A MÁTRIXELMÉLET ALKALMAZÁSA EGYES SZILÁRDSÁGTANI PROBLÉMÁKAT LEÍRÓ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁNÁL

SZABÓ JÁNOS[1]

Az alábbiakban szerző a rugalmasságtan és a szilárdságtan párosrendű lineáris parciális differenciálegyenleteinek közelítő megoldásával kíván foglalkozni. A közelítő megoldás alapját a függvénydifferenciák segítségével felírható differenciaegyenletrendszer megoldása képezi. Ez az eljárás az alkalmazott matematikában és a szilárdságtanban általánosan ismert, mint az [1], [2], [3], [4], [5] és [6], közkézen forgó irodalom is jelzi. EGERVÁRY JENŐ kezdeményezésére (lásd [7] és [8]) a jól ismert m-edrendű $\mathbf{C}_m$ kontinuáns mátrix segítségével a második függvénydifferenciák közvetlenül felírhatók, és $\mathbf{C}$ kanonikus alakjának felhasználásával egy párosrendű lineáris differenciaegyenlet rezolvens-mátrixa direkt kifejezhető. Jelen dolgozatban ismertetjük a parciális differenciahányadosok képzését a $\mathbf{C}$ kontinuáns mátrix segítségével, továbbá bemutatjuk parciális differenciaegyenletek megoldásának módját különböző kerületértékek mellett. Az alkalmazás lehetőségeit a dolgozatban tárgyalt példák illusztrálják.

A dolgozat olyan függvényekkel foglalkozik, melyek egy derékszögű-négyszög alaprajzú tartomány $m \times n$ számú belső pontjában vannak értelmezve és a tartomány kerületén a függvényértékek előírhatók, illetőleg szilárdságtani összefüggések alapján meghatározhatók. A tartomány alaprajzát határoló l_x, l_y oldalú derékszögű-négyszög l_x hosszúságú oldalát x, l_y hosszúságú oldalát y tengelyként választva, és l_x oldalt $m+1$, l_y oldalt $n+1$ részre osztva, az osztáspontokhoz mint az (x, y) sík pontjainak koordinátáihoz tartozó pontokban értelmezett $F(x, y)$ függvényt a továbbiakban

$$F(aj, bk) = F_{jk} \tag{1}$$

$$\triangle x = a = \frac{l_x}{m+1} \;;\quad \triangle y = b = \frac{l_y}{n+1}$$

módon jelölhetjük. Az $m \times n$ számú belső ponthoz tartozó F_{jk} függvényértékeket az

$$[F_{jk}] = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

[1] Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Matematikai Tanszék.

téglalap-mátrixban foglalhatjuk össze. Könnyen belátható, hogy ha a kerületértékek nullával egyenlők, azaz

$$(3)\qquad \begin{gathered} F_{j,0} = F_{j,n+1} = F_{0,k} = F_{m+1,k} = 0 \\ j = 0, 1, \ldots, m+1\,;\; k = 0, 1, \ldots, n+1, \end{gathered}$$

akkor az F_{jk} második differenciahányadosai a $\mathbf{C}$ kontinuáns mátrix felhasználásával így írhatók :

$$(4)\,(5)\qquad \left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{\triangle x^2}\right] = \frac{1}{a^2}\mathbf{C}_m\mathbf{F}\,;\quad \left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{\triangle y^2}\right] = \frac{1}{b^2}\mathbf{F}\mathbf{C}_n\,,$$

ahol $\mathbf{C}_m$ egy m-edrendű kontinuáns mátrix,

$$(6)\qquad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -2 \end{bmatrix},$$

és $\mathbf{C}_n$ egy n-edrendű kontinuáns mátrix.

A $\mathbf{C}_m$ mátrix sajátértékei :

$$(7)\qquad \lambda_{mj} = -4\sin^2\frac{j\pi}{2(m+1)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

és sajátvektorai az $\boldsymbol{u}_{mj}$, illetve $\boldsymbol{u}^*_{mj}$ vektorok (a * transzponáltat jelent), ahol

$$(8)\qquad \boldsymbol{u}^*_{mj} = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\left[\sin\frac{j\pi}{m+1},\ \sin\frac{2j\pi}{m+1},\ \ldots,\ \sin\frac{mj\pi}{m+1}\right],$$

