

BOLYONGÁSI FELADATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

A következőkben a közönséges és abszorpciós bolyongás néhány speciális problémájával foglalkozunk és korábbi ismert eredmények egyszerű bizonyítását ismertetjük.

1. §. Közönséges bolyongás

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ független valószínűségi változók, amelyekre

$$(1) \quad \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Legyen $\eta_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$ esetén pedig

$$(2) \quad \eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Mint ismeretes, az η_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) változók sorozata egy egyenesen bolyongó részecske pályáját írja le. Ha a részecske az $x = 0$ pontból indul el és minden egyes lépésben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pozitív irányba, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel negatív irányba mozdul el egy egységnyt, akkor η_n lesz a részecske helyzetének abszcisszája n lépés megtétele után.

Ismeretes, hogy

$$(3) \quad \mathbf{P}\{\eta_n = x\} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } x = 2r - n \quad (r = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ugyanis 2^n számú n -lépéses pálya van és ezek mindegyike egyenlően valószínű. Az olyan pályák száma, amelyek n lépéssel az $x = 2r - n$ pontba vezetnek, $\binom{n}{r}$, ugyanis ekkor a részecske r lépést lép pozitív irányba és $n - r$ lépést negatív irányba.

A következőkben bebizonyítjuk az alábbi ismert határeloszlástételt:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n} z \} = F(z)$$

határeloszlás létezik, és fennáll, hogy $F(z) = 0$, ha $z \leq 0$, míg pozitív z értékekre

$$(5) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)],$$

ahol

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

vagy más alakban:

$$(6) \quad F(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}} \quad (z > 0).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti határeloszlás nemcsak a speciális $\{\xi_n\}$ változókra érvényes, hanem minden olyan $\{\xi_n\}$ változó-sorozatra, amelyre $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$, $\mathbf{D}\{\xi_n\} = 1$, és alkalmazható a centrális határeloszlástétel. Ez az ERDŐS—KAC-féle invariancia elv következménye. (Vö.: P. ERDŐS—M. KAC [5]). A tételt a (6) alakban szokás kimondani. Megjegyezzük azonban, hogy M. D. DONSKEER [3] eredményéből következik, hogy a (4) határeloszlás meg egyezik a $\xi(t)$ Wiener-folyamatra vonatkozó $\mathbf{P} \{ \max_{0 \leq t \leq 1} |\xi(t)| < z \}$ valószínűséggel. Ezen utóbbi valószínűség pedig a hővezetési differenciálegyenlet speciális megoldásaként adódik. Ily módon megkaphatjuk az (5) alakot. Erre vonatkozóan utalunk A. SOMMERFELD [15] könyvére. (Vö. még: U. GRENNAN—M. ROSENBLATT [7], L. BACHELIER [2], P. LÉVY [11], W. FELLER [6]). Az (5) és (6) képletek azonosságának közvetlen bizonyításával foglalkozik e füzetben RÉNYI A. [14] dolgozata.

2. §. Abszorpciós bolyongás

Az (1) alatti $\{\xi_n\}$ változók segítségével definiáljuk az $\{\eta_n^*\}$ változók sorozatát a következőképpen. Legyen $\eta_0^* = 0$, $n = 1, 2, \dots$ esetén pedig

$$(7) \quad \eta_n^* = \begin{cases} \eta_{n-1}^* + \xi_n, & \text{ha } |\eta_{n-1}^*| < a \\ \eta_{n-1}^*, & \text{ha } |\eta_{n-1}^*| = a, \end{cases}$$

ahol a adott pozitív egész szám. Az η_n^* ($n = 0, 1, 2, \dots$) változók sorozata, mint ismeretes, abszorbeáló falak jelenlétében bolyongó részecske pályáját

írja le. A részecske kiindul az $x = 0$ pontból és minden egyes lépésben vagy pozitív irányba vagy negatív irányba egységnyi elmozdulást végez, de ha egyszer elérte az $x = a$ vagy $x = -a$ pontot, akkor azontúl ott marad.

