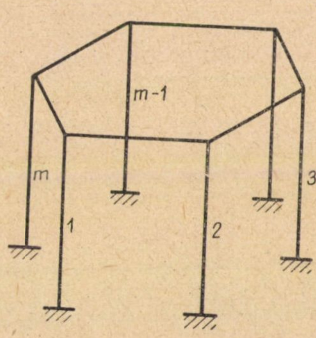
CENTRÁLSZIMMETRIÁVAL BÍRÓ TÉRBELI KERETEK SZÁMÍTÁSA HIPERMATRIXOK ALKALMAZÁSÁVAL

BÉRES ELEK[1)]

Bevezetés

Jelen dolgozat a centrálszimmetriával bíró térbeli keretek vizsgálatát mutatja be hipermatrixok alkalmazásával. A szerző előző dolgozatában foglalkozott a matrixelmélet néhány újabb eredményének a térbeli rácsos szerkezetek számítására vonatkozó felhasználásával [1]. E dolgozatban a ciklikus blokkokból álló hipermatrixok kanonikus alakjának egy újabb előállítási módjával sikerült a ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartó rúderőinek meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer megoldását egyszerű alakban előállítani: az ott bemutatott matematikai segédeszközök



1. ábra

felhasználásával az alábbiakban olyan centrálszimmetrikus keretek vizsgálatával foglalkozunk, melyeknek vízszintes gerendái minden tekintetben egyenlők, és m oldalú szabályos sokszöget alkotnak, függőleges oszlopai ugyancsak minden tekintetben egyenlők, a sokszög csúcsaiban mereven csatlakoznak a gerendákhoz és másik végükön ugyancsak mereven befogottak *(lásd az 1. ábrát)*.

Egy ilyen keret statikailag $6m$-szeresen határozatlan, tehát megoldása $6m$ ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Tekintettel arra, hogy ezen egyenletrendszer együtthatói is kiszámítandók,

---

[1)] Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Matematikai Tanszék.

első pillanatban alig kivitelezhetőnek látszik a feladat ilyen formában történő megoldása. A továbbiakban azonban meg fogjuk mutatni, hogy hipermatrixok alkalmazásával és a keret centrálszimmetrikus felépítéséből adódó lehetőségek felhasználásával a számítás nagymértékben — a mérnöki gyakorlatnak megfelelő módon — egyszerűsíthető.

Ami az együtthatók meghatározását illeti, nem kell $36m^2$, egymástól és nullától különböző együtthatót meghatározni (ugyanis az együtthatómatrixnak ennyi eleme van), hiszen ezek száma már annak figyelembevételével, hogy az együtthatókból alkotott matrix szimmetrikus a független együtthatók száma $6m(6m+1)/2$. Esetünkben azonban, midőn centrálszimmetrikus térbeli keretek megoldására szorítkozunk, a nullától és egymástól különböző abszolút értékű együtthatók száma legfeljebb 25. (A közölt példában összesen 17 db nullától és egymástól abszolút értékben különböző együttható fordul elő.)

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ matrixegyenlet megoldása $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, ahol numerikus számolás szempontjából az egyetlen problémát az $\mathbf{A}^{-1}$ matrix reciprokának a meghatározása jelenti. Az a módszer ugyanis, melyet általában a matrixok reciprokának kiszámításánál alkalmazunk $6m$-edrendű matrix esetén olyan hosszadalmas, hogy a gyakorlat céljaira alkalmatlan. Hipermatrixok alkalmazásával azonban csupán hatodrendű matrixok reciprokát kell a közismert módon meghatározni, tekintettel arra, hogy az ismeretlenek megfelelő sorrendje esetén az egyenletrendszer együttható-matrixa m-edrendű ciklikus blokkokból álló hipermatrixként írható fel. A ciklikus blokkokból álló hipermatrixok reciprokának meghatározása a korábbiakban bemutatott módszer szerint történhet.

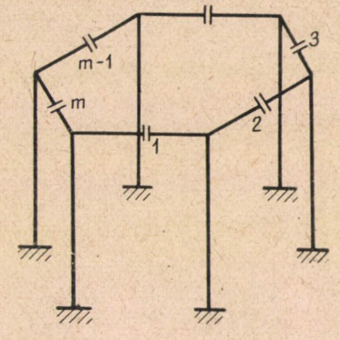
E módszer előnye még szembetűnőbbé válik, ha figyelembe vesszük, hogy ily módon nem csupán valamely állóterhelés által előidézett erők és nyomatékok számíthatók, hanem hasonló egyszerűséggel nyerhetők a keret valamely keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvények.

1. §. Centrálszimmetrikus térbeli keretekben keletkező erők és nyomatékok meghatározása

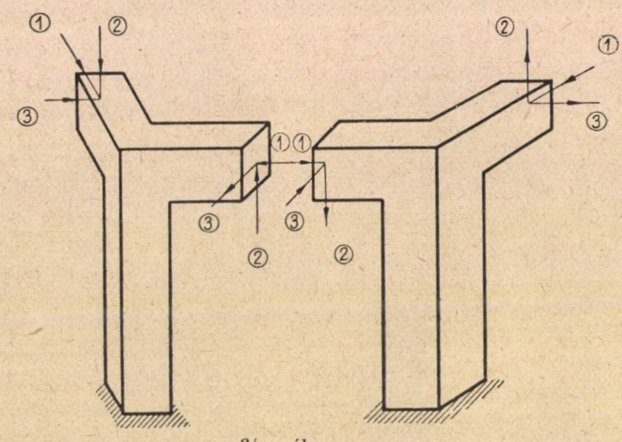
A centrálszimmetrikus keret törzstartóját számításunkra alkalmasan úgy vesszük fel, hogy a vízszintes gerendákat elvágjuk, úgyhogy 6 darab egybevágó befogott tartó keletkezik. Minden egyes átvágás térbeli keret esetén 6 db kapcsolóelem megszüntetését jelenti, azaz $6m$ erővel, illetve nyomatékkal helyettesíthető a megszüntetett kapcsolat. Így m oldalú szabályos sokszöget alkotó gerendák esetén az ismeretlen erők, illetve nyomatékok száma $6m$. Jelöljük ezeket X-ekkel, melyeket az áttekinthetőség kedvéért kettős indexekkel látunk el, oly módon, hogy az első index jelenti az átvágás helyét, a második index pedig azt mutatja meg, hogy az azon a helyen működő melyik erőről, illetve nyomatékról van szó. Az átvágási helyeket egy kiindulási helytől számított jobbra haladó folytonos számozással számozzuk *(lásd a 2. ábrát)*. Az erőket és a nyomatékokat pedig a következő számok jelölik :