Hasonlóképpen ismertek a $\mathbf{C}_n$ sajátértékei (λ_{nk}) és sajátvektorai ($\boldsymbol{u}_{nk}$, $\boldsymbol{u}^*_{nk}$) is.[2] A $\mathbf{C}$ mátrix sajátvektoraiból képzett $\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}^*$ projektorokat $\mathbf{U}_j$-vel szokás jelölni, tehát :

$$(9)\qquad \mathbf{C}_m = \sum_{j=1}^{m}\lambda_{mj}\mathbf{U}_{mj}\,;\quad \mathbf{C}_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mathbf{U}_{nk}$$

$$(10)\qquad \mathbf{U}_{mh}\cdot\mathbf{U}_{mj} = \delta_{hj}\mathbf{U}_{mj}\,,\qquad \delta_{hj} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h = j \\ 0, & \text{ha } h \neq j \end{cases},$$

ahol

$$(11)\qquad \mathbf{U}_{mj} = \boldsymbol{u}_{mj}\boldsymbol{u}^*_{mj}\,,\quad \mathbf{U}_{nk} = \boldsymbol{u}_{nk}\boldsymbol{u}^*_{nk}\,.$$

---

[2] Lásd pl. [7], 456–457. oldalak.

Egy valós elemekből álló tetszésszerinti **P** téglalapmátrix — melynek m sora és n oszlopa van — előállítható

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}_m \mathbf{D}_\mathbf{P} \mathbf{V}_n^* \tag{12}$$

alakban, ahol a $\mathbf{D}_\mathbf{P}$ *együtthatómátrix* elemeit a

$$\mathbf{D}_\mathbf{P} = \mathbf{V}_m^* \mathbf{P} \mathbf{V}_n \tag{13}$$

összefüggés szolgáltatja. A (12) és (13) képletekben szereplő $\mathbf{V}_m$, illetve $\mathbf{V}_n$ mátrixok a $\mathbf{C}_m$, illetve $\mathbf{C}_n$ kontinuáns mátrixok oszlopvektoraiból alkotott sormátrixokat jelentik :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m &= [\boldsymbol{u}_{m1}, \boldsymbol{u}_{m2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{mm}] \\ \mathbf{V}_n &= [\boldsymbol{u}_{n1}, \boldsymbol{u}_{n2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{nn}] \end{aligned} \tag{14}$$

Ugyanis, mint könnyen belátható,

$$\mathbf{V}_m\mathbf{V}_m^* = [\boldsymbol{u}_{m1}, \boldsymbol{u}_{m2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{mm}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{m1}^* \\ \boldsymbol{u}_{m2}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{u}_{mm}^* \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{u}_{mj} \boldsymbol{u}_{mj}^* = \mathbf{E}_m \tag{15}$$

$$\mathbf{V}_m^*\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{m1}^* \\ \boldsymbol{u}_{m2}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{u}_{mm}^* \end{bmatrix} [\boldsymbol{u}_{m1}, \boldsymbol{u}_{m2} \ldots, \boldsymbol{u}_{mm}] = \mathbf{E}_m \ , \tag{16}$$

és hasonlóképpen

$$\mathbf{V}_n\mathbf{V}_n^* = \mathbf{E}_n \tag{17}$$

$$\mathbf{V}_n^*\mathbf{V}_n = \mathbf{E}_n \tag{18}$$

ahol $\mathbf{E}_m$, illetve $\mathbf{E}_n$ az m-edrendű, illetve n-edrendű egységmátrixokat jelöli.

A $\mathbf{C}_m$, illetve $\mathbf{C}_n$ konstinuáns mátrixok sajátértékeiből alkotott diagonálmátrixokat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_m &= \langle \lambda_{m1} \ \ \lambda_{m2}, \ldots, \lambda_{mm} \rangle \\ \boldsymbol{\Lambda}_n &= \langle \lambda_{n1}, \ \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{nn} \rangle \end{aligned} \tag{19}$$

módon jelölve írhatjuk :

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{V}_m \boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{V}_m^* \tag{20}$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{V}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^* \ . \tag{21}$$

Foglalkozzunk ezek után a

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}\,\mathbf{C}_m^{\alpha}\,\mathbf{F}\,\mathbf{C}_n^{\beta} = \mathbf{P} \tag{22}$$

elsőfokú mátrixegyenlet megoldásával (itt **P** az adott, **F** a keresett téglalap-mátrix).[3]

