

## A FÜGGŐHIDAK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK MEGALAPOZÁSA ÉS FELÉPÍTÉSE MÁTRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL<sup>1)</sup>

EGERVÁRY JENŐ

A függőhidak számítására vonatkozó néhány újabb munkában egy olyan törekvés ismerhető fel, hogy az infinitezimális műveleteket elkerüljék. Ennek során a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, a folytonosan megoszló élő terhet koncentrált erőkkel helyettesítik (vö.: [2]).

E közlemény írója a lánchidak finit számítási módját már korábban kidolgozta az olyan „egyenletes” lánchidak számára, melyeknek merevítő tartója állandó inercianyomatékkal bír és melyeknek függesztő rúdjai ekvivalensak (lásd: [3]).

Az alábbiakban az általános (szakaszonként állandó inercianyomatékú és változó hosszúságú szakaszokból álló) lánchidak finit elméletét építjük ki. A rúdelmélet Clapeyron-féle egyenleteinek a következetes használata, valamint az esetleg folytonosan megoszló élő tehernek koncentrált erőkkel való helyettesítése során keletkező lineáris egyenletek megfelelő tárgyalásához mátrixelméleti segédeszközöket veszünk igénybe. Lánchidak alapegyenleteként olyan mátrixegyenlet adódik, melynek ismeretlene a merevítő tartó lehajlási mátrixa. Ennek a mátrixegyenletnek a megoldásához csupán kontinuáns mátrixok invertálása szükséges, amire egyszerű, gépi úton is könnyen végrehajtható számítási utasítást is tartalmaz a dolgozat. Egy  $n - 1$  függesztőrúddal bíró lánchíd esetén a horizontális feszültség növekedése számára  $n$ -edrendű egyenletet nyerünk.

A lánchíd mátrixegyenlete, egy olyan határátmenetnél, amikor a függesztőrudak száma minden határon túl növekszik, a függőhidak jól ismert Melan-féle differenciálegyenletébe megy át.

Az utolsó fejezetben megmutatjuk, hogy korábbi dolgozatunknak az egyenletes lánchidakra vonatkozó formulái a jelen dolgozatban közölt eredményeknek speciális esetei.

Valamely merev vagy rugalmas testekből álló rendszer mechanikai vizsgálatához szükséges matematikai segédeszközök jellege tudvalevőleg a rendszer szabadsági fokainak a számától függ. A technikai szilárdságtannak azok a problémái, melyek alapjául a Hooke-törvény szolgál, véges sok szabadsági fok esetén lineáris algebrai egyenletekre, végtelen sok szabadsági fokkal bíró rendszerek esetén azonban lineáris differenciálegyenletekre vezetnek.

<sup>1)</sup> E dolgozat tartalmilag egyezik a szerzőnek német nyelvű [1] dolgozatával.

Történeti tény, hogy a lineáris differenciálegyenletek megoldási elmélete — a Green-függvény, illetve a sajátfüggvények felhasználásával — korábban fejlődött ki, mint a lineáris algebrai egyenletrendszereknek a mátrixelméletet felhasználó, analóg megoldási elmélete. Nyilván elsősorban ennek a körülménynek tudható be, hogy a függőhidak elméletében eddig majdnem kizárólag végtelen sok szabadsági fokkal bíró modelleket vettek alapul, melyek lineáris differenciálegyenletre vezetnek, ugyanakkor véges szabadsági fokkal bíró modellek alkalmazására, melyek lineáris algebrai egyenletrendszerre vezetnek, alig történt kísérlet.

Egy függőhíd alkalmas matematikai modelljének a megválasztásánál élesen meg kell különböztetnünk a kábelhidakat és a lánchidakat.

Egy kábelhíd — melynél egy rugalmas gerenda (merevítő tartó) és egy egydimenziós, hajlékony kontinuum (kábel) véges számú merev függesztőrúddal van összekapcsolva —, nagyobb számú függesztő rúd esetén olyan egyszerűbb modellel helyettesíthető, melynél a kábel és a gerenda függesztő membránnal vannak összekapcsolva, ez a modell pedig közvetlenül a jól ismert, először E. MELAN által felállított lineáris differenciálegyenletre vezet.

Egy lánchíd azonban, melynek lánchrúdjai és függesztőrúdjai merev (vagy legfeljebb hosszirányban nyúlékony) rudaknak tekinthetők, sokkal pontosabban és előnyösebben helyettesíthető egy véges sok szabadsági fokú modellel, ha az élő (hasznos) terhelést — melynek matematikailag pontos eloszlása sem nem ismeretes, sem gyakorlatilag nem lényeges —, sztatikailag ekvivalens és a függesztőrudak alsó végpontjain támadó koncentrált erőkkel helyettesítjük. A lánchídnek ez a „finitizált” modellje — a technikai szilárdságban legegyszerűbb tételeinek alkalmazásával — lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, melynél az ismeretlenek száma a függesztőrudak számával egyenlő.

Jelen dolgozatunkban a fenti módon finitizált lánchídmodell egyensúlyi egyenletrendszerét mátrixelméleti segédeszközökkel felállítjuk és megoldjuk. Ezzel egyidejűleg azt az — egyes szerzők eredményei alapján sejthető — tény is kellő megvilágításba helyezzük, hogy a lineáris differenciálegyenletek elméletéből ismert Green-függvénynek (hatásfüggvénynek), illetve a Green-függvény bilineáris sorfejtésének finit analogonoként a fenti egyenletrendszer koefficiensmátrixának inverze, illetve annak spektrálfelbontása felelnek meg.

Avégből, hogy a látszólag lényegesen különböző módszerek és megoldási formulák közti összefüggést és analógiát minél világosabban kifejezésre juttassuk, párhuzamosan fogjuk tárgyalni az egyetlen függesztőrúddal bíró és az  $n - 1$  függesztőrúddal bíró lánchíd, valamint a végtelen sok függesztőrúddal (függesztő membránnal) bíró függőhíd alapegyenleteit. Eközben ki fog derülni, hogy noha az egyetlen függesztőrúddal bíró lánchíd tárgyalása egy egyszerű technikai-szilárdságtani gyakorló feladattal egyenértékű, mindazonáltal az abból származó egyszerű megoldási formulák  $n - 1$  függesztőrúddal bíró lánchíd esetére is megtartják érvényességüket, ha az azokban szereplő skalárokat megfelelő mátrixokkal helyettesítjük.

Ezen túlmenően kimutatjuk továbbá, hogy az  $n$  tagú lánchíd számára levezetett mátrixelméleti megoldási formulák,  $n \rightarrow \infty$  határátmenet esetén a TIMOSHENKO, KÁRMÁN, BLEICH stb. által kábelhidak számára megadott megoldási formulákba mennek át.

Eddig általában függőhidak alapegyenletéről beszéltünk. Tudvalevőleg azonban minden rugalmasságtani problémához kétféle alapegyenlet tartozik; nevezetesen feszültségi egyenlet és alakváltozási egyenlet.

Valamely függőhíd feszültségi egyenlete (melyben a merevítő tartó hajlítófeszültségi mátrixa illetve hajlítófeszültségfüggvénye szerepel mint ismeretlen) különösen egyszerű alakú. Véges sok függesztőrúd esetén a feszültségi egyenlet együtthatómátrixa szimmetrikus kontinuáns, mely tudvalevőleg aránylag könnyen invertálható. Végtelen sok függesztőrúd (függesztőmembránnal bíró kábelhíd) esetén a feszültségi egyenlet egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet, melynek Green-függvénye (hatásfüggvénye) konstans keresztmetszet-inercianyomaték esetén explicit megadható, változó keresztmetszet-inercianyomaték esetén végtelen sorral állítható elő.

Valamely függőhíd alakváltozási egyenlete (melyben a merevítőtartó lehajlási mátrixa, illetve lehajlási függvénye szerepel, mint ismeretlen) lényegesen bonyolultabb mátrix-, illetve differenciálegyenlet. Egy mátrixidentitás, illetve annak már D. HILBERT által felhasznált infinitizemális analogonja segítségével azonban lehetővé fog válni, hogy az alakváltozási egyenlet megoldását a feszültségi egyenletére visszavezzük. Ily módon a KÁRMÁN, BLEICH stb. által talált sorfejtések is beilleszthetők az általános elmélet keretébe.

Ha a lánchíd egyenletes (azaz függesztőrúdjai ekvidisztánsak és merevítőtartója konstans inercianyomatékú), akkor gyakorlati számítás céljából legalkalmasabbnak látszik az együtthatómátrix jól ismert sajátértékeinek és sajátmátrixainak a felhasználása, minthogy ily módon automatikusan nyerjük a keresett feszültségi mátrix, illetve lehajlási mátrix Fourier-kifejtését.

Általános (nem egyenletes) lánchídnál azonban a sajátértékek és sajátmátrixok nem ismeretesek. Ennélfogva ez idő szerint az általános lánchidak számítását legcélszerűbb az alapegyenletekben szereplő kontinuáns mátrixok direkt invertálásával elvégezni.