1 : a keresztmetszetre ható normálerő ;
2 : függőleges nyíróerő ;
3 : vízszintes nyíróerő *(lásd a 3/a ábrát)* ;

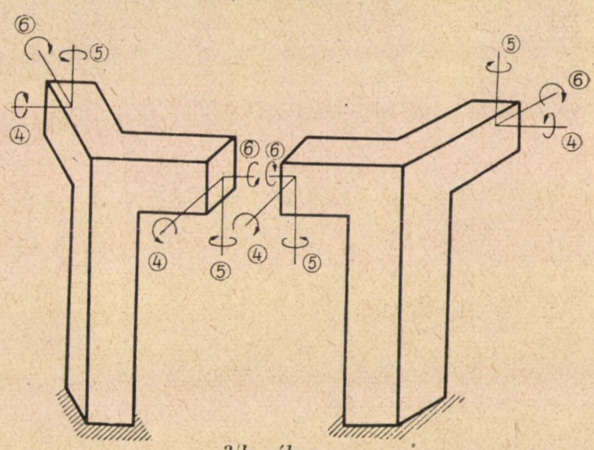
4 : hajlítónyomaték az 1—2 erők síkjában ;
5 : hajlítónyomaték az 1—3 erők síkjában ;
6 : csavarónyomaték *(lásd a 3/b ábrát)*.



2. ábra



3/a. ábra



3/b. ábra

Az egyenletrendszer együtthatóit négy számjegyből álló indexszel látjuk el. a_{hk}^{ij} jelenti a h-adik helyen működő X_{hk}-val ellentett értelmű egységerő (nyomaték) által az i-edik átvágási helyen okozott elmozdulásnak (elfordulásnak) az ott működő X_{ij}-vel ellentett értelmű egységerő (nyomaték) irányába eső összetevőjét.

A keret centrálszimmetriájából következik, hogy

$$a_{hk}^{ij} = a_{h-i+1,k}^{1j}\,, \quad \text{ha} \quad i \leqq h$$

$$a_{hk}^{ij} = a_{k-i+1+m,k}^{1j}\,, \quad \text{ha} \quad i > h\,,$$

és

$$|a_{2k}^{1j}| = |a_{mk}^{1j}|\,.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy az általunk felvett törzstartó esetében valamely átvágási helyen működő egységerő (nyomaték) csupán azon a helyen és a két szomszédos átvágási helyen okozhat elmozdulást, illetve elfordulást, azaz

$$a_{hk}^{ij} = 0\,, \quad \text{ha} \quad |h-i| > 1\,.$$

Figyelembe véve még, hogy $a_{1k}^{1j} = a_{1j}^{1k}$ és $a_{2k}^{1j} = a_{2j}^{1k}$, és hogy $1 \leqq j \leqq 6$ és $1 \leqq k \leqq 6$, végül azt nyerjük, hogy a nullától és egymástól abszolút értékben különböző együtthatók száma nem lehet nagyobb, mint 42. Ezen 42 együttható vizsgálata során azonban még ezek egy részéről is kimutatható, hogy minden esetben nullával egyenlők. Így nyerjük végül, hogy bármely konkrét példában csupán 25 együttható kiszámítása szükséges, függetlenül attól, hogy a centrálszimmetrikus keret vízszintes gerendái hány oldalú szabályos sokszöget alkotnak. A speciális esetekben néhány még ezek közül is 0 értékűvé válik.

Az egyenletrendszer jobboldalát képező állandók pedig: b_{ik} jelenti az i-edik átvágással keletkező lapok külső terhelés hatására bekövetkező elmozdulásának (elfordulásának) az X_{ik} erő (nyomaték) irányába eső összetevőjét.

Az ismeretlen erőket és nyomatékokat szolgáltató matrixegyenlet

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,$$

melynek megoldása $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Az egyenletben szereplő matrixok a következők:

Az egyenletrendszer együttható-matrixa m-edrendű ciklikus blokkokból álló hipermatrix: $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$, $1 \leqq i \leqq 6$, $1 \leqq j \leqq 6$, és