A (20) és (21) kanonikus alakok felhasználásával írhatjuk:

$$\mathbf{V}_m\left(\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}\,\mathbf{\Lambda}_m^{\alpha}\mathbf{V}_m^{*}\mathbf{F}\,\mathbf{V}_n\mathbf{\Lambda}_n^{\beta}\right)\mathbf{V}_n^{*} = \mathbf{V}_m\,\mathbf{D}_{\mathbf{P}}\mathbf{V}_n^{*}\,. \tag{23}$$

Ebből az egyenletből (12) és (13) figyelembevételével és

$$\mathbf{V}_m^{*}\mathbf{F}\,\mathbf{V}_n = \mathbf{D}_{\mathbf{F}} \tag{24}$$

alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}\,\mathbf{\Lambda}_m^{\alpha}\,\mathbf{D}_{\mathbf{F}}\mathbf{\Lambda}_n^{\beta} = \mathbf{D}_{\mathbf{P}} \tag{25}$$

tehát a

$$\mathbf{D}_{\mathbf{P}} = [d_{\mathbf{P}jk}] \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{F}} = [d_{\mathbf{F}jk}] \tag{26}$$

mátrixok elemei között a

$$d_{\mathbf{F}jk}\left(\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}\,\lambda_{mj}^{\alpha}\,\lambda_{nk}^{\beta}\right) = d_{\mathbf{P}jk} \tag{27}$$

összefüggés áll fenn. Eszerint a $\mathbf{D}_P$ együtthatómátrix elemeiből a $\mathbf{D}_F$ mátrix elemei közvetlenül kiszámíthatók.

Egy $0 \leq x \leq l_y$, $0 \leq y \leq l_x$ derékszögű négyszög alaprajzú tartományon belül értelmezett $F\,(x, y)$ függvény — melynek értéke és parciális deriváltjai-

---

[3] Megjegyzendő, hogy a (22) lineáris mátrixegyenlet megoldását jelentő **F** mátrixot definiálhatjuk úgy, mint a

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} d_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f(x, y)}{\partial x^{2\alpha}\partial y^{2\beta}} = q(x, y)$$

párosrendű parciális differenciálegyenletet és a derékszögű négyszög alaprajzú G tartomány Γ peremén előírt

$$\left\{\sum_{\mu}\sum_{\nu} b_{\mu\nu}\,\frac{\partial^{2\mu+2\nu} f(x, y)}{\partial x^{2\mu}\,\partial y^{2\nu}}\right\} = g(x, y)$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, \alpha - 1\,; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \beta - 1)$$

kerületi feltételt kielégítő $f(x, y)$ függvényt a G tartomány belső $m \times n$ számú pontjában közelítőleg megadó

$$\mathbf{F} = [F_{jk}] \approx [f(j\triangle x,\, k\triangle y)]$$

mátrixot is. A (22) egyenlet jobboldalán álló mátrix ugyanis

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

alakú, ahol $\mathbf{Q} = [Q_{jk}] = [q(j\triangle x,\, k\triangle y)]$ és **R** a peremfeltételeket magába foglaló mátrix.

nak értéke is a tartomány kerületén nullával egyenlő — párosrendű parciális differenciálhányadosainak értéke a tartomány $n \times m$ számú belső pontjában — n és m megfelelő megválasztása mellett előírt pontossággal — megközelíthető

$$\frac{\triangle^{2\gamma} F_{jk}}{a^{2\alpha} b^{2\beta}} \qquad (2\alpha + 2\beta = 2\gamma) \tag{28}$$

alakú differencia-hányadosokkal, ahol

$$a = \frac{l_x}{m+1}\,, \qquad b = \frac{l_y}{n+1} \tag{29}$$

$$F_{jk} = F(ja, kb)\ ; \quad j = 1, 2, \ldots, m\,; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy a (28) alatti differenciahányadosok értékeit — mint elemeket — tartalmazó mátrix a $\mathbf{C}_m^{\alpha}$, illetve $\mathbf{C}_n^{\beta}$ kontinuáns mátrix-függvényekkel balról, illetve jobbról való szorzással előállítható:

$$\left[\frac{\triangle^{2\gamma} F_{jk}}{a^{2\alpha} b^{2\beta}}\right] = \frac{1}{a^{2\alpha} b^{2\beta}} \mathbf{C}_m^{\alpha} \mathbf{F} \mathbf{C}_n^{\beta}\,, \qquad F = [F_{jk}]\,. \tag{30}$$

Az elmondottak alapján most már látható, hogy egy párosrendű kétváltozós lineáris parciális differenciálegyenlet közelíthető megoldása homogén kerületi feltételek mellett direkt úton megadható.