Ha $|x^*| < a$, akkor

$$(8) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} - \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\}] .$$

Ennek a képletnek a fennállását rendszerint „tükrözési eljárással” szokták bebizonyítani, azonban egyszerűbben is belátható. Jelölje A a $\{4ja + x\}$ pontok halmazát és B a $\{(4j+2)a - x\}$ pontok halmazát ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Jelölje A az $\eta_n \in A$ eseményt és B az $\eta_n \in B$ eseményt. Továbbá A_0 jelentse azt az eseményt, hogy $\eta_n = x$ és $\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < a$. Általában felírható, hogy $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{AA_0\} + \mathbf{P}\{A\bar{A}_0\}$. Most azonban $A_0 \subset A$, azaz $\mathbf{P}\{AA_0\} = \mathbf{P}\{A_0\}$. Továbbá $\mathbf{P}\{A\bar{A}_0\} = \mathbf{P}\{B\}$, ugyanis az $A\bar{A}_0$ esemény azt jelenti, hogy a részecske legalább egyszer eléri az $x = \pm a$ pontok egyikét és úgy jut az A halmazba. Az első elérés alkalmával változtassuk meg a részecske továbbhaladásának irányát, akkor A helyett a B halmazba vezető út lesz; másrészt minden, a B halmazba vezető útnak megfelel egy olyan, az A halmazba vezető út, amely érinti az $x = \pm a$ pontok legalább egyikét. Látható, hogy a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, és mivel minden egyes n -lépéses út egyenlő valószínűségű, tehát az AA_0 és B események valószínűsége is megegyezik. Így tehát $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A_0\} + \mathbf{P}\{B\}$. Mivel azonban az A_0 esemény megegyezik az $\eta_n^* = x$ eseménnyel, tehát $\mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \mathbf{P}\{A_0\} = \mathbf{P}\{A\} - \mathbf{P}\{B\}$, ami bizonyítandó volt.

3. §. A határeloszlástétel bizonyítása

(4)–(5) bizonyítása. Annak a valószínűsége, hogy az abszorpciós bolyongásnál az első n lépésben nem történik abszorpció,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-a < \eta_n^* < a\} = \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{(4j-1)a < \eta_n < (4j+1)a\} - \mathbf{P}\{(4j+1)a < \eta_n < (4j+3)a\}] , \end{aligned}$$

ami (8)-ból $-a < x < a$ -ra történő összegezéssel adódik. Vagy más alakban:

$$(9) \quad \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\mathbf{P}\{(2k-1)a < \eta_n < (2k+1)a\}] .$$

Tekintsük most az n -lépéses pályákat általában n -től függő $a = a_n$ mellett, amiről feltesszük, hogy

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = z ,$$

ahol $z > 0$. Most (9)-ből

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n} z\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] .$$

Ugyanis egyrészt a centrális határeloszlástétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{(2k-1)a_n < \eta_n < (2k+1)a_n\} = \Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z) ,$$

mivel $\mathbf{M}\{\eta_n\} = 0$ és $\mathbf{D}\{\eta_n\} = \sqrt{n}$, másrészt a határeloszlás folytonossága miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n} z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} .$$

Továbbá az összegezés és a határátmenet sorrendje felcserélhető, mivel a szereplő sor egyenletesen konvergens.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a\} = \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < a\} ,$$

tehát (11)-ből következik (5) fennállása is.

(4)–(6) *bizonyítása*. Most rátérünk (6) bizonyítására, ami először R. VON MISES [12] munkájában szerepel. A (8) kifejezésben vegyük tekintetbe, hogy $0 \leq r < l$ esetén

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+l} + \binom{n}{r+2l} + \dots = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{l}\right)^n \cos \frac{k(n-2r)\pi}{l} .$$

(Vö.: E. NETTO [13], 20. oldal). Ennek alkalmazásával és (3) tekintetbevételével

$$\sum_j \mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} = \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{2a-1} \left(\cos \frac{k\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{k\pi x}{2a} ,$$

ha $n+x$ páros, különben zérus. (A jobboldal páratlan $n+x$ esetén $1/2a$). Hasonlóan

$$\sum_j \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\} = \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{2a-1} (-1)^k \left(\cos \frac{k\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{k\pi x}{2a} ,$$

ha $n+x$ páros, különben zérus. (A jobboldal páratlan $n+x$ esetén $1/2a$). Így tehát (8) a következő alakban is felírható:

$$(12) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a} .$$

Ez a reláció minden x -re érvényes (ugyanis, ha $n+x$ páratlan, akkor a jobb-
oldal zérus). Erre a képletre először R. E. ELLIS [4] jutott differenciaegyenlet
megoldásával (vö.: JORDAN K. [8], 420. oldal). Más bizonyítása a Markov-
láncok elméletével történik (vö.: A. A. ANIS [1]).