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= \mathbf{C}(a_{11}^{11}, a_{21}^{11}, 0, \ldots, 0, a_{21}^{11}) \\
\mathbf{A}_{12} = -\mathbf{A}_{21} &= \mathbf{C}(0, a_{22}^{11}, 0, \ldots, 0, -a_{22}^{11}) \\
\mathbf{A}_{13} = -\mathbf{A}_{31} &= \mathbf{C}(0, a_{23}^{11}, 0, \ldots, 0, -a_{23}^{11}) \\
\mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{41} &= \mathbf{C}(a_{14}^{11}, a_{24}^{11}, 0, \ldots, 0, a_{24}^{11}) \\
\mathbf{A}_{15} = \mathbf{A}_{51} &= 0 \\
\mathbf{A}_{16} = -\mathbf{A}_{61} &= \mathbf{C}(0, a_{26}^{11}, 0, \ldots, 0, -a_{26}^{11}) \\
\mathbf{A}_{22} &= \mathbf{C}(a_{12}^{12}, a_{22}^{12}, 0, \ldots, 0, a_{22}^{12})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{23} &= \mathbf{A}_{32} = \mathbf{C}(0,\ a^{12}_{23},\ 0,\dots,0,\ a^{12}_{23})\\
\mathbf{A}_{24} &= \mathbf{A}_{42} = \mathbf{C}(0,\ a^{12}_{24},\ 0,\dots,0,\ a^{12}_{24})\\
\mathbf{A}_{25} &= \mathbf{A}_{52} = 0\\
\mathbf{A}_{26} &= \mathbf{A}_{62} = \mathbf{C}(0,\ a^{12}_{26},\ 0,\dots,0,\ a^{12}_{26})\\
\mathbf{A}_{33} & \phantom{= -\mathbf{A}_{00}} = \mathbf{C}(a^{13}_{13},\ a^{13}_{23},\ 0,\dots,0,\ a^{13}_{23})\\
\mathbf{A}_{34} &= -\mathbf{A}_{43} = \mathbf{C}(0,\ a^{13}_{24},\ 0,\dots,0,\ -a^{13}_{24})\\
\mathbf{A}_{35} &= -\mathbf{A}_{53} = \mathbf{C}(0,\ a^{13}_{25},\ 0,\dots,0,\ -a^{13}_{25})\\
\mathbf{A}_{36} &= \mathbf{A}_{63} = \mathbf{C}(a^{13}_{16},\ a^{13}_{26},\ 0,\dots,0,\ a^{13}_{26})\\
\mathbf{A}_{44} & \phantom{= -\mathbf{A}_{00}} = \mathbf{C}(a^{14}_{14},\ a^{14}_{24},\ 0,\dots,0,\ a^{14}_{24})\\
\mathbf{A}_{45} &= \mathbf{A}_{54} = 0\\
\mathbf{A}_{46} &= -\mathbf{A}_{64} = \mathbf{C}(0,\ a^{14}_{26},\ 0,\dots,0,\ -a^{14}_{26})\\
\mathbf{A}_{55} & \phantom{= -\mathbf{A}_{00}} = \mathbf{C}(a^{15}_{15},\ a^{15}_{25},\ 0,\dots,0,\ a^{15}_{25})\\
\mathbf{A}_{56} &= \mathbf{A}_{65} = 0\\
\mathbf{A}_{66} & \phantom{= -\mathbf{A}_{00}} = \mathbf{C}(a^{16}_{16},\ a^{16}_{26},\ 0,\dots,0,\ a^{16}_{26})
\end{aligned}
$$

valamennyien m-edrendű ciklikus matrixok.

Az ismeretlen erőkből és nyomatékokból alkotott oszlopvektor (transzponált alakban):

$$\boldsymbol{x}^* = [\boldsymbol{x}_1^*,\ \boldsymbol{x}_2^*,\ \boldsymbol{x}_3^*,\ \boldsymbol{x}_4^*,\ \boldsymbol{x}_5^*,\ \boldsymbol{x}_6^*]$$

ahol

$$\boldsymbol{x}_k^* = [X_{1k},\ X_{2k},\dots,X_{mk}] \qquad k = 1, 2, \dots, 6\,.$$

Az egyenletrendszer állandóiból alkotott oszlopmatrix pedig (szintén transzponált alakban):

$$\boldsymbol{b}^* = [\boldsymbol{b}_1^*,\ \boldsymbol{b}_2^*,\ \boldsymbol{b}_3^*,\ \boldsymbol{b}_4^*,\ \boldsymbol{b}_5^*,\ \boldsymbol{b}_6^*]$$