Amidőn a jelen munkában a függőhidak számításával kapcsolatban annyira különböző megoldási módszereket állítunk szembe egymással, mint a mátrixmódszer és az infinitizemális módszer, akkor indokoltnak látszik azoknak gyakorlati alkalmasság szempontjából való összehasonlítása. Nyilván nem foghat fenn kétség abban a tekintetben, hogy kevés függesztőrúddal bíró lánchíd esetén a mátrixmódszer a hídban fellépő feszültségeket és alakváltozásokat sokkal pontosabban fogja megadni, mint az infinitizemális módszer.

Nagy — 30 vagy több függesztőrúddal bíró — lánchidaknál a fenti két módszerrel nyert eredmények közti különbség előreláthatólag oly csekély lesz, hogy azt az anyagi állandók bizonytalansága mellett el lehet hanyagolni. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy a differenciálegyenletek megoldó formulái mindig gyakorlatilag kényelmetlen limeszprocesszusokat (Green-függvény használatánál paraméteres integrált, sajátfüggvények használatánál végtelen sorokat) tartalmaznak, akkor arra a megállapításra kell jutnunk, hogy a finit mátrixmódszer alkalmazása ez esetben is előnyösebb.

Minden rendszernél, mely egy vertikális erők által igénybe vett kábelt vagy láncot tartalmaz, tehát függőhídnál is — egy differenciál- vagy mátrixegyenlet megoldásán kívül — még a kábel-, illetve láncfeszültségnek az igénybevétel által előidézett változását, vagyis a horizontális feszültség növekedését is ki kell számítani. Ez a számítás általában úgy történik, hogy a keresett feszültségnövekedés számára kinematikai és rugalmasságtani megfontolásokkal meghatározó egyenletet állítunk fel, és ennek legnagyobb gyöke szolgáltatja a keresett feszültségnövekedést.

A feszültségnövekedés kiszámítása finitizált lánchíd esetében sem lineáris feladat. Egyetlen függesztőrúddal bíró lánchídnál is másodfokú algebrai egyenletet kell megoldani.  $n - 1$  függesztőrúdat tartalmazó lánchídnál  $n$ -edfokú algebrai egyenlet, kábelhídnál pedig transzcendens egyenlet adódik. Ezen egyenletek közelítő megoldására különböző módszereket javasoltak.

Egyenletes lánchíd esetében a feszültségnövekedés meghatározására szolgáló egyenlet olyan alakra hozható, melyből egyetlen pozitív gyök létezése felismerhető és az közelítőleg könnyen kiszámítható.

Általános lánchíd esetén a meghatározó egyenlet közelítő megoldása nehézkes feladat. Ilyen esetben célszerűbb egy inverz eljárás, melynél a feszültségnövekedést a gyakorlatnak jól megfelelő közelítő értékkel előírjuk és ezután olyan híderheléseket veszünk fel, melyek a meghatározó egyenletet kielégítik.

Hogy a jelen munkát lehetőleg könnyen olvashatóvá tegyük, azt a következőképpen osztottuk fejezetekre.

1° Az első fejezetben röviden ismertetjük a lineáris differenciálegyenletek és a kontinuummátrixok közti összefüggést.

2° A második fejezetben idézzük és mátrixalakban kifejezzük a vertikális erők által igénybe vett láncc, illetve gerenda jólismert egyensúlyi egyenleteit.

3° A harmadik fejezet egy kéttagú, egyetlen függesztőrúddal bíró lánchíd hajlítófeszültségének és lehajlásának elemi úton történő kiszámítását tartalmazza. Egyidejűleg adódik a másodfokú egyenlet is, mely a horizontális feszültség növekedését meghatározza.

4° A negyedik fejezetben megmutatjuk, hogy az előzőleg a kéttagú lánchíd számára levezetett elemi megoldási formulák  $n$ -tagú lánchíd esetére is érvényesek maradnak, ha a skaláris mennyiségeket megfelelő mátrixokkal helyettesítjük. Levezetjük továbbá a lánchíd terhelése és az ennek következtében beálló horizontális feszültségnövekedés közti összefüggést.

5° Az ötödik fejezetben elvégezzük a határátmenetet, melynél a függesztőrudak száma minden határon túl növekszik és ily módon megkapjuk a kábelhidak differenciálegyenletét.

6° A hatodik fejezetben azokkal az egyszerűsödésekkel és gyakorlati előnyökkel foglalkozunk, melyek egyenletes lánchíd, illetve kábelhíd esetén bekövetkeznek.

## 1. fejezet

**1. §.** Ebben a fejezetben rá kívánunk mutatni azokra az analógiákra, melyek egyrészt a lánchidak finit elméletében szereplő kontinuummátrixok, másrészt a kábelhidak infinitizemális elméletében szereplő másodrendű differenciálegyenletek közt fennállnak.

Hogy a kontinuummások és a másodrendű lineáris differenciálegyenletek közti összefüggést megvilágíthassuk, néhány fogalmat kell előrebocsátani.

Ha adva van az oszlop- (vagy sor-) mátrixoknak egy végtelen sorozata :

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}, \dots$$

ahol a felső index a mátrixok rendszámát jelenti, akkor ezen mátrixok mindegyikét ábrázolhatjuk oly módon, hogy választva egy tetszőleges  $L > 0$  számot, az  $L/n, 2L/n, \dots, (n-1)L/n$  abszcisszáknak ordinátaként az  $f^{(n)}$  mátrix  $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_{n-1}^{(n)}$  elemeit feleltetjük meg. Előfordulhat, hogy az ily módon nyert pontesoportok minden határon túl növekvő  $n$  esetén egy folytonos görbévé

sűrűsödnek. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy a mátrix-sorozatnak a limese egy folytonos, egyváltozós függvény. Pontosabban :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)} = f(x) ,$$

ha  $(0, L)$  intervallumban minden  $x$ -re

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ kL/n \rightarrow x}} f_k^{(n)} = f(x) .$$

Ugyanilyen módon a négyzetes mátrixoknak valamely  $G^{(n)}$  végtelen sorozata konvergálhat egy, a  $0 < x, y < L$  négyzetben definiált  $G(x, y)$  folytonos, kétváltozós függvényhez.

Mátrix-szorzatoknak a sorozata megfelelő határátmenet esetén egy határozott integrálhoz konvergál. Valóban :

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \mathbf{g}^{(n)*} f^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L g(x) f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \mathbf{G}^{(n)} f^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n G_{hk}^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L G(x, \xi) f(\xi) d\xi .$$

Fentiekből látható, hogy egy mátrix-szorzatokból álló sorozat limese nem a két limeszfüggvény szorzata, hanem azoknak szorzatintegrálja.

A mátrix-számítás univerzálítása abban is megnyilvánul, hogy nemcsak az integrál, hanem a derivált függvény is előállítható, mint egy mátrix-szorzat-sorozat limese. Ha ugyanis az  $f^{(n)}$  oszlopmátrixot, melynek elemei valamely, a 0 és  $L$  helyeken eltűnő, differenciálható  $f(x)$  függvénynek  $f(L/n), \dots, f((n-1)L/n)$  értékei, megszorozzuk a  $-n^2/L^2 \mathbf{C}_0^{(n)}$  kontinuuánszal, akkor

$$-\frac{n^2}{L^2} \mathbf{C}_0^{(n)} f^{(n)} = -\frac{n^2}{L^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f\left(\frac{L}{n}\right) \\ f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ f\left(\frac{(n-1)L}{n}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{L}{n}\right)^2} \begin{bmatrix} f\left(\frac{0}{n}\right) - 2f\left(\frac{L}{n}\right) + f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ f\left(\frac{L}{n}\right) - 2f\left(\frac{2L}{n}\right) + f\left(\frac{3L}{n}\right) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

adódik, a szorzatmátrix elemei tehát az  $f(x)$  függvénynek a második különbségi hányadosai. Ha már most  $f(x)$  kétszer folytonosan differenciálható, akkor a fenti értelemben a következő limeszreláció adódik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{L^2} \mathbf{C}_0^{(n)} f^{(n)} = - \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

**2. §.** Ezen előkészületek után a reciprokok mátrix és a Green-függvény közti fent említett analógia könnyen illusztrálható.

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$(1.2) \quad \frac{n}{L} \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \mathbf{q} \frac{L}{n}.$$

vagy részletesebben kiírva

$$\frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{\frac{L}{n}} = q_i \frac{L}{n} \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_0 = y_n = 0 \end{array} \right).$$

Ennek a megoldása:

$$(1.3) \quad \mathbf{y} = \frac{L}{n} \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{q} \frac{L}{n},$$

vagy a  $\mathbf{C}_0^{-1}$  inverznek ismert alakját felhasználva

$$y_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} q_j \frac{L}{n}, \quad \text{ahol} \quad g_{ij} = \begin{cases} \frac{L}{n} \frac{i(n-j)}{n} & \text{ha } i \leq j \\ \frac{L}{n} \frac{j(n-i)}{n} & \text{ha } i \geq j. \end{cases}$$

Ez az egyenlet (lásd: 2. fejezet, 2. §.) meghatározza egy  $x = 0$  és  $x = L$  közt kifeszített húr egyensúlyi alakját, midőn annak  $x = L/n, 2L/n, \dots, (n-1)L/n$  pontjai a  $q_1 L/n, q_2 L/n, \dots, q_{n-1} L/n$  transzverzális erőkkel vannak terhelve.

