_s \end{aligned} \tag{3.1}$$

egyenletrendszer szolgál (lásd: [1], 517. oldal), ahol a_{jk} a törzstartó geometriai és szilárdsági adataiból, b_j pedig a törzstartó geometriai, szilárdsági és terhelési adataiból meghatározható állandók; X_k a k-adik (statikai határozatlan-



5. ábra

ságot okozó) rúdban ébredő ismeretlen rúderő. A Maxwell-féle úgynevezett felcserélhetőségi tételből következik, hogy

$$a_{jk} = a_{kj} \; . \tag{3.2}$$

A jelen paragrafusban vizsgált tartó törzstartóját úgy nyerjük, hogy a statikailag határozatlan tartó valamennyi gyűrűjét (azaz összesen rm darab rudat) elhagyjuk ; tehát törzstartóként a 2. §. **b)** pontjában tárgyalt statikailag határozott tartót vesszük fel. Következésképpen a (3.1) egyenletrendszer a vizsgálandó esetben $s = rm$ egyenletből áll, és ugyanannyi ismeretlent tartalmaz.

Annak érdekében, hogy a tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria a statikailag határozatlan tartó egyenletrendszerének, illetve az egyenletrendszer együtthatómatrixának felírásában szembetűnő legyen, célszerű a következő jelölések bevezetése :

$X_{\mu,\nu}$ jelenti a $C_{\mu,\nu}$ és $C_{\mu,\nu+1}$ csomópontok közti gyűrűrúdban ébredő rúderőt ;

$a^{\varkappa;\varrho}_{\mu,\nu}$ jelenti a $C_{\mu,\nu}$, és $C_{\mu,\nu+1}$ csomópontok távolságának azon megváltozását, amelyet a $C_{\varkappa,\varrho}$ és $C_{\varkappa,\varrho+1}$ csomópontok közül elhagyott gyűrűrúd helyén ható „egységerő" idéz elő. (Nyilvánvaló, hogy $a^{\varkappa;\varrho}_{\mu,\nu} = a^{\mu;\nu}_{\varkappa,\varrho}$.)

$b_{\mu,\nu}$ jelenti a $C_{\mu,\nu}$ és $C_{\mu,\nu+1}$ csomópontok távolságának a külső terhelés hatására bekövetkező megváltozását.

A fenti jelölések alkalmazásával a (3.1) egyenletrendszer a

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.3}$$

matrixegyenletbe foglalható össze, ahol $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ és $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$, továbbá

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{C}(a^{i,1}_{j,1}\, ,\; a^{i,1}_{j,2},\; a^{i,1}_{j,3}, \ldots, a^{i,1}_{j,3}\, ,\; a^{i,1}_{j,2}) \; .$$

Ugyanis a Maxwell-féle felcserélhetőségi tételből és a tartó felépítésének ciklikus szimmetriájából következik, hogy

$$a^{i,k}_{j,h} = a^{i,1}_{j,h-k+1} \quad \text{és} \quad a^{i,1}_{j,h} = a^{i,1}_{j,m-h+2} \; .$$

Továbbá :

$$\boldsymbol{x}^* = [\boldsymbol{x}_1^*,\, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_r^*] \; ; \quad \boldsymbol{b}^* = [\boldsymbol{b}_1^*,\, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_r^*] \; ,$$

ahol

$$\boldsymbol{x}_k^* = [X_{k,1}\, ,\; X_{k,2}\, , \ldots, X_{k,m}] \; ; \quad \boldsymbol{b}_k^* = [b_{k,1}\, ,\; b_{k,2}\, , \ldots, b_{k,m}] \; .$$

A (3.3) matrixegyenlet megoldása nyilván :

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.4}$$

ahol az (1.14) és (1.15) összefüggések szerint :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m}\left[\mathbf{\Lambda}_0^{-1} \times \cdot\, \mathbf{P}_0 + \sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1} \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \times \cdot\, \mathbf{P}_\nu + \mathbf{\Lambda}_{\frac{m}{2}}^{-1} \times \cdot\, \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}\right], \tag{3.5}$$

ha m páros szám, illetve

$$(3.6) \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{\Lambda}_0^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_\nu\right),$$

ha m páratlan szám.