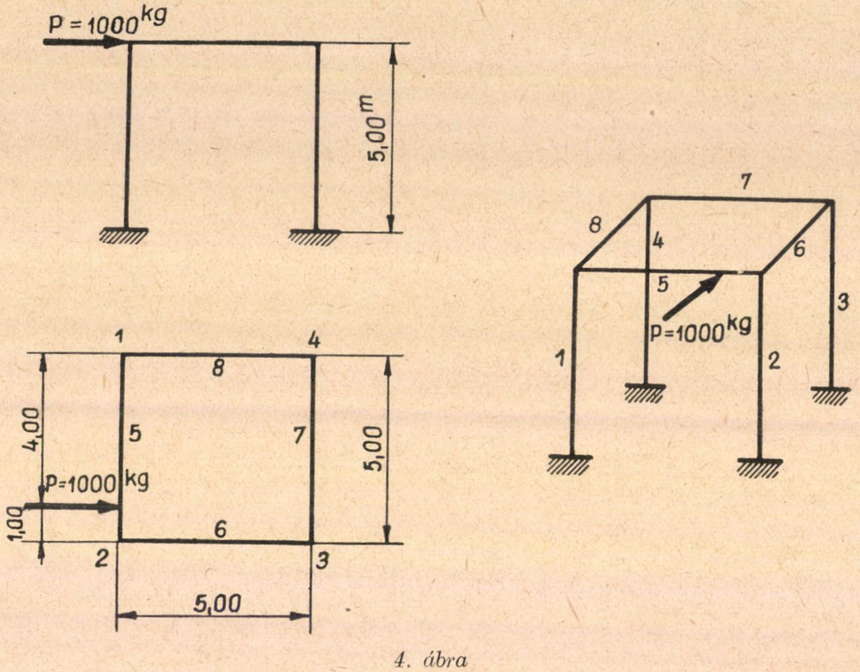
ahol

$$\boldsymbol{b}_k^* = [b_{1k},\ b_{2k},\dots,b_{mk}] \qquad k = 1, 2, \dots, 6\,.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ egyenlet együtthatómatrixa a terheléstől független, csupán a tartó anyagától és geometriai méreteitől függ. A terhelés csupán a jobboldalon szereplő $\boldsymbol{b}$ oszlopmatrixra van hatással. Ezt az oszlopmatrixot azonban akkor is könnyen fel tudjuk írni, ha nem egy állóterhelésről van szó, hanem egy mozgó egységnyi erő hatásáról (természetesen ebben az esetben úgy, mint a mozgó egységnyi erő helyzetének a függvényét). Így az $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ egyenletből egyszerűen nyerhetjük az átvágási helyeken keletkező erőket és nyomatékokat mint a terhelő egységnyi erő helyzetének a függvényét, azaz az ezekre a keresztmetszetekre vonatkozó hatásfüggvényeket. Ezeket az egyes szakaszokra értelmezett függvényeket megfelelően egymáshoz fűzve és ábrázolva nyerjük a keret egyik keresztmetszetéhez tartozó hatásábráját. Ezen keresztmetszet természetesen megegyezik a keret azon keresztmetszeteinek egyikével, melyek segítségével a keretet statikailag határozottá tettük. Ezek segítségével azonban más keresztmetszetre vonatkozó hatásfüggvényt is meg tudunk határozni.

2. §. Példák

1° Meghatározandók a *4. ábrán* feltüntetett keretben fellépő nyomatékok és erők. Az ábrázolt vasbetonkeret négy függőleges — alul teljesen befogott — oszlopból és négy vízszintes — négyzetet alkotó — gerendából áll. Mind a gerendák, mind az oszlopok hossza 5 m és keresztmetszetük is egyaránt 50—50 cm. A keretre egyetlen vízszintes erő hat az ábrán feltüntetett módon, melynek nagysága $P = 1000$ kg.



4. ábra

Jelen példában az oszlopok és gerendák keresztmetszete ugyanakkora négyzet, így ezek inercianyomatéka mindkét tengelyre egyaránt $I = 520833 \text{cm}^4$, csavarási inercianyomatéka $I_{cs} = 881250 \text{ cm}^4$. A nyírási rugalmassági modulus $G = 0{,}428\, E$ kg/cm^2, ahol E a rugalmassági modulus.

A továbbiakban a matrixok elemeinek számítását mellőzve azoknak kiszámított értékét közöljük, tekintettel arra, hogy azok meghatározása a statika elemeiből közismert. (Lásd: [2], II. kötet 40—46. oldalak.) Megjegyezzük azonban, hogy a számítások egyszerűbbé tétele végett mind az **A**, mind a ***b*** matrixokat megszoroztuk $EI/10$-zel. A továbbiakban már ezeket az értékeket közöljük. Az összes közölt adatok 4 tizedesig pontosak.

Jelen példában az **A** együttható-matrix a következő negyedrendű ciklikus blokkokból van felépítve:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{11} = && \mathbf{C}(8,\dot{3} &&, 0 &&, 0, && 0)\\
&\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} = 0\\
&\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{31} = && \mathbf{C}(0 &&, 4,1\dot{6} &&, 0, && -4,1\dot{6})\\
&\mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{41} = && \mathbf{C}(2,5 &&, 0 &&, 0, && 0)\\
&\mathbf{A}_{15} = \mathbf{A}_{51} = 0\\
&\mathbf{A}_{16} = \mathbf{A}_{61} = && \mathbf{C}(0 &&, 1,25 &&, 0, && -1,25)\\
&\mathbf{A}_{22} = && \mathbf{C}(7,2916 &&, 0 &&, 0, && 0)\\
&\mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{32} = && \mathbf{C}(0 &&, -3,125 &&, 0, && -3,125)\\
&\mathbf{A}_{24} = \mathbf{A}_{42} = 0\\
&\mathbf{A}_{25} = \mathbf{A}_{52} = 0\\
&\mathbf{A}_{26} = \mathbf{A}_{62} = && \mathbf{C}(0 &&, -1,25 &&, 0, && -1,25)\\
&\mathbf{A}_{33} = && \mathbf{C}(18,0156 &&, 4,3202 &&, 0, && 4,3203)\\
&\mathbf{A}_{34} = \mathbf{A}_{43} = && \mathbf{C}(0 &&, -1,25 &&, 0, && 1,25)\\
&\mathbf{A}_{35} = \mathbf{A}_{53} = && \mathbf{C}(0 &&, 1,7281 &&, 0, && -1,7281)\\
&\mathbf{A}_{36} = \mathbf{A}_{63} = && \mathbf{C}(2,5 &&, 0 &&, 0, && 0)\\
&\mathbf{A}_{44} = && \mathbf{C}(1,5 &&, 0 &&, 0, && 0)\\
&\mathbf{A}_{45} = \mathbf{A}_{54} = 0\\
&\mathbf{A}_{46} = \mathbf{A}_{64} = && \mathbf{C}(0 &&, 0,5 &&, 0, && -0,5)\\
&\mathbf{A}_{55} = && \mathbf{C}(1,8825 &&, -0,6912 &&, 0, && -0,6912)\\
&\mathbf{A}_{56} = \mathbf{A}_{65} = 0\\
&\mathbf{A}_{66} = && \mathbf{C}(1,6912 &&, 0 &&, 0, && 0)
\end{aligned}
$$