Ha most az (1.2) egyenletben, melyet az  $n^2/L^2 \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \mathbf{q}$  alakban is írhatunk, az  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet végrehajtjuk, akkor a

$$(1.4) \quad - \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x)$$

összefüggést, vagyis egy olyan húrnek a differenciálegyenletét nyerjük, melyre a  $q(x)$  megoszló terhelés hat. Ugyanennél a határátmenetnél azonban az  $L/n \mathbf{C}_0^{-1}$  inverz átmege a

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \frac{iL}{n} \rightarrow x \\ \frac{jL}{n} \rightarrow \xi}} \begin{cases} \frac{\frac{iL}{n} \left( L - \frac{jL}{n} \right)}{L} = \frac{x(L-\xi)}{L} & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{\frac{jL}{n} \left( L - \frac{iL}{n} \right)}{L} = \frac{\xi(L-x)}{L} & \text{ha } x \geq \xi \end{cases}$$

formulákba, azaz éppen az (1.4) differenciálegyenlet jól ismert Green-függvényébe (kifeszített húr hatásfüggvénye). Egyidejűleg (1.3) átmegy (1.1) figyelembevételével az

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi; \quad y(0) = y(L) = 0$$

megoldási formulába.

**3. §.** A kábelhidak szokásos elméletében másod- és negyedrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek lépnek fel, melyek változó inercianyomatékú merevítőtartó esetén változó együtthatókkal bírnak. Egyik megoldási módszer fő segédeszköze a

$$(1.5) \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda \varrho(x) = q(x)$$

differenciálegyenlethez és az

$$(1.6) \quad y(0) = y(L) = 0$$

kerületi feltételekhez tartozó  $G(x, \xi; \lambda)$  Green-függvény.  $\varrho(x)$  egy állandó faktortól eltekintve az  $x$  helyen mutatkozó inercianyomaték reciprokát jelenti, és  $L$  hosszúságú szimmetrikus híd esetén kielégíti a  $\varrho(x) = \varrho(L - x)$  relációt. Ebben az esetben a  $G(x, \xi; \lambda)$  Green-függvény a megfelelő

$$(1.7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda \varrho(x) y = 0$$

homogén egyenlet egyetlen partikuláris megoldása segítségével következőképpen szerkeszthető meg.

Legyen  $u(x; \lambda)$  az (1.7) differenciálegyenletnek az  $u(0; \lambda) = 0$ ,  $u'_x(0; \lambda) = 1$  kezdeti feltételek által egyértelműen meghatározott megoldása és tegyük fel, hogy  $u(L; \lambda) \neq 0$ . Ekkor a keresett Green-függvény

$$G(x, \xi; \lambda) = \begin{cases} \frac{u(x; \lambda) u(L - \xi; \lambda)}{u(L; \lambda)} & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{u(\xi; \lambda) u(L - x; \lambda)}{u(L; \lambda)} & \text{ha } x \geq \xi \end{cases}$$

és az (1.5) inhomogén egyenletnek az (1.6) kerületi feltételeket kielégítő megoldása

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi; \lambda) q(\xi) d\xi.$$

4. §. Jelen munkában kiépítjük a lánchidaknak egy elméletét, melyben kétszeresen szimmetrikus kontinuánssal bíró lineáris egyenletrendszerek kitüntetett szerepet játszanak. Ezek az egyenletek — mátrix-szimbólumokkal írva — a következő alakot veszik fel:

$$\mathbf{C} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{q}.$$

Itt a híd szimmetriája miatt  $a_k = a_{n-k}$ ,  $b_k = b_{n-k-1}$ . Az  $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}$  megoldás előállításához szükséges  $\mathbf{C}^{-1}$  inverz mátrix numerikus kiszámítására e helyen egy gyakorlatilag jól használható számítási utasítást adunk meg, mely kihasználja a reciproknak és a Green-függvény közti fentebb illusztrált analógiát.

Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - b_1 u_2 &= 0 \\ -b_1 u_1 + a_2 u_2 - b_2 u_3 &= 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -b_{n-3} u_{n-3} + a_{n-2} u_{n-2} - b_{n-2} u_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek az  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  kezdeti feltételek által egyértelműen meghatározott megoldását, felhasználva az alábbi rekurziós formulát:

$$(1.8) \quad u_{k+1} = \frac{a_k u_k - b_{k-1} u_{k-1}}{b_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$u_n = a_{n-1} u_{n-1} - b_{n-2} u_{n-2} \neq 0.$$

Ekkor a  $\mathbf{C}^{-1}$  inverz mátrixnak  $g_{ij}$  elemeit a

$$(1.9) \quad g_{ij} = \begin{cases} \frac{u_i u_{n-j}}{u_n} & \text{ha } i \leq j \\ \frac{u_j u_{n-i}}{u_n} & \text{ha } i \geq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

formulák adják és az adott inhomogén egyenletrendszer megoldása:

$$(1.10) \quad y_i = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

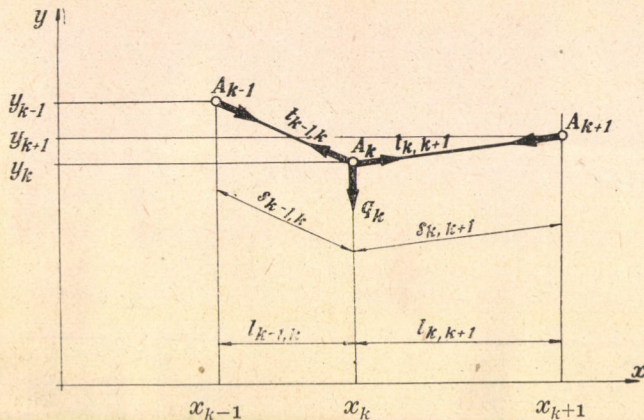


Az infinitezimális és a finit módszer kritikai összehasonlításánál figyelembe kell vennünk, hogy az (1.7) homogén differenciálegyenlet  $u(x; \lambda)$  megoldásának a tényleges előállítására variábilis  $\rho(x)$  esetén mindig végtelen processzusokat, pl.  $\lambda$  szerinti sorbafejtést igényel. Ezzel szemben a megfelelő homogén algebrai egyenletrendszernek a megoldásához csupán véges számú alpművelet elvégzése szükséges.

## 2. fejezet

### Függőleges erőkkel terhelt lánc egyensúlya

1. §. Ha egy (függőleges síkban levő)  $n$ -tagú  $A_0, A_1, \dots, A_n$  lánc (1. ábra), melynek  $k$ -adik csuklója,  $A_k, (x_k, y_k)$  koordinátákkal rendelkezik, és arra  $q_k$  függőleges erő hat, ezen erők hatása alatt egyensúlyban van, akkor a



1. ábra

$t_{k-1,k}$  feszültségek, a koordináták és az erők között az alábbi összefüggéseknek kell fennállniuk:

$$(2.1) \quad t_{k-1,k} \frac{x_{k-1} - x_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1} \frac{x_{k+1} - x_k}{s_{k,k+1}} = 0$$

$$(2.2) \quad t_{k-1,k} \frac{y_{k-1} - y_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1} \frac{y_{k+1} - y_k}{s_{k,k+1}} + q_k = 0.$$

A (2.1) egyenletekből következik, hogy a  $t_{k,k+1}$  húzófeszültségnek a  $t_{k,k+1} (x_{k+1} - x_k) / s_{k,k+1}$  vízszintes komponense az egész lánc mentén állandó, azaz

$$(2.3) \quad \frac{x_1 - x_0}{s_{01}} t_{01} = \frac{x_2 - x_1}{s_{12}} t_{12} = \dots = \frac{x_n - x_{n-1}}{s_{n-1,n}} t_{n-1,n} = h.$$

Ha a  $t_{k,k+1} / s_{k,k+1}$  mennyiségeket (2.3) segítségével a (2.2) egyenletekből elimináljuk, akkor

$$(2.4) \quad h \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) + q_k = 0$$



Ha a (2.8) egyenlet mindkét oldalát balról az  $e^* = [1, 1, \dots, 1]$  sorvektorral szorozzuk,

$$\frac{y_{01}}{l_{01}} + \frac{y_{n-1}}{l_{n-1,n}} = e^* C y = \frac{1}{h} e^* q = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{h}$$

adódik. Ez az egyenlet összefüggést állapít meg az össztehernek a horizontális feszültséghez való viszonya és a szélső láncrudak hajlásai között.