Például a rugalmas lemezek alakváltozását leíró Lagrange-féle differenciálegyenlet

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{31}$$

(ahol q = a lemez síkjára merőleges megoszló teher intenzitása
D = a lemez hajlítómerevsége : $D = \dfrac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)}$
h = a lemez vastagsága
E = a lemez anyagának rugalmassági modulusa
μ = a harántnyúlási tényező
w = a lemez középsíkjának az eredeti helyzetére merőleges elmozdulása)

közelítő megoldását (kerületén szabadon felfekvő lemez esetében) szolgáltató mátrixegyenlet

$$\frac{1}{a^4}\mathbf{C}_m^2 \mathbf{F} + \frac{2}{a^2 b^2}\mathbf{C}_m \mathbf{F} \mathbf{C}_n + \frac{1}{b^4}\mathbf{F}\mathbf{C}_n = \mathbf{P} \tag{32}$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{F} = [w_{jk}]$, $\mathbf{P} = [P_{jk}]/abD$ és P_{jk} a (j, k) csomópontban koncentráltan ható terhelés. A (32) egyenletből a $\mathbf{D_P} = [d_{\mathbf{P}jk}]$

együtthatómátrix[4] ismeretében $\mathbf{F}$ együtthatómátrixa, $\mathbf{D_F}$, közvetlenül kiszámítható:

$$\mathbf{D_F} = [d_{\mathbf{F}jk}] = \frac{a^3b^3}{D}\left[\frac{d_{\mathbf{P}jk}}{(b^2\lambda_{mj} + a^2\lambda_{nk})^2}\right] \tag{33}$$

A párosrendű parciális kétváltozós lineáris differenciálegyenletek fent ismertetett közelítő megoldása, ismert — nullától különböző — kerületi feltételek esetén is alkalmazható. Jelöljük az $F(x, y)$ függvény — az (l_x, l_y) tartomány $m\times n$ számú belső és $2m + 2n + 4$ számú kerületi pontjában — megadott értékeit tartalmazó $m + 2$ sorból és $n + 2$ oszlopból álló mátrixot $\mathbf{F}_0$-lal, akkor a korábbi jelölések alkalmazásával:

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} F_{00} & \boldsymbol{f}_f^* & F_{0,n+1} \\ \boldsymbol{f}_b & \mathbf{F} & \boldsymbol{f}_j \\ F_{m+1,0} & \boldsymbol{f}_a^* & F_{m+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (m + 2 \text{ sor és } n + 2 \text{ oszlop}). \tag{34}$$

Feltételezve, hogy a második differenciálhányadosok a peremen nullával egyenlők, az $m\times n$ számú belső ponthoz tartozó második differenciahányadosok értékeit tartalmazó mátrixok:

$$\left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{\triangle x^2}\right] = \left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\mathbf{C}_m\mathbf{F} + \boldsymbol{\phi}_x$$
$$\left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{\triangle y^2}\right] = \left[\frac{\triangle^2 F_{jk}}{b^2}\right] = \frac{1}{a^2}\mathbf{F}\mathbf{C}_n + \boldsymbol{\phi}_y \tag{35}$$

ahol

$$\boldsymbol{\phi}_x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_f^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{f}_a^* \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ (3 \\ \\ \\ \\ m) \end{array} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\phi}_y = [\overset{1}{\overbrace{\boldsymbol{f}_b}}, 0, 0, \ldots, \overset{n}{\overbrace{\boldsymbol{f}_j}}]\,. \tag{37}$$

---

[4] $\mathbf{P}$ együtthatómátrixa a (j, k) csomópontban álló egyetlen koncentrált erő $(P_{jk} = 1)$ esetén $\mathbf{P} = e_j e_k^*$ alapján igen egyszerűen kiszámítható:

$$\mathbf{D_P} = \mathbf{V}_m^* e_j e_k^* \mathbf{V}_n$$

azaz $\mathbf{D_P}$ a $\mathbf{V}_m^*$ j-edik oszlopából és a $\mathbf{V}_n$ k-adik sorából komponált diádokból áll. (e_j, illetve e_k a j-edik, illetve k-adik egységvektor.)