A sajátértékmatrixok:

$$
\mathbf{\Lambda}_0 = \begin{bmatrix}
8,3333 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0\\
0 & 7,2916 & -6,25 & 0 & 0 & -2,5\\
0 & -6,25 & 26,6562 & 0 & 0 & 2,5\\
2,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0\\
0 & -2,5 & 2,5 & 0 & 0 & 1,6912
\end{bmatrix}
$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & 8,3333i & 2,5 & 0 & 2,5i \\ 0 & 7,2916 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8,3333i & 0 & 18,0156 & -2,5i & 3,4562i & 2,5 \\ 2,5 & 0 & 2,5i & 1,5 & 0 & i \\ 0 & 0 & -3,4562i & 0 & 1,8825 & 0 \\ -2,5i & 0 & 2,5 & -i & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,2916 & 6,25 & 0 & 0 & 2,5 \\ 0 & 6,25 & 9,3750 & 0 & 0 & 2,5 \\ 2,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,265 & 0 \\ 0 & 2,5 & 2,5 & 0 & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & -8,3333i & 2,5 & 0 & -2,5i \\ 0 & 7,2916 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8,3333i & 0 & 18,0156 & 2,5i & -3,4562i & 2,5 \\ 2,5 & 0 & -2,5i & 1,5 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 3,4562i & 0 & 1,8825 & 0 \\ 2,5i & 0 & 2,5 & i & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

A további számítást nagymértékben megkönnyíti, hogy a sajátérték-matrixok hermitikusak (illetve valós szimmetrikusak), és hogy — mint látható —, $\Lambda_3 = \Lambda_1^*$.

A sajátértékmatrixok reciprokai :

$$\Lambda_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3019 & 0,0336 & 0 & 0 & 0,3966 \\ 0 & 0,0336 & 0,0473 & 0 & 0 & -0,0202 \\ -0,4 & 0 & 0 & 1,\dot{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0,3966 & -0,0202 & 0 & 0 & 1,2075 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}5863 & 0 & -0{,}2997i & -0{,}3223 & -0{,}5502 & -0{,}2331i \\ 0 & 0{,}1371 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2997i & 0 & 0{,}2997 & 0 & -0{,}5502i & 0 \\ -0{,}3223 & 0 & 0 & 1{,}4628 & 0 & -0{,}3885i \\ -0{,}5502 & 0 & 0{,}5502i & 0 & 1{,}5415 & 0 \\ 0{,}2331i & 0 & 0 & 0{,}3885i & 0 & 1{,}1656 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}24 & 0 & 0 & -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4086 & -0{,}1838 & 0 & 0 & -0{,}3324 \\ 0 & -0{,}1838 & 0{,}2587 & 0 & 0 & -0{,}1108 \\ -0{,}4 & 0 & 0 & 1{,}3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3062 & 0 \\ 0 & -0{,}3324 & -0{,}1108 & 0 & 0 & 1{,}2463 \end{bmatrix}$$

Végül pedig

$$\Lambda_3^{-1}=(\Lambda_1^{-1})^* .$$

Negyedrendű ciklikus matrixok esetén:

$$u_0u_0^*=\mathbf{C}(1,\ 1,\ 1,\ 1) \qquad u_2u^*=\mathbf{C}(1,\ -1,\ 1,\ -1)$$
$$u_1u_1^*=\mathbf{C}(1,\ -i,\ -1,\ i) \qquad u_3u_3^*=\mathbf{C}(1,\ i,\ -1,\ -i) .$$

Ezek ismeretében az

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}[\Lambda_0^{-1}\times\cdot\, u_0u_0^*+\Lambda_1^{-1}\times\cdot\, u_1u_1^*+\Lambda_2^{-1}\times\cdot\, u_2u_2^*+\Lambda_3^{-1}\times\cdot\, u_3u_3^*]$$

képlettel számolva nyerjük, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{B}_{ij}] \qquad i,j=1,2,\ldots,6 ,$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{11}&= && \mathbf{C}(\ 0{,}4131\ ,\ 0\ ,\ -0{,}1731\ ,\ 0) .\\
\mathbf{B}_{13}&=-\mathbf{B}_{31}&&=\mathbf{C}(\ 0\ ,\ -0{,}1498\ ,\ 0\ ,\ 0{,}1498)\\
\mathbf{B}_{14}&=\mathbf{B}_{41}&&=\mathbf{C}(-0{,}3612\ ,\ 0\ ,\ -0{,}0388\ ,\ 0)\\
\mathbf{B}_{15}&=\mathbf{B}_{51}&&=\mathbf{C}(-0{,}2751\ ,\ 0\ ,\ 0{,}2751\ ,\ 0)\\
\mathbf{B}_{16}&=-\mathbf{B}_{61}&&=\mathbf{C}(\ 0\ ,\ -0{,}1165\ ,\ 0\ ,\ 0{,}1165)\\
\mathbf{B}_{22}&= && \mathbf{C}(\ 0{,}2462\ ,\ -0{,}0267\ ,\ 0{,}1091\ ,\ -0{,}0267)\\
\mathbf{B}_{23}&=\mathbf{B}_{32}&&=\mathbf{C}(-0{,}0375\ ,\ 0{,}0543\ ,\ -0{,}0375\ ,\ 0{,}0543)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}_{26} = & \mathbf{B}_{62} = \mathbf{C}(& 0{,}0161\,, & 0{,}1822\,, & 0{,}0161\,, & 0{,}1822) \\
\mathbf{B}_{33} = & \mathbf{C}(& 0{,}2263\,, & -0{,}0528\,, & -0{,}0733\,, & -0{,}0528) \\
\mathbf{B}_{35} = & -\mathbf{B}_{53} = \mathbf{C}(& 0\,, & -0{,}2751\,, & 0\,, & 0{,}2751) \\
\mathbf{B}_{36} = & \mathbf{B}_{63} = \mathbf{C}(& -0{,}0321\,, & 0{,}0226\,, & -0{,}0327\,, & 0{,}0226) \\
\mathbf{B}_{44} = & \mathbf{C}(& 1{,}3981\,, & 0\,, & -0{,}0647\,, & 0) \\
\mathbf{B}_{46} = & -\mathbf{B}_{64} = \mathbf{C}(& 0\,, & -0{,}1942\,, & 0\,, & 0{,}1942) \\
\mathbf{B}_{55} = & \mathbf{C}(& 1{,}3473\,, & 0{,}4234\,, & -0{,}1942\,, & 0{,}4234) \\
\mathbf{B}_{66} = & \mathbf{C}(& 1{,}1963\,, & -0{,}0097\,, & 0{,}0306\,, & -0{,}0097)
\end{array}
$$

a többi blokkok pedig mind 0-matrixok.