**2. §.** Ha az összes függőleges terhelő erők egyenlők és ekvidisztánsak, azaz

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = q \\ l_{01} = l_{12} = \dots = l_{n-1,n} = l,$$

akkor

$$(2.10) \quad C = \frac{1}{l} C_0 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = q e = q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

és (2.8), (2.10) szerint

$$y = \frac{l}{h} C_0^{-1} q e = \frac{lq}{2h} \begin{bmatrix} 1(n-1) \\ 2(n-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (n-1)1 \end{bmatrix},$$

vagyis valamennyi lánccsukló az

$$(2.11) \quad y = \frac{q}{2hl} x(nl - x)$$

parabolán fekszik.

Az  $(n-1)q$  össztehernek a  $h$  horizontális feszültséghez való viszonya ez esetben

$$\frac{(n-1)q}{h} = \frac{y_1 + y_{n-1}}{l} = \frac{2y_1}{l}.$$

A legmélyebb csukló, illetve csukló pár ordinátája (2.11) szerint

$$\frac{q}{h} \frac{n^2 - 1}{8} l \quad \text{páratlan } n\text{-re} \\ \frac{q}{h} \frac{n^2}{8} l \quad \text{páros } n\text{-re.}$$

Az 1. fejezetben kimutattuk, hogy a  $-\mathbf{C}_0 \mathbf{y}$  mátrix-szorzat elemei a

$$0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0$$

számsorozat második differenciáival egyenlők. Ha most (2.8)-ban az

$$nl = L; \mathbf{C} = \frac{n}{L} \mathbf{C}_0; q_k = q \left( \frac{kL}{n} \right) \cdot \frac{L}{n}$$

helyettesítéseket végezzük (itt  $q(x)$  jelentse az  $x$  helyen a hosszegységre eső megoszló terhelést), akkor az

$$\frac{n}{L} \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \frac{1}{h} \mathbf{q} \frac{L}{n}$$

egyenletet, és innen az  $n \rightarrow \infty$ ,  $l = L/n \rightarrow 0$  határátmenettel a jól ismert

$$(2.12) \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h} q(x)$$

differenciálegyenletet nyerjük, mely egy kötélnek a  $q(x)$  megoszló terhelés hatása alatt elfoglalt egyensúlyi alakját határozza meg.

### Függőleges erőkkel terhelt gerenda egyensúlya

**3. §.** Vizsgáljunk egy egyenes rugalmas gerendát, mely terheletlen állapotban az  $x$ -tengely  $(0, L)$  szakaszával esik egybe, és végpontjaiban támasztva van. Osszuk fel a gerendát a

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$$

abszcisszájú pontokkal az  $l_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k$  hosszúságú  $(x_k, x_{k+1})$  szakaszokra. Az  $(x_k, x_{k+1})$  szakasz keresztmetszetének inercianyomatéka legyen  $J_{k,k+1}$ , a gerendaanyag rugalmassági modulusa pedig legyen  $E$ .

Ha ez a gerenda az  $x_k$  osztáspontokban támadó transzverzális  $q_k$  erők hatása alatt egyensúlyban van, akkor az ezen pontokban fellépő  $m_k$  hajlítófeszültségek,  $v_k$  lehajlások és a  $q_k$  erők között az alábbi összefüggéseknek kell fennállaniuk:

$$(2.13) \quad \frac{v_{k+1} - v_k}{l_{k,k+1}} - \frac{v_k - v_{k-1}}{l_{k-1,k}} + \frac{1}{6E} \left\{ \frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}} m_{k+1} + 2 \left( \frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}} + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}} \right) m_k + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}} m_{k-1} \right\} = 0$$

$$(2.14) \quad \frac{m_{k+1} - m_k}{l_{k,k+1}} - \frac{m_k - m_{k-1}}{l_{k-1,k}} + q_k = 0$$



Ha a  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{C}$  mátrixok ezen kifejezéseit a (2.17) és (2.18) egyenletekbe helyettesítjük, akkor azok az

$$\frac{EJ}{l^2} \mathbf{C}_0 \mathbf{v} = \left( \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right) \mathbf{m}$$

$$\frac{1}{l} \mathbf{C}_0 \mathbf{m} = \mathbf{q}$$

egyszerűbb alakba mennek át.

Ha ezekben a mátrixegyenletekben az 1. fejezet 1. §-ban részletesen leírt határátmenetet elvégezzük  $l = L/n$ ,  $n \rightarrow \infty$  esetére, akkor az alábbi jól ismert differenciálegyenleteket nyerjük:<sup>2)</sup>

$$(2.19) \quad -EJ \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = m(x)$$

$$(2.20) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} = q(x) .$$

Ezek a  $q(x)$  transzverzális megoszló terhelés alatt álló gerenda  $v(x)$  lehajlását és  $m(x)$  hajlítófeszültségét határozzák meg.

### 3. fejezet

#### 1. §. Kéttágú lánchíd alapegyenletei és azoknak megoldása

A most tárgyalandó lánchíd két lánctagból, egy függesztőrúdból és egy támasztott gerendából áll.

A 2a. ábra azt az állapotot mutatja, midőn a láncot csupán a  $p$  holt teher (önsúly) terheli (vagyis az az erő, mely a gerenda-középpont és a támasztáspontok kollinearitásának fenntartásához szükséges). Ebben az állapotban a lánccsúcs egyensúlyi egyenlete (2.18) szerint

$$(3.1) \quad \frac{2}{l} y = \frac{1}{h} p .$$

Terheljük most a gerendát középpontjában  $q$  transzverzális erővel (élőteher, 2b. ábra). Ennek a tehernek valamely  $\tilde{q}$  részét a lánccsúcs hordja, és ennek folytán feszültségének  $h$  horizontális komponense  $H$ -ra változik. Ebben az állapotban az egyensúlyi egyenlet

$$(3.2) \quad \frac{2}{l} (y + v) = \frac{1}{H} (p + \tilde{q}) .$$

<sup>2)</sup> Lásd pl.: [6], 268—269 oldalak.

A (3.1) és 3.2) egyenletek kivonásával nyerjük a lánca alakváltozási egyenletét :

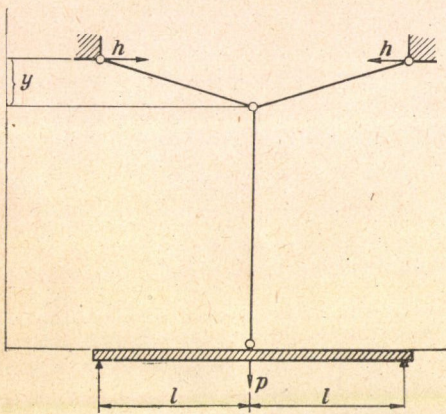
$$\frac{2}{l} v = \frac{1}{H} \left( \tilde{q} - \frac{H-h}{h} p \right).$$

A gerenda  $q - \tilde{q}$  terhet hordoz, tehát annak közepén a hajlítófeszültség:<sup>3)</sup>

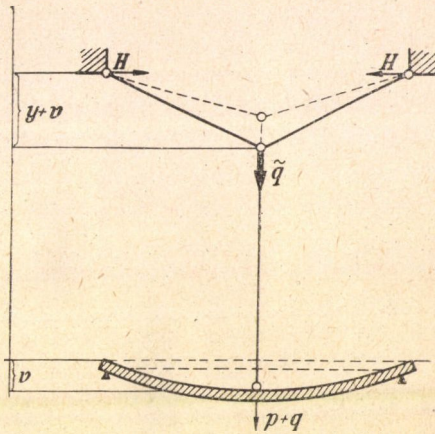
$$(3.4) \quad m = \frac{(q - \tilde{q}) l}{2}$$

és a lehajlás :

$$(3.5) \quad v = \frac{(q - \tilde{q}) l^3}{6 E J}.$$



2a. ábra



2b. ábra

Ha a (3.4) és (3.5) egyenletekből  $\tilde{q}$ -t elimináljuk, akkor a hajlítófeszültség, lehajlás és a terhelés között az alábbi összefüggés adódik :

$$(3.6) \quad \frac{2}{l} m + \frac{2H}{l} v = q - \frac{H-h}{h} p.$$

Ha azonban  $(q - \tilde{q})$ -t a (3.4) és (3.5) egyenletekből elimináljuk, akkor a hajlítófeszültség és a lehajlás közt fennálló

$$(3.7) \quad \frac{2}{l} v = \frac{4l}{6 E J} m$$

összefüggést nyerjük. Ha már most  $v$ -vek innen származó értékét (3.6)-ba helyettesítjük, akkor a lánchíd „feszültségi egyenletéhez” jutunk :

$$(3.8) \quad \left( \frac{2}{l} + H \frac{4l}{6 E J} \right) m = q - \frac{H-h}{h} p.$$

<sup>3)</sup> Lásd pl.: [5], 680—681 oldalak.

Innen a hajlítófeszültség explicit formulája :

$$(3.9) \quad m = \frac{q - \frac{H-h}{h} p}{\frac{2}{l} + H \frac{4l}{6EJ}} .$$

A hajlítófeszültségnek a lánc közreműködése folytán bekövetkező csökkenése világosan felismerhető, ha a (3.9) egyenlettel adott értéket a (3.4) egyenletből (a lánc hiányában) adódó

$$m = \frac{ql}{2}$$

értékkel összehasonlítjuk.