Hasonlóképpen lehet megfogalmazni a derivált függvények kerületérték előírásait is. Például a [9]-ben tárgyalt elliptikus paraboloid alakú héj erőjátékát hóteher hatására egy

$$\alpha \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} = 0 \tag{38}$$

alakú másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlet írja le. Kerületi feltételek:

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{g}{2\beta}, \quad \text{ha} \quad x = 0 \quad \text{és} \quad x = l_x \\ S_y &= 0, \quad \text{ha} \quad y = 0 \quad \text{és} \quad y = l_y . \end{aligned} \tag{39}$$

A (38) egyenlet közelítő megoldása tehát az

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= [S_{yjk}] \\ f_a^* = f_f^* &= \frac{g}{2\beta}[1, 1, \ldots, 1] \end{aligned} \tag{40}$$

rövidítések bevezetésével

$$\frac{\alpha}{b^2}\mathbf{F}\mathbf{C}_n + \frac{\beta}{a^2}\mathbf{C}_m\mathbf{F} = -\frac{\beta}{a^2}\boldsymbol{\phi}_x = \mathbf{P} . \tag{41}$$

A (41) egyenlet megoldásának menete — összefoglalva a korábban elmondottakat:

1° Ismerteknek tételezhetők fel a $\mathbf{C}_m$, illetve $\mathbf{C}_n$ kontinuáns mátrixok sajátvektoraiból, illetve sajátértékeiből alkotható $\mathbf{V}_m$, $\mathbf{V}_m^*$, $\mathbf{V}_n$. $\mathbf{V}^*$ transzformáló mátrixok, illetve $\mathbf{\Lambda}_m$, $\mathbf{\Lambda}_n$ diagonálmátrixok;

2° A $\mathbf{P} = -\boldsymbol{\phi}_x$ téglalap-mátrixhoz tartozó együtthatómátrix kiszámítható a

$$\mathbf{D}_\mathbf{P} = \mathbf{V}_m^* \mathbf{P} \mathbf{V}_n$$

képlettel;

3° Az ismeretlen $\mathbf{F}$ mátrix $\mathbf{D}_\mathbf{F}$ együtthatómátrixának elemei kifejezhetők $\mathbf{D}_\mathbf{P}$ elemeinek függvényében, például a (41) egyenletből:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\mathbf{F} = [d_{\mathbf{F}jk}] &= \left[\frac{a^2 b^2 d_{\mathbf{P}jk}}{b^2 \beta \lambda_{mj} + a^2 \alpha \lambda_{nk}}\right] \\ \mathbf{D}_\mathbf{P} &= [d_{\mathbf{P}jk}] ; \end{aligned} \tag{42}$$

4° A $\mathbf{D}_\mathbf{F}$ együtthatómátrix birtokában a transzformáló mátrixok segítségével $\mathbf{F}$ kiszámítható:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_m \mathbf{D}_\mathbf{F} \mathbf{V}_n^* . \tag{43}$$

Befejezésül megemlítjük, hogy az egyszersmindenkorra táblázatba foglalható különböző rendszámú **V** transzformáló mátrixok kiszámítása, egyes numerikus feladatok megoldása esetén, feleslegessé válik. A számítás — mivel valószínűleg előnyösen programozható — nagyteljesítményű elektronikus számológép segítségével rendkívül gyorsan elvégezhető.

IRODALOM

[1] K. Beyer : *Die Statik im Eisenbetonbau.* Springer, Berlin, 1934.

[2] F. Bleich—E. Melan : *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik.* Springer, Berlin, 1927.

[3] L. Collatz : *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1955.

[4] F. Schwank : *Randwertprobleme.* Teubner, Leipzig, 1951.

[5] L. V. Kantorovics—V. I. Krülov : *A felsőbb analízis közelítő módszerei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

[6] Palotás L. : *Mérnöki Kézikönyv (I. kötet).* Műszaki Kiadó, Budapest, 1955.

[7] Egerváry Jenő : ,,Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.

[8] Egerváry Jenő : ,,A mátrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 9—23.