Az adott terhelés mellett

$$\boldsymbol{b}^* = [\boldsymbol{b}_1^*,\ \boldsymbol{b}_2^*,\ \boldsymbol{b}_3^*,\ \boldsymbol{b}_4^*,\ \boldsymbol{b}_5^*,\ \boldsymbol{b}_6^*]\,,$$

ahol

$$
\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}1\dot{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad
\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad
\boldsymbol{b}_8 = \begin{bmatrix} 6{,}0031 \\ 1{,}7281 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad
\boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} -0{,}7412 \\ 0{,}6912 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad
\boldsymbol{b}_6 = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Az egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják a keret vízszintes gerendáinak felező síkjában fellépő erőket és nyomatékokat, melyekre a következő értékeket nyerjük (az erők kg-ban, a nyomatékok mkg-ban értendők).

Normálerők :

$$X_{11} = -55 \qquad X_{21} = -414{,}9 \qquad X_{31} = 55 \qquad X_{41} = -85\,.$$

Függőleges nyíróerők :

$$X_{12} = -28 \qquad X_{22} = -280 \qquad X_{32} = -28 \qquad X_{42} = 148{,}3\,.$$

Vízszintes nyíróerők :

$$X_{13} = 242{,}2 \qquad X_{23} = 15{,}6 \qquad X_{33} = 72 \qquad X_{43} = -94{,}4\,,$$

Függőleges síkban ható nyomatékok nincsenek.

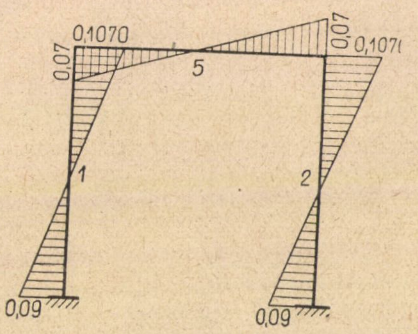
Vízszintes síkban ható nyomatékok:

$$X_{15} = -230{,}5 \quad X_{25} = 112{,}2 \quad X_{35} = -38{,}7 \quad X_{45} = 57{,}1\,.$$

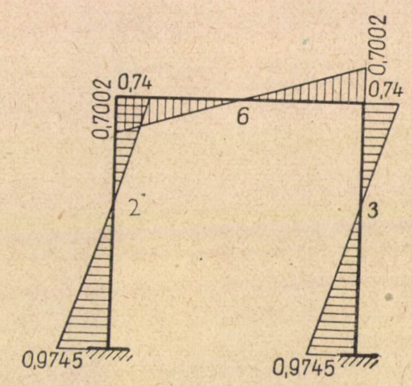
Csavarónyomatékok:

$$X_{16} = 39{,}8 \quad X_{26} = 37 \quad X_{36} = 39{,}8 \quad X_{46} = 37\,.$$

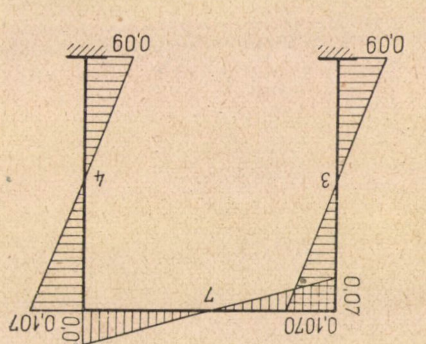
Ezek segítségével a keret bármely keresztmetszetében fellépő erők, illetve nyomatékok meghatározhatók, és az erők, illetve nyomatékok ábrája felrajzolható. A továbbiakban mint végeredményeket közöljük a keret nyomatéki ábráit *(lásd az 5. ábrát)*. A számítás során nyert nyomatékok értékét sem írjuk fel külön, azokat az ábrán tüntetjük fel. Az áttekinthetőség kedvéért a függőleges és a vízszintes síkokban ható nyomatékokat, illetve a csavarónyomatékokat külön-külön ábrán adjuk meg. A függőleges síkokban ható nyomatékok ábrái az *5/a, b, c, d,* a vízszintes síkban ható nyomatékok ábrája az *5/e,* míg a csavarónyomatékok ábrája az *5/f.* Az erők meghatározása és az erő-ábrák elkészítése ugyanolyan módon történik, éppen azért azok közlését mellőzzük.