Ha végül a (3.7)-ből adódó  $m$  értéket (3.6)-ba helyettesítjük, akkor a lánchíd „alakváltozási egyenlete” adódik :

$$(3.10) \quad \left( \frac{6EJ}{l^3} + \frac{2H}{l} \right) v = q - \frac{H-h}{h} p$$

és innen a lehajlásnak az explicit formulája

$$(3.11) \quad v = \frac{q - \frac{H-h}{h} p}{\frac{6EJ}{l^3} + \frac{2H}{l}} .$$

A lehajlásnak a lánc közreműködésétől származó csökkenését ezen formulának (3.5)-tel való összehasonlítása mutatja.

A lehajlásnak (3.11) formulája még a következő alakban is írható :

$$(3.12) \quad v = \frac{1}{H} \left\{ \left( \frac{2}{l} \right)^{-1} - \left( \frac{2}{l} + H \frac{4l}{6EJ} \right)^{-1} \right\} \left( q - \frac{H-h}{h} p \right) ,$$

mely később különösen célszerűnek és általánosíthatónak fog bizonyulni.

**2. §.** Összes formuláinkban előfordul a megváltozott és egyelőre ismeretlen  $H$  horizontális feszültség. Ennek a kiszámítása céljából a lánctagok nyúlási viszonyait kell figyelembe venni.

Mindkét lánctag relatív nyúlása a középső csuklónak  $v$  vertikális elmozdulása folytán (magasabb rendű kis mennyiségek elhanyagolása mellett)

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sqrt{l^2 + (y+v)^2} - \sqrt{l^2 + y^2}}{\sqrt{l^2 + y^2}} \approx \frac{yv}{s^2} ,$$

vagy  $y$ -nak (3.1)-ből eredő értékét felhasználva :

$$(3.13) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{plv}{2hs^2} .$$



Másrészt a teljes feszültségnövekedés a lánctagokban  $(H - h)s/l$ , tehát a nyúlási egyenlet :

$$(3.14) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{H - h}{EF} \frac{s}{l}$$

ahol  $F$  a tagok keresztmetszetének területe. A (3.13) és (3.14) egyenletekből

$$(3.15) \quad v = \frac{h(H - h)}{p EF} 2 \frac{s^3}{l^2}$$

következik.

Ha végül  $v$ -t a (3.11)–(3.15) egyenletekből elimináljuk, akkor  $H$  meghatározására szolgáló fent említett másodfokú egyenletet nyerjük :

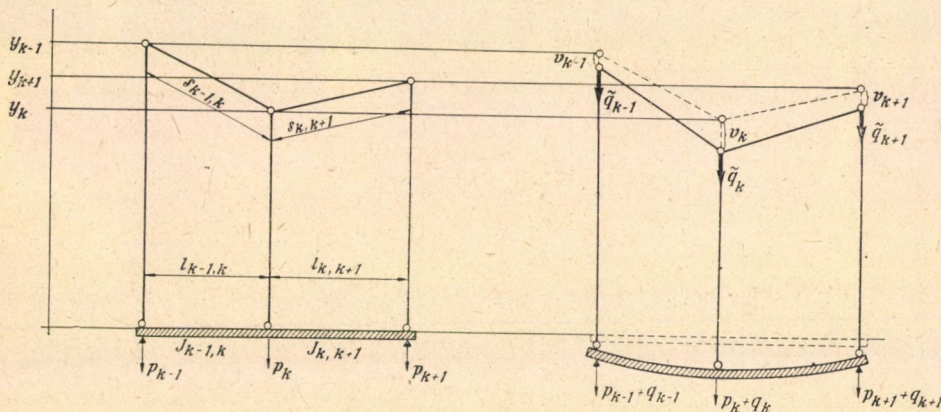
$$(3.16) \quad \frac{q - \frac{H - h}{h} p}{6 \frac{EJ}{l^3} + 2 \frac{H}{l}} = \frac{h(H - h)}{p EF} 2 \frac{s^3}{l^2} .$$

Ennek az egyenletnek pozitív  $q$  esetén mindig pontosan egy olyan  $H$  gyöke van, mely nagyobb, mint  $h$ .

#### 4. fejezet

##### Egy $n$ -tagú lánchíd mátrixegyenletei és azok megoldása

Vizsgáljunk most egy olyan lánchidat, mely  $n$  lánctagból,  $n - 1$  függesztőrúdból és egy végpontjain támasztott gerendából áll (3. ábra). Jelöljük



3. ábra

$l_{01}, l_{12}, \dots, l_{n-1, n}$  a gerendaszakaszok hosszát ;  
 $J_{01}, J_{12}, \dots, J_{n-1, n}$  a keresztmetszetek inercianyomatékait ;  
 $s_{01}, s_{12}, \dots, s_{n-1, n}$  a lánctagok hosszát ;  
 $y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n = 0$  a lánccsuklók ordinátáit ;  
 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  a gerendacsomópontok kollinearitásának fenntartásához szükséges, az egyes lánccsuklókra holt teherként ható erőket.

A híd szimmetriája folytán fennállnak az alábbi egyenletek :

$$\begin{aligned}
 l_{k-1, k} &= l_{n-k, n-k+1} , & p_k &= p_{n-k} , \\
 J_{k-1, k} &= J_{n-k, n-k+1} , & y_k &= y_{n-k} , \\
 s_{k-1, k} &= s_{n-k, n-k+1} .
 \end{aligned}$$

Ha a lánccsukló holt teher hatása alatt egyensúlyban van, akkor a (2.8) egyenlet szerint fenn kell állni a

$$(4.1) \quad \mathbf{C} \mathbf{y} = \frac{1}{h} \mathbf{p}$$

egyenletnek, ahol  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{y}$  a (2.7)-ben bevezetett mátrixokat,  $\mathbf{p}$  a  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  holt terhek mátrixát és  $h$  a kezdeti horizontálfeszültséget jelentik.

Legyen ezek után a gerenda (merevítő tartó) csomópontjaiban a

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

vertikális erőkkel (élő teher) terhelve.

A lánccsukló ennek a tehernek egy bizonyos  $\tilde{\mathbf{q}}$  részét fogja hordozni, és ennek folytán csuklóit vertikális elmozdulásokat szenvednek, melyek egy  $\mathbf{v}$  oszlop-mátrixba foglalhatók össze, továbbá a lánccsuklók feszültség horizontális komponense  $H$ -ra fog változni.

Ebben az állapotban a lánccsuklók egyensúlyi egyenlete a következő :

$$(4.2) \quad \mathbf{C}(\mathbf{y} + \mathbf{v}) = \frac{1}{H}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}}) .$$

A (4.1) és (4.2) egyenletek kivonásával nyerjük a lánccsuklók alakváltozási egyenletét :

$$(4.3) \quad \mathbf{C} \mathbf{v} = \frac{1}{H} \left( \tilde{\mathbf{q}} - \frac{H-h}{h} \mathbf{p} \right) .$$

Alkalmazzuk már most a gerenda számára a 2. fejezetben levezetett egyensúlyi egyenleteket.

A gerenda a  $\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}$  terhet hordozza és az innen származó  $\mathbf{m}$  hajlítófeszültségi mátrixot (2.18) szerint az alábbi egyenlet határozza meg:

$$(4.4) \quad \mathbf{C} \mathbf{m} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} .$$

A  $\mathbf{v}$  lehajlási mátrix és az  $\mathbf{m}$  hajlítófeszültségi mátrix közt (2.17) szerint fennáll a következő egyenlet:

$$(4.5) \quad \mathbf{C} \mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{m} .$$

Ha  $\tilde{\mathbf{q}}$ -t a (4.3) és (4.4) egyenletekből elimináljuk, akkor a következő összefüggés adódik a hajlítófeszültség, a lehajlás és a terhelés között:

$$(4.6) \quad \mathbf{C}(\mathbf{m} + H \mathbf{v}) = \mathbf{q} - \frac{H - h}{h} \mathbf{p} .$$

Ha most  $\mathbf{C} \mathbf{v}$ -nek (4.5)-ből adódó értékét (4.6)-ba helyettesítjük, akkor a *lánchíd feszültségi egyenletét* nyerjük:

$$(4.8) \quad (\mathbf{C} + H \mathbf{K}) \mathbf{m} = \mathbf{q} - \frac{H - h}{h} \mathbf{p} .$$

Innen a hajlítófeszültség explicit formulája:

$$(4.9) \quad \mathbf{m} = (\mathbf{C} + H \mathbf{K})^{-1} \left( \mathbf{q} - \frac{H - h}{h} \mathbf{p} \right) .$$

Ha végül  $\mathbf{m}$ -nek (4.5)-ből adódó értékét:  $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v}$ -t (4.6)-ba helyettesítjük, akkor a *lánchíd alakváltozási egyenletéhez* jutunk:

$$(4.10) \quad (\mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} + H \mathbf{C}) \mathbf{v} = \mathbf{q} - \frac{H - h}{h} \mathbf{p} .$$

A  $\mathbf{v}$  együttható mátrixának a kiszámítása, tehát látszólag az invertálása is rendkívül nehézkes és bonyolult. Azonban egy alkalmas identitás felhasználásával a (3.12)-vel analóg megoldási formulát fogunk tudni megadni. E mátrixidentitás a következő:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} (\mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} + H \mathbf{C})^{-1} &= \{ \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{C} + H \mathbf{K}) \}^{-1} = \\ &= (\mathbf{C} + H \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} = H^{-1} \{ \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{C} + H \mathbf{K})^{-1} \} . \end{aligned}$$

A lehajlásnak explicit, gyakorlati számításra alkalmas formulája tehát a következő:

$$(4.12) \quad \mathbf{v} = H^{-1} \{ \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{C} + H \mathbf{K})^{-1} \} \left( \mathbf{q} - \frac{H - h}{h} \mathbf{p} \right) .$$

A (4.9) és (4.12) formulák összehasonlításából látható, hogy az  $m$  hajlítófeszültségi mátrix kiszámítása után a  $v$  lehajlási mátrixnak a kiszámítása feltűnően egyszerű feladat, mert az ennek folyamán szükségessé váló  $C^{-1}$  reciprok mátrixot a (2.9) képlet explicit alakban adja meg.