A sajátértékek és a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{\frac{m}{2}-1}$ $\left(\text{illetve } \mathbf{P}_{\frac{m-1}{2}}\right)$ projektorok az (1.7), illetve (1.10), (1.11) és (1.12) képletekből nyerhetők. (Ez esetben: $a_{\nu,jk} = a_{k\nu,+1}^{j,1}$.)

(Beérkezett: 1956. VII. 2.)

IRODALOM

[1] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Band IV., Teilband 4.). Teubner, Leipzig, 1907–1914.

[2] H. Reissner: „Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie.” *Archiv der Mathematik und Physik* (3) **13** (1908) 317–326.

[3] L. Mann: „Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk.” *Der Eisenbau* **2** (1911) 18—29.

[4] W. Kaufmann: „Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen.” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **1** (1921) 345–364.

[5] Egerváry J.: „Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417–458.

[6] E. Egerváry: „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1954) 211–222.

[7] Egerváry J.: „Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 31–47.

[8] A. C. Aitken: *Determinants and matrices* (5. edition). Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1948 (p. 139).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ОПОР С ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРМАТРИЦ

Е. BÉRES, V. LOVASS-NAGY и J. SZABÓ

Резюме

Известно, что системы линейных алгебраических уравнений, служащие для вычисления стержневых сил пространственных решетчатых опор, могут быть представлены единственным матричным уравнением. Если построение пространственной решетчатой опоры обладает циклической симметрией, матрица коэффициентов матричного уравнения может быть разбита на циклические блоки. Авторы — с помощью гиперматричного алгорифма J. Egerváry — разрабатывают метод спектрального разбиения матрицы коэффициентов. Применяя этот метод, гиперматрица, состоящая из циклических блоков, может быть представлена в виде суммы слагаемых, каждое из которых является прямым произведением матрицы, созданной из собственных значений блоков, и собственной диады, относящейся к соответствующему собственному значению. Этот метод дает единые и обозримые формулы для определения стержневых сил, как в случае статически определенных, так и в случае статически неопределенных решетчатых опор, так как сводит обращение матрицы коэффициентов к вычислению матрицы, обратной матрицам собственных значений (порядок которых ниже чем порядок данной матрицы коэффициентов).

ÜBER EINE ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN BEI DER BERECHNUNG VON RÄUMLICHEN FACHWERKEN MIT ZYKLISCHER SYMMETRIE

E. BÉRES, V. LOVASS-NAGY und J. SZABÓ

Zusammenfassung

Bekanntlich lassen sich die linearen algebraischen Gleichungen, welche zur Berechnung von Spannkräften räumlicher Fachwerke dienen, zu einer einzigen Matrizengleichung zusammenfassen. Hat das Fachwerk eine zyklische Struktur, dann lässt sich die Koeffizientenmatrix dieser Matrizengleichung in zyklische Blöcke zerlegen. Mit Hilfe der EGERVÁRY'schen Hypermatrizenalgorithmus entwickeln die Verfasser eine Methode zur Spektralzerlegung der Koeffizientenmatrix. Hierbei erscheint die aus zyklischen Blöcken bestehende Hypermatrix als eine Summe, deren Glieder direkte Produkte von Eigenwert-Matrizen und der entsprechenden Eigen-Dyaden sind. Diese Methode liefert einheitliche und übersichtliche Lösungsformeln zur Berechnung der Spannkräften statisch bestimmter wie statisch unbestimmter räumlicher Fachwerke, sie führt nämlich die Inversion der Koeffizientenmatrix zur Berechnung von Reciprokmatrizen der Eigenwert-Matrizen der Blöck zurück.