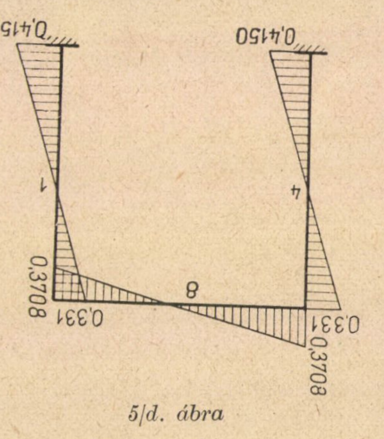
5/a. ábra



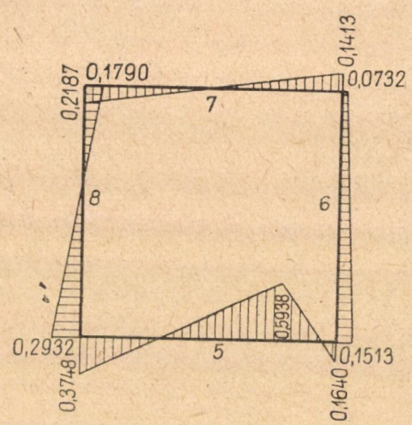
5/b. ábra



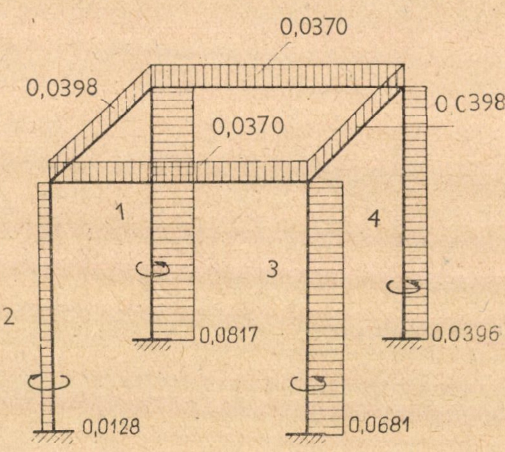
5/c. ábra



5/d. ábra

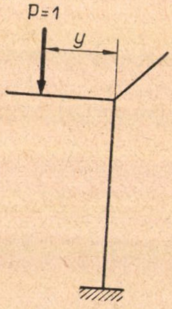


5/e. ábra



5/f. ábra

2. Meghatározandók az előző példában megadott keret 5-tel jelölt gerendájának középső keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvényei és hatásábrái, ha a keret vízszintes gerendáin egy függőleges egységnyi nagyságú erő halad végig. A feladat megoldása szempontjából teljesen kielégítő, ha az erő csupán a jelzett keresztmetszet és a 2-es oszlop közötti szakaszán halad végig. Az 5-ös gerendának és a vízszintes gerendák középső keresztmetszeteinek erre a szakaszra vonatkozó hatásfüggvényeit határozzuk meg. Ezekből a függvényekből aztán az 5-ös gerenda középső keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvény felépíthető (pl. midőn a teher a 8-as gerendán, annak középső keresztmetszete és az 1-es oszlop között mozog, az általa a jelzett keresztmetszetben kifejtett hatás ugyanolyan, mint a 6-os gerenda középső keresztmetszetében keletkező hatások, midőn a teher az 5-ös gerenda középső keresztmetszete és a 2-es oszlop között halad). Midőn pedig a vízszintes gerendák középső keresztmetszetei hatásfüggvényeinek azon szakaszát keressük, mely az 5-ös gerenda középső keresztmetszete és a 2-es oszlop között van, nem kell mást tennünk, mint a $\boldsymbol{b}$ oszlopmatrixot felírni, mint az erő helyzetének függvényét, s az $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$ egyenletből azonnal nyerhetjük a középső keresztmetszetekben fellépő erőket és nyomatékokat mint a terhelő egységnyi erő helyének a függvényét. Adjuk meg az egységnyi erő helyzetét a 2-es oszloptól mért y távolságával *(lásd a 6. ábrát)*. Ebben az esetben a terhelési tényezőkből felépített b oszlopmatrix (transzponált alakban) a következő:



6. ábra

$$\boldsymbol{b}^* = [\boldsymbol{b}_1^*,\ \boldsymbol{b}_2^*,\ \boldsymbol{b}_3^*,\ \boldsymbol{b}_4^*,\ \boldsymbol{b}_5^*,\ \boldsymbol{b}_6^*]\,,$$

ahol

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1{,}25\,y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}25\,y + 0{,}125\,y^2 - 0{,}016\,y^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}25\,y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_4 = \begin{bmatrix} -0{,}5\,y - 0{,}05\,y^2 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad b_5 = 0$$

$$b_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5\,y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így a gerendák középső keresztmetszetében ható erők a következőképpen adhatók meg:

$$X_{11} = 0{,}0180\,y^2 - 0{,}0903\,y \qquad X_{21} = X_{41} = 0$$

$$X_{31} = 0{,}0019\,y^2 - 0{,}0097\,y$$

$$X_{12} = 0{,}1487\,y + 0{,}0307\,y^2 - 0{,}041\,y^3$$

$$X_{22} = X_{42} = 0{,}0055\,y - 0{,}0033\,y^2 + 0{,}0004\,y^3$$

$$X_{32} = -0{,}0227\,y + 0{,}0136\,y^2 - 0{,}0018\,y^3$$

$$X_{13} = X_{33} = 0{,}0078\,y - 0{,}0047\,y^2 + 0{,}0006\,y^3$$

$$X_{23} = X_{43} = -0{,}0113\,y + 0{,}0068\,y^2 - 0{,}0009\,y^3$$

$$X_{14} = -0{,}1505\,y - 0{,}0699\,y^2 \qquad X_{24} = X_{44} = 0$$

$$X_{34} = -0{,}0162\,y + 0{,}0032\,y^2$$

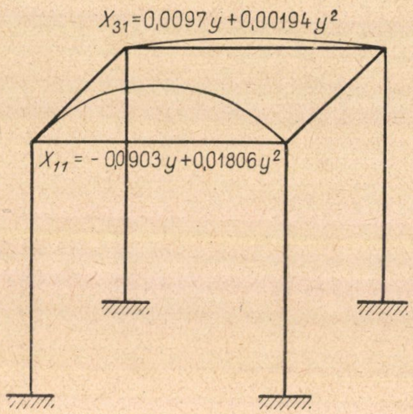
$X_{15} = X_{25} = X_{35} = X_{45} = 0$ (azaz függőleges terhelés esetén a gerendák közepén vízszintes nyomaték nem lép fel)