Ha a jelen paragrafusban levezetett formulákat egyetlen függesztőrúddal bíró lánchídra alkalmazzuk, akkor az összes mátrixok skalárokra redukálódnak és pedig a híd szimmetriája folytán

$$C = \frac{2}{l} ; K = \frac{4}{6} \frac{l}{EJ}$$

lesz. Ez esetben a (4.1)—(4.12) egyenletek a (3.1)—(3.12) egyenletekbe mennek át. Ezzel kimutattuk, hogy az  $n$ -tagú lánchíd egyenletei a 3. fejezet elemi, skalár egyenleteiből, megfelelő mátrixok helyettesítésével származtathatók.

Analógia mutatkozik a  $H$  meghatározására szolgáló egyenlet felállításánál is.

Ha a  $k$ -edik lánccsukló koordinátái terhelés előtt, illetve után  $(x_k, y_k)$ , illetve  $(x_k + u_k ; y_k + v_k)$ , akkor  $s_{k,k+1}$ -nek  $\Delta s_{k,k+1}$  növekedését az

$$(s_{k,k+1} + \Delta s_{k,k+1})^2 - s_{k,k+1}^2 = \\ = (x_{k+1} + u_{k+1} - x_k - u_k)^2 + (y_{k+1} + v_{k+1} - y_k - v_k)^2 - (x_{k+1} - x_k)^2 - (y_{k+1} - y_k)^2$$

egyenlet határozza meg. Innen — magasabbrendű kis mennyiségek elhanyagolásával —

$$s_{k,k+1} \Delta s_{k,k+1} = (x_{k+1} - x_k)(u_{k+1} - u_k) + (y_{k+1} - y_k)(v_{k+1} - v_k)$$

adódik.

Ha ezeket az egyenleteket ( $l_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k$ -val való osztás után)  $k = 0$ -tól  $k = n - 1$ -ig összegezzük, akkor

$$(4.13) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1} \Delta s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (v_{k+1} - v_k)$$

adódik.

Ha a lánccsukló rögzítettek, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = 0.$$

Továbbá (4.1)-re való tekintettel nyerjük, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right) v_k = (C y)^* v = \frac{1}{h} p^* v.$$

Az  $s_{k,k+1}$  hosszúságú lánccsukló nyúlási egyenlete:

$$\frac{\Delta s_{k,k+1}}{s_{k,k+1}} = \frac{H - h}{EF} \frac{s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$$

Ezen értékeknek a (4.13) egyenletbe való helyettesítése után

$$\mathbf{p}^* \mathbf{v} = \frac{(H-h)h}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2},$$

vagy a (4.12) egyenlet figyelembevételével

$$(4.14) \quad \mathbf{p}^* \{ \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{C} + H\mathbf{K})^{-1} \} \left( \mathbf{q} - \frac{H-h}{h} \mathbf{p} \right) = \frac{H(H-h)h}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2}$$

adódik.

Ez az  $n$ -edfokú algebrai egyenlet határozza meg a  $H$  horizontális feszültséget, mint a hídkonstánsoknak és a terhelésnek a függvényét.

## 5. fejezet

### Végtelen sok tagú lánchíd (kábelhíd) differenciálegyenlete és annak megoldása

Vizsgáljuk most az  $n$ -tagú lánchídból  $n \rightarrow \infty$  esetben keletkező függőhidat, mely egy kábelből, egy függesztőmembránból és egy  $L$  hosszúságú támasztott gerendából áll.

Jelöljük

a keresztmetszet inercianyomatékát az  $x$  helyen  $J(x)$ -szel;

a kábel ordinátáját az  $x$  helyen  $y(x)$ -szel;

a gerenda egyenes alakjának fenntartásához szükséges, holt teherként ható, megoszló terhelést az  $x$  helyen és a hosszegységre vonatkoztatva  $p(x)$ -szel.

A híd szimmetriája folytán fennállnak az alábbi egyenletek:

$$J(x) = J(L-x), \quad y(x) = y(L-x), \quad p(x) = p(L-x).$$

Ha a kábel a holtteher hatása alatt egyensúlyban van, akkor (2.12) szerint fenn kell állnia a

$$(5.1) \quad -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{h} p(x)$$

differenciálegyenletnek.

Terheljük most a gerendát  $q(x)$  megoszló vertikális terheléssel (élő teher). A kábel a tehernek egy bizonyos  $\tilde{q}(x)$  részét fogja hordani, ennek folytán annak pontjai  $v(x)$  vertikális elmozdulást szenvednek és a  $h$  horizontális feszültség  $H$ -ra fog változni. Ebben az állapotban az egyensúlyi egyenlet:

$$(5.2) \quad -\frac{d^2}{dx^2} \{ y(x) + v(x) \} = \frac{1}{H} \{ p(x) + \tilde{q}(x) \}.$$

(5.1)-ből és (5.2)-ből következik :

$$(5.3) \quad -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{H} \left\{ \tilde{q}(x) - \frac{H-h}{h} p(x) \right\}.$$

A gerenda a  $q(x) - \tilde{q}(x)$  terhet hordozza és az ennek folytán benne keletkező  $m(x)$  hajlító feszültséget (2.20) szerint az alábbi differenciálegyenlet határozza meg :

$$(5.4) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} = q(x) - \tilde{q}(x).$$

A  $v(x)$  lehajlás és az  $m(x)$  hajlítófeszültség között (2.19) szerint fennáll a

$$(5.5) \quad -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ(x)} m(x)$$

differenciálegyenlet.

Ha (5.3)-ból és (5.4)-ből  $\tilde{q}(x)$ -et elimináljuk, akkor

$$(5.6) \quad -\frac{d^2}{dx^2} \{m(x) + Hv(x)\} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x).$$

adódik. Ha  $d^2 v(x)/dx^2$ -nek (5.5)-ből adódó értékét (5.6)-ba helyettesítjük, akkor a kábelhíd feszültségi (differenciál-)egyenletét nyerjük :

$$(5.7) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} + \frac{H}{EJ(x)} m(x) = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x).$$

A támasztásnak megfelelő kerületi feltételek :

$$(5.8) \quad m(0) = m(L) = 0.$$

Ha továbbá  $m(x)$ -nek (5.5)-ből adódó értékét (5.6)-ba helyettesítjük, akkor a lehajlás számára a jól ismert Melan-féle differenciálegyenletet nyerjük :

$$(5.9) \quad EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - H \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x).$$

Ezt a differenciálegyenletet az alábbi kerületi feltételek mellett kell megoldani :

$$(5.10) \quad v(0) = v''(0) = v(L) = v''(L) = 0.$$

A függőhidakkal foglalkozó dolgozatok többségében a Melan-féle differenciálegyenlet direkt tárgyalását találjuk. Az előző paragrafus eredményei, különösen az ottani (4.12) inverziós formula közelfekvővé teszik, hogy a Melan-féle differenciálegyenletet a Green-függvény segítségével a feszültségi egyenletre vezessük vissza.

Ebből a célból a következőképpen járhatunk el. Legyen  $G(x, \xi; \lambda)$  a

$$(5.11) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\lambda}{EJ(x)} z = 0$$

differenciálegyenletet és a

$$(5.12) \quad z(0) = z(L) = 0$$

kerületi feltételeket kielégítő Green-függvény. Ha átmenetileg bevezetjük az

$$r(x) = q(x) - \frac{H - h}{h} p(x)$$

rövidebb jelölést, akkor a fenti Green-függvény segítségével — mely most az inverz mátrix szerepét veszi át — az  $m(x)$  hajlítófeszültség számára az (5.7) feszültségi egyenletből a következő explicit kifejezést nyerjük :

$$(5.13) \quad -m(x) = \int_0^L G(x, \xi; H) r(\xi) d\xi .$$

A  $v(x)$  lehajlás azonban (5.5) szerint ugyancsak az (5.11) differenciálegyenletnek felel meg  $\lambda = 0$  paraméter érték mellett és ugyanazoknak a (5.12) kerületi feltételeknek, következésképpen a  $G(x, \xi; 0)$  függvény segítségével explicit előállítható :

$$-v(x) = \int_0^L G(x, \xi; 0) \frac{1}{EJ(\xi)} m(\xi) d\xi .$$

Ha ide  $m(x)$ -nek (5.13) alatti értékét helyettesítjük, akkor

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} \left\{ \int_0^L G(t, \xi; H) r(\xi) d\xi \right\} dt = \\ &= \int_0^L \left\{ \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} G(t, \xi; H) dt \right\} r(\xi) d\xi \end{aligned}$$

adódik.