[9] Menyhárd I. : ,,Budapest Székesfővárosi Közlekedési Rt. kelenföldi autóbusz-kocsiszínjének héj-szerkezetei." *Technika* (1943) 80—90.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОПИСЫВАЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

J. SZABÓ

Резюме

Работа рассматривает приближенное решение линейных дифференциальных уравнений четного порядка с двумя переменными с помощью системы уравнений в конечных разностях в случае, когда известны граничные значения. По инициативе J. Egerváry конечные разности четного порядка можно образовывать с помощью хорошо известной континуантной матрицы **C**. Пусть функция $F(x, y)$ определена в некотором прямоугольнике, прямоугольная матрица $\mathbf{F} = [F_{jk}]$ состоящая из m рядов и n столбцев, дает ее значения в $m \times n$ внутренних точках. Автор показывает, что умножая ее слева на степени континуантной матрицы m-го порядка $\mathbf{C}_m$ и, соответственно, справа на степени континуантной матриц $\mathbf{C}_n$-в случае однородных граничных условий — могут быть образованы относящиеся к $m \times n$ внутренним точкам области конечные разности четного порядка на основании формулы

$$\left[\frac{\Delta^{2\gamma} F_{jk}}{\Delta x^{2\alpha} \ \Delta y^{2(\gamma-\alpha)}}\right] = \frac{1}{(\Delta x)^{2\alpha} \ (\Delta y)^{2(\gamma-\alpha)}} \mathbf{C}_m^{\alpha} \mathbf{F} \mathbf{C}_n^{\gamma-\alpha} .$$

В настоящей работе автор на двух примерах показывает, что между элементами матриц коэффициентов $\mathbf{D_F}$ и $\mathbf{D_P}$ относящихся к матрицам $\mathbf{F_P}$ и соответственно **P**, содержащих $m \times n$ значений неизвестной функции и соответственно возмущающей функции, фигурирующих в уравнениях в конечных разностях, описывающих известные граничные задачи теории упругости, может быть дано пригодное для численных вычислений соотношение. Между матрицей **F** и относящейся к ней матрице коэффициентов **D** преобра-

зующие матрицы $\mathbf{V}_m$ $\mathbf{V}_n$ и образуемые из собственных векторов континуантных матриц $\mathbf{C}_m$ и соотв. $\mathbf{C}_n$ создает связь в форме $\mathbf{F}$ $\mathbf{V}_m \mathbf{D} \mathbf{V}_n^*$ и соотв. $\mathbf{D} = \mathbf{V}_m^* \mathbf{F} \mathbf{V}_n$ так, что $\mathbf{C}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{V}_m^*$ и $\mathbf{C}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^*$, где $\mathbf{\Lambda}_m$ и $\mathbf{\Lambda}_n$ диагональные матрицы, образованые из собственных значений $\mathbf{C}_m$ и соотв. $\mathbf{C}_x$.

ÜBER EINE ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR NÄHERUNGSLÖSUNG VON GEWISSEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER FESTIGKEITSLEHRE

J. SZABÓ

Zusammenfassung

Verfasser bemerkt, dass in dem Falle, wenn die Unbekannten eines zweidimensionalen Problems in einem quadratischen bzw. rechteckigen Matrix zusammengefasst werden, die zweiten partiellen Differenzenquotienten nach den zwei unabhängigen Veränderlichen (x, y) mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Randbedingungen durch rechtsbzw. links-seitige Multiplikation mit einer Kontinuanten-Matrix ($\mathbf{C}$) herstellbar sind. Es sei zum Beispiel die Funktion $F(x, y)$ durch eine Matrix $\mathbf{F} = [F_{jk}]$ von m Zeilen und n Spalten angenähert, deren Elemente in den $m \times n$ Punkten eines rechteckigen Netzes den Werten der Funktion F gleich sind, d. h.: $F_{jk} = F(x_j, x_k)$, dann gilt die Formel

$$\left[\frac{\triangle^{2\gamma} F(x_i, y_j)}{\triangle x^{2\alpha} \triangle y^{2(\gamma-\alpha)}} \right] = \frac{1}{(\triangle x)^{2\alpha} (\triangle y)^{2(\gamma-\alpha)}} \mathbf{C}_m^{\alpha} \mathbf{F} \mathbf{C}_n^{\gamma-\alpha} .$$

Auf diese Weise erhält Verfasser eine allgemeine lineare Matrizengleichung; zur Lösung von derartigen Gleichungen wird in der Literatur meistens die Anwendung der Nivellateur vorgeschlagen. Im Gegensatz hierzu entwickelt Verfasser eine, auch zur maschinelle Rechnung gut anwendbare, Lösungsmethode, welche die bekannten Projektoren (Idempotente-Komponenten) der Kontinuanten-Matrix $\mathbf{C}$ verwendet. Die auf diese Weise erhaltene Lösung kann als die endliche Fouriersche Entwicklung der gesuchten Grössen gedeutet werden.