$$X_{16} = X_{36} = -0{,}0034\,y + 0{,}0020\,y^2 - 0{,}00027\,y^3$$

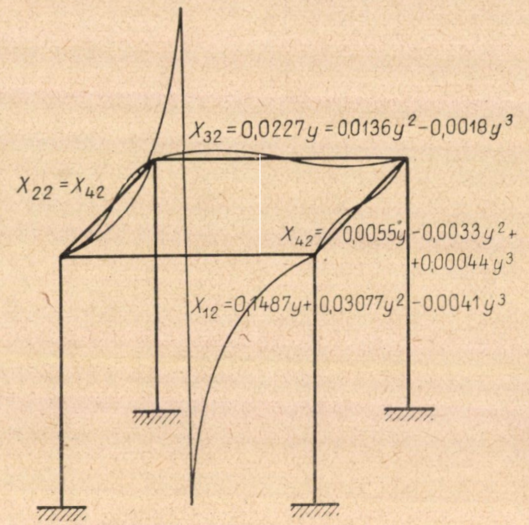
$$X_{26} = -0{,}0866\,y + 0{,}0325\,y^2 - 0{,}0030\,y^3$$

$$X_{46} = 0{,}0106\,y + 0{,}0130\,y^2 - 0{,}0030\,y^3$$

Végül közöljük a keret 5-ös gerendájának középső keresztmetszetére vonatkozó *hatásábrákat (7,—11, ábrák)*.

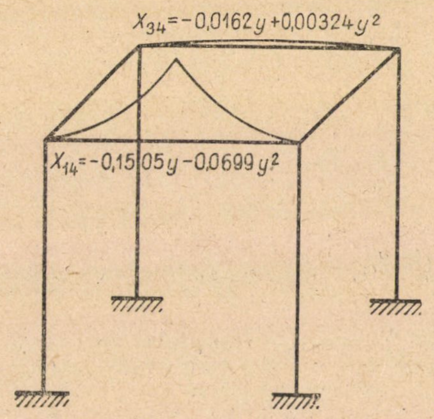


7. *ábra*
Normálerő hatásábrája

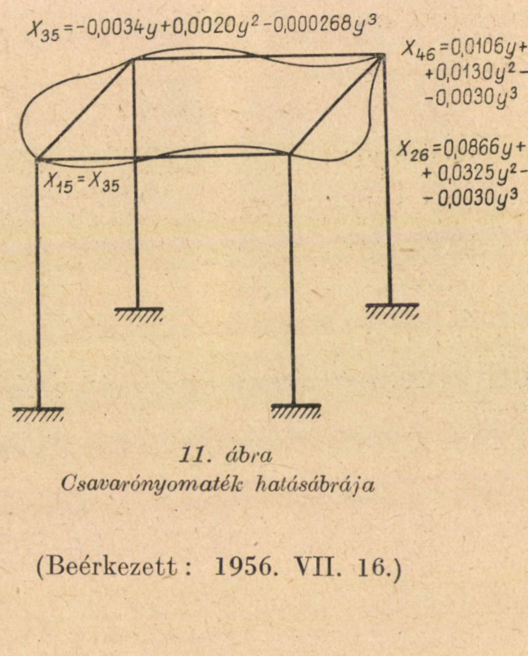


8. *ábra*
Függőleges nyíróerő hatásábrája

9. *ábra*
Függőleges síkban ható nyomaték hatásábrája



10. ábra
Vízszintes nyíróerő hatásábrája



11. ábra
Csavarónyomaték hatásábrája

(Beérkezett: 1956. VII. 16.)

IRODALOM

[1] BÉRES E.—LOVASS-NAGY V.—SZABÓ J.: „Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 559—576 (az előző cikk).

[2] KORÁNYI I.: *Tartók statikája.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГИПЕРМАТРИЦ

E. BÉRES

Резюме

Известно, что математическое исследование технических проблем теории упругости на основании закона HOOKE, вообще говоря, приводит к линейной системе уравнений. Многие авторы заметили, что матрица коэффициентов пространственных решетчатых конструкций, обладающих циклической симметрией, показывает циклическую симметрию; так, например, H. REISSNER, L. MANN и W. KAUFMANN пытаются использовать эту циклическую симметрию, но не используют выгоды, которые может дать матричное исчисление.

Настоящая работа занимается исследованием таких центральносимметричных рам, горизонтальные балки которых во всех отношениях равны и образуют правильный m-угольник, вертикальные колонны также во всех отношениях равны, в вершинах многоугольника жестко присоединяются к балкам и на другом конце также жестко закреплены. (См. рис. 1.)

Автор показывает, что математическое исследование таких рам значительно упрощается, если использовать несколько свойств гиперматриц, состоящих из циклических блоков. Выведенные результаты пригодны и для машинного вычисления.

ÜBER EINE ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN ZUR BERECHNUNG VON RÄUMLICHEN STABWERKEN MIT ZYKLISCHER SYMMETRIE

E. BÉRES

Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass die mathematische Untersuchung von Problemen der technischen Festigkeitslehre auf Grund des Hookeschen Gesetzes auf lineare Gleichungs Systeme führen. Hat ein räumliches Stabwerk eine Aufbau von zyklischer Symmetrie, dann zeigt auch die Koeffizienten-Matrix des Gleichungs-Systems eine zyklische Regelmässigkeit: d. h. sie ist in zyklische Blöcke zerlegbar. Es ist von mehreren Verfassern versucht, um diese zyklische Regelmässigkeit auszunützen (zum Beispiel: H. REISSNER, L. MANN und W. KAUFMANN), aber diese Verfasser benützen nicht die Möglichkeiten der Matrizenrechnung.

Verfasser zeigt, dass falls die Koeffizienten-Matrix in zyklische Blöcke zerlegt ist, mit Hilfe der Hypermatrizen-Theorie einheitliche und übersichtliche Lösungsformeln zu gewinnen sind. Diese Lösungsformeln sind auch zur maschienelle Berechnung gut anwendbar.