Az utolsó zárójelben fellépő „iterált” Green-függvény azonban egy HILBERT-től származó azonosság segítségével a

$$H^{-1} \{G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H)\}$$

alakra hozható, mely lényegében nem egyéb, mint a (4.11) mátrixformula infinitezimális analogonja.<sup>4)</sup>

<sup>4)</sup> Lásd : [4], 21. oldal.

Eszerint a Melan-féle differenciálegyenlet megoldása a  $G(x, \xi; \lambda)$  Green-függvény segítségével a következő módon állítható elő:

$$(5.14) \quad v(x) = \frac{1}{H} \int_0^L \{G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H)\} \left\{ q(\xi) - \frac{H-h}{h} p(\xi) \right\} d\xi .$$

Könnyen verifikálható, hogy a KÁRMÁN<sup>5)</sup>, BLEICH [2] és mások által megadott megoldási formulák, mint speciális esetek (5.14)-ben foglalhatók.

## 6. fejezet

### Az egyenletes függőhíd

Összes eddigi eredményeink általánosan érvényesek lánchidakra, melyeknél az egyes gerendaszakaszok hossza és keresztmetszetének inercianyomatéka tetszőlegesen előírtak, valamint kábelhidakra, melyeknél a keresztmetszet inercianyomatéka tetszőlegesen változó.

A jelen fejezetben egyenletes függőhidakkal foglalkozunk, melyeknél a merevítő tartó keresztmetszetének inercianyomatéka állandó, és — lánchíd esetében — a függesztőrudak ekvidisztánsok.

A rendkívüli egyszerűsödések, melyek ilyen hidak matematikai vizsgálatánál mutatkoznak, két körülményre vezethetők vissza.

Először is ebben az esetben a számításnál szereplő mindkét mátrix, **C** és **K** egyszerű függvénye a (dimenziótlan)  $\mathbf{C}_0$  kontinuuánsnak. Továbbá ennek a  $\mathbf{C}_0$  kontinuuánsnak (valamint  $\mathbf{C}_0$  bármely  $\varphi(\mathbf{C}_0)$  függvényének) mind sajátértékei, mind pedig sajátmátrixai explicit ismeretesek. Hasonló a helyzet egyenletes kábelhídnál is, mert a megfelelő  $d^2z/dx^2 - \lambda z = 0$  differenciálegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei explicit ismeretesek.

Ha egy egyenletes lánchídnak  $n$  tagja, tehát  $n - 1$  függesztőrúdja van, akkor ahhoz  $n - 1$ -edrendű kontinuuáns tartozik. Ennek a kontinuuánsnak a sajátértékei:

$$(6.1) \quad \lambda_1 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n}; \lambda_2 = 4 \sin^2 \frac{2\pi}{2n}; \dots; \lambda_{n-1} = 4 \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

és sajátmátrixai (oszlopmátrix alakban írva)

$$(6.2) \quad u_1 = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \dots, \quad u_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)^2\pi}{n} \end{bmatrix} .$$

<sup>5)</sup> Lásd pl.: [5], 317—319. oldalak.



Ezen sajátmátrixoknak a rendszere ortogonális és normált. Ezek a sajátmátrixok eléget tesznek a

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

egyenleteknek. Innen látható, hogy a

$$(6.3) \quad \mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{u}_k$$

inhomogén lineáris egyenletrendszernek a megoldása rögtön felírható a következő alakban:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{u}_k.$$

Ha azonban a (6.3) egyenletrendszer jobboldalán a sajátmátrixoknak valamely

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

alakú lineáris kombinációja áll, akkor a megoldás nyilván additive tevődik össze azokból a megoldásokból, melyek az egyes sajátmátrixokhoz tartoznak, azaz

$$\mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Ilyenformán az a kérdés vetődik fel, vajon lehet-e bármely  $\mathbf{b}$  oszlop-mátrixot, mely a  $\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenlet jobboldalán áll, az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$  sajátmátrixok lineáris kombinációjaként előállítani? Ez a kérdés a  $\mathbf{C}_0$  kontinuanással kapcsolatban felvetve egyenértékű egy oszlop-mátrix harmonikus analízisének a tanulmányozásával.

Valóban, miként valamely (0 és  $\pi$  helyen eltűnő)  $f(x)$  függvény „végtelen” harmonikus analízisének azt a  $\sin x, \sin 2x, \dots$  függvények lineáris kombinációjaként

$$f(x) = \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \dots$$

alakban állítjuk elő, éppúgy valamely  $\mathbf{b}$  oszlop-mátrix „véges” harmonikus analízisének azt az

$$\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix}$$

sajátmátrixok lineáris kombinációjaként

$$(6.4) \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

alakban állítjuk elő. (A  $\mathbf{C}_0$  kontinuáns saját mátrixai teljesen megfelelnek a sinus-függvényeknek, hiszen képei nem egyebek, mint  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(n-1)x$  képeinek húrpoligonjai ekvidisztáns abszcisszákkal.)

A fenti előállítás lehetősége az  $\mathbf{u}_k$  saját mátrixok rendszerének teljességéből következik.

A  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$  koeficiensek kiszámításánál — éppúgy, mint végtelen Fourier-sor esetében — a saját mátrixok ortogonalitását és normált-ságát használjuk fel. Avégből ugyanis, hogy a (6.4) kifejtésben a  $\beta_k$  együtt-hatót megkapjuk, a (6.4) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk balról  $\mathbf{u}_k^*$ -val. Az ortogonalitás következtében a jobboldalon valamennyi skaláris szorzat eltűnik, egyetlennek,  $\mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_k$ -nak a kivételével. Ez a szorzat azonban a normáltság miatt 1-gyel egyenlő. Ily módon

$$\beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{b}$$

adódik.

A  $\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenlet megoldása tehát következésképpen végezhető: Számítsuk ki a  $\mathbf{b}$  oszlop mátrix  $\beta_k$  „véges” Fourier-együtthatóit a következő formula segítségével:

$$(6.5) \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{b} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left( b_1 \sin \frac{4\pi}{n} + b_2 \sin \frac{2k\pi}{n} + \dots + b_{n-1} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right).$$

Ekkor az adott egyenlet megoldása:

$$(6.6) \quad \mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Mielőtt ezt a módszert az egyenletes lánchíd alapegyenleteinek megoldására felhasználnánk, még egy kiegészítést kell közbeiktatnunk.

Az alapegyenletekben nem a  $\mathbf{C}_0$  mátrix, hanem — miként említettük — ennek a mátrixnak valamely  $\varphi(\mathbf{C}_0)$  függvénye. A  $\varphi(\mathbf{C}_0)$  mátrixnak azonban a mátrixelméletnek egy közismert tétele szerint (lásd pl.: [7])  $\mathbf{C}_0$ -lal meg-egyező saját mátrixai vannak, és sajátértékei:  $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \dots, \varphi(\lambda_{n-1})$ . A

$$(6.7) \quad \varphi(\mathbf{C}_0) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakú egyenlet megoldásánál tehát a (6.6) formulában a  $\lambda_k$  nevezőket  $\varphi(\lambda_k)$ -val kell helyettesíteni, azaz

$$(6.8) \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\varphi(\lambda_k)} \mathbf{u}_k.$$

A (6.6) valamint (6.8) formulák az ismeretlen  $\mathbf{x}$  oszlop mátrixnak véges Fourier-kifejtését szolgáltatják.

Ezen előkészületek lehetővé teszik, hogy egy egyenletes lánchíd alap-egyenleteit a kontinuánsmátrix sajátértékei és sajátmátrixai segítségével oldjuk meg.

Egyenletes lánchíd esetén ugyanis

$$l_{01} = l_{12} = \dots = l_{n-1,n} = l; \quad J_{01} = J_{12} = \dots = J_{n-1,n} = J,$$

továbbá többnyire

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = p.$$

Ebben az esetben tehát

$$(6.9) \quad \mathbf{C} = \frac{1}{l} \mathbf{C}_0; \quad \mathbf{K} = \frac{l}{EJ} \left( \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right), \quad \mathbf{p} = p \mathbf{e}.$$

Ezeknek felhasználásával az egyenletes lánchídnek (4.8) feszültségi egyenlete a következő alakot ölti:

$$\left\{ \mathbf{C}_0 + \frac{Hl^2}{EJ} \left( \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right) \right\} \frac{\mathbf{m}}{l} = \mathbf{q} - \frac{H-h}{h} p \mathbf{e}.$$

Az egyenlet koefficiensmátrixa tehát ez esetben  $\varphi(\mathbf{C}_0)$ , ahol

$$\varphi(x) = x + \frac{Hl^2}{EJ} \left( 1 - \frac{x}{6} \right).$$

Avégből, hogy ezen egyenlet  $\mathbf{m}$  ismeretlenét, mint a  $H$  paraméter explicit függvényét előállíthassuk, előbb a  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{e}$  oszlopmátrixokon harmonikus analízist kell végrehajtanunk. (6.5) felhasználásával azt találjuk, hogy

$$(6.10) \quad \mathbf{q} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}; \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{q}$$

$$\mathbf{e} = \varepsilon_1 \mathbf{u}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}; \quad \varepsilon_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n}; \quad \varepsilon_{2k} = 0.$$

Ezen értékeket felhasználva, a feszültségi egyenlet explicit megoldását a következő alakban nyerjük:

$$(6.11) \quad \mathbf{m} = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{\lambda_k + \frac{Hl^2}{EJ} \left( 1 - \frac{\lambda_k}{6} \right)} \mathbf{u}_k.$$

A (4.10) alakváltozási egyenlet a fentebb bevezetett jelölésekkel így írható:

$$\left\{ \frac{EJ}{l^3} \mathbf{C}_0 \left( \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right)^{-1} \mathbf{C}_0 + \frac{H}{l} \mathbf{C}_0 \right\} \mathbf{v} = \mathbf{q} - \frac{H-h}{h} p \mathbf{e}.$$

Az egyenlet együttható mátrixa most  $\psi(\mathbf{C}_0)$ , ahol

$$\psi(x) = \frac{EJ}{l^3} \frac{x^2}{1 - \frac{1}{6}x} + \frac{H}{l}x$$

és annak explicit megoldása a (6.10) koefficiensek felhasználásával

$$(6.12) \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{\frac{EJ}{l^3} \frac{\lambda_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{6}} + \frac{H}{l} \lambda_k} \mathbf{u}_k.$$

Az  $\chi$  relatív feszültségváltozást meghatározó egyenlet felállítása céljából (4.14)-ben  $\mathbf{p}^* = p \mathbf{e}^*$ ,  $H - h = \chi h$ ,  $l_{k,k+1} = l$  helyettesítéseket végezzük, továbbá  $\mathbf{v}$ -nek (6.12) értékét is behelyettesítjük. Ily módon

$$(6.13) \quad \sum_{k=1,3,5} \frac{p \varepsilon_k \beta_k - p^2 \varepsilon_k^2 \chi}{\frac{EJ}{l^2 h} \frac{\lambda_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{6}} + (1 + \chi) \lambda_k} = \frac{h^3 \chi}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{s_{k,k+1}}{l} \right)^3$$

adódik. (A baloldali összegben a páros indexű tagok hiányzanak, mert valamennyi  $\varepsilon_{2k}$  eltűnik.) A  $(0, \infty)$  intervallumban ezen egyenlet bal oldala csökkenő, jobb oldala pedig növekvő függvénye  $\chi$ -nek. Ennélfogva egy olyan tehereloszlás mellett, mely  $\chi = 0$ -nál a baloldalt pozitívvá teszi, a (6.13) egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van. Ha ez a  $\chi$  gyök ki van számítva, akkor  $H = h(1 + \chi)$ .

Ha a  $\mathbf{v}$  lehajlási mátrix (6.12) véges Fourier-sorában rögzített  $L$  mellett az  $n \rightarrow \infty$ ,  $l = L/n \rightarrow 0$  határátmenetet végrehajtjuk, akkor az egyenletes kábelhíd  $v(x)$  lehajlási függvénye számára a következő, már KÁRMÁN, BLEICH és mások által megadott végtelen Fourier-sort nyerjük:

$$(6.14) \quad v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{EJ \left( \frac{k\pi}{L} \right)^4 + H \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2} \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Itt

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

és

$$\varepsilon_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}; \quad \varepsilon_{2k} = 0.$$

Ugyanezen határátmenettel (6.13)-ból a  $\chi$  relatív feszültségnövekedést meghatározó transzcendens egyenletet az alábbi alakban nyerjük

$$\sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{2}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^3} \frac{p\beta_k - p^2\varepsilon_k\chi}{\frac{EJ}{h} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + (1+\chi)} = \frac{h^3\chi}{EF} \int_0^L \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx.$$

Itt  $ds$  a holt tehernek megfelelő kábelgörbe ívelemét jelenti az  $x$  helyen.

(Beérkezett : 1957. II. 25.)

#### IRODALOM

- [1] EGERVÁRY, E.: „Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebriicken mit Hilfe der Matrizenrechnung.” *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau (Zürich)*.
- [2] BLEICH, H. H.: *Die Berechnung verankerter Hängebrücken*. Springer, Wien, 1935.
- [3] EGERVÁRY J.: „A mátrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 9—23.
- [4] HILBERT, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Teubner, Leipzig, 1912.
- [5] HÜTTE, *des Ingenieurs Taschenbuch, Band I*. Ernst, Berlin, 1949. (27., neubearbeitete Auflage).
- [6] KÁRMÁN, TH.—BIOT, M.: *Mathematical methods in engineering*. McGraw-Hill, New York, 1940.
- [7] MAC DUFFEE, C. C.: *Vectors and matrices*. Mathematical Association of America, Menasha (Wisc.), 1943.

### ОБОСНОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВИСЯЩИХ МОСТОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МАТРИЦ\*)

J. EGERVÁRY

#### Резюме

В некоторых новых работах, относящихся к теории висящих мостов, мы встречаемся с тенденцией ободить инфинитезимальных действий. При этом производные заменяются отношением приращения функции к приращению независимой переменной, непрерывно распределяющиеся живые нагрузки — концентрированными силами (см. [2]).

В настоящей работе мы строим конечную теорию цепных мостов. Для подходящего рассмотрения линейных уравнений, получающихся от последовательного применения уравнений СЛАВЕРУОН теории стержня и от замены возможно встречающейся непрерывно распределяющейся живой нагрузки концентрированными силами, используются вспомогательные средства теории матриц. В качестве основного уравнения цепных мостов получается такое матричное уравнение, в котором неизвестным является матрица прогибания укрепляющей опоры. Для решения этого матричного урав-

\*) Содержание этой работы тождественно с работой на немецком языке [1] автора.

нения необходимо лишь обращение континуантных матриц, легко выполняемая и на машина. Схема вычисления также содержится в работе. В случае цепного моста с  $n-1$  подвесным стержнем для роста горизонтального напряжения получается уравнение  $n$ -ого порядка.

Уже упомянутое матричное уравнение в случае такого предельного перехода, когда число подвесных стержней растёт до бесконечности, переходит в хорошо известное дифференциальное уравнение MELAN висящих мостов.

Последняя глава содержит упрощения, имеющие место в случае равномерных цепных мостов.

## BEGRÜNDUNG UND DARSTELLUNG EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER HÄNGEBRÜCKEN MIT HILFE DER MATRIZENRECHNUNG\*)

J. EGERVÁRY

### Zusammenfassung

Mehrere neuere Aufsätze über die Berechnung der Hängebrücken lassen eine Tendenz erkennen, infinitesimalen Operationen zu vermeiden. Die Differentialquotienten werden dabei durch Differenzenquotienten, die stetig verteilte lebende Last durch Knotenlaste ersetzt. (Vgl. [2].)

In der vorliegenden Arbeit wird eine finite Theorie der Kettenbrücken aufgebaut. Bei konsequenter Verwendung der Clapeyronschen Gleichungen der Balkentheorie und bei Annäherung der eventuell stetig verteilten lebenden Last durch Einzelkräfte (Knotenlaste) werden zur sachgemässen Behandlung der auf diese Weise entstehenden linearen Gleichungen matrizentheoretische Hilfsmitteln herangezogen. Als Grundgleichung einer Kettenbrücke ergibt sich eine Matrizengleichung welche als Unbekannte die Durchbiegungsmatrix des Versteifungsträgers enthält. Zur Auflösung dieser Matrizengleichung ist nur das Invertieren von Kontinuantenmatrizen notwendig, wofür einfache, auch maschinell gut durchführbare Rechenschemata angegeben werden. Bei einer Kettenbrücke mit  $n-1$  Hängestäben erhält man für die Zunahme der Horizontalspannung eine Bestimmungsgleichung  $n$ -ten Grades.

Bei einer Grenzübergang, wobei die Anzahl der Hängestäbe unbegrenzt zunimmt, geht die vorher erwähnte Matrizengleichung in die wohlbekannt Melansche Differentialgleichung der Hängebrücken über.

Im letzten Paragraph werden diejenigen Vereinfachungen besprochen, welche sich bei einer gleichmässigen Kettenbrücke einstellen.

---

\*) Diese Arbeit ist dem Inhalt nach identisch mit der deutschsprachigen Arbeit [1] des Verfassers.