Legyen ismét $a = a_n$ a (10) szerinti, akkor

$$\mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} = \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{a_n-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a_n} \right)^n \sum_{|x| < a_n} \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a_n}.$$

Most

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{|x| < a_n} \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a_n} = \frac{2}{(2j+1)\pi} \int_{-\frac{(2j+1)\pi}{2}}^{\frac{(2j+1)\pi}{2}} \cos y \, dy = \frac{4(-1)^j}{(2j+1)\pi}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8n^2} \right)^n = e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}.$$

Következőleg

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n}z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}},$$

ugyanis egyrészt a határeloszlás folytonos, másrészt könnyen igazolható,
hogy a határátmenet tagonként képezhető. (13)-ból (6) fennállása is követ-
kezik.

Megjegyzések. Megjegyezzük, hogy az (5) és (6) alatti eloszlásfüggvények
azonosságából az $f(z) = F'(z)$ sűrűségfüggvényekre a következő azonosság
nyerhető:

$$(14) \quad f(z) = \frac{\pi}{z^3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2z^2}},$$

amely a thetafüggvények segítségével közvetlenül is igazolható. Ugyanis

$$(15) \quad f(z) = -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\partial \vartheta_3(v, z^2/2\pi^2)}{\partial v} \right)_{v=1/4},$$

ahol

$$\vartheta_3(v, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v+j)^2}{z}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 z} \cos 2\pi k v.$$

A (14) képletből könnyen adódik, hogy $f(z)$ kielégíti a következő függvény-egyenletet :

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{2z^2}\right)^{3/2} f\left(\frac{\pi}{2z}\right).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy (14) szerint a kérdéses valószínűségeloszlás s -edik momentuma :

$$(16) \quad M_s = \int_0^\infty z^s f(z) dz = \frac{2^{\frac{s+3}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}.$$

Ha speciálisan $s = 2m + 1$:

$$(17) \quad M_{2m+1} = \frac{m! \pi^{2m+1}}{2^m (2m)! \sqrt{2\pi}} |E_{2m}|,$$

ahol $E_0, E_1, \dots$ az Euler-számokat jelölik (vö.: CH. JORDAN [9], 300. oldal). Speciálisan $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$, $E_8 = 1385$ s í. t.

4. §. Egy feltételes határeloszlástétel

Megjegyezzük, hogy a fentiek alapján könnyen meghatározhatjuk az ismert Kolmogorov-féle eloszlásfüggvényt (vö.: A. N. KOLMOGOROV [10]) kétféle alakját is. Mégpedig bebizonyítjuk, hogy fennáll

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z \mid \eta_{2n} = 0\} = K(z)$$

ahol $K(z) = 0$, ha $z \leq 0$ és pozitív z értékekre

$$(19) \quad K(z) = \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

vagy más alakban

$$(20) \quad K(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^\infty e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}.$$

(18)–(19) bizonyítása. (8) szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2ka\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}}.$$

Ha ebben a kifejezésben $a = a_{2n}$ a (10) értelmezés szerint, úgy $n \rightarrow \infty$ határátmenettel azt nyerjük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-2k^2 z^2};$$

ugyanis (2)-ből kifolyólag

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2ka\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = e^{-2k^2 z^2},$$

és könnyen igazolható, hogy az összegezés és a határátmenet sorrendje felcserélhető. Ez igazolja (19)-et is.

(18)—(20) bizonyítása. (12) szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0, \eta_{2n} = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = \frac{1}{a \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^{2n}.$$

Legyen most a fenti kifejezésben $a = a_{2n} \sim \sqrt{2n}z$; akkor $n \rightarrow \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

ami (20)-at is igazolja.

Megjegyzés. A $K(z)$ eloszlásfüggvény s -edik momentuma

$$(21) \quad M_s^* = s \int_0^{\infty} z^{s-1} [1 - K(z)] dz = \frac{s \Gamma(s/2)}{2^{s/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}.$$

Ha speciálisan $s = 2m$, akkor

$$M_{2m}^* = \frac{(2^{2m-1} - 1) m! \pi^{2m}}{2^{m-1} (2m)!} |B_{2m}|$$

ahol $B_0, B_1, \dots$ a Bernoulli számokat jelölik (vö.: CH. JORDAN [9], 234. oldal). Speciálisan $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$ s. í. t.

(Beérkezett : 1957. III. 4.)

IRODALOM

- [1] ANIS, A. A.: „On the distribution of the range of partial sums of independent random variables”. *Proceedings of Mathematical and Physical Society of Egypt* **1** (1954) 83—89.
- [2] BACHELIER, L.: „Théorie mathématique du jeu”. *Annali della Scuola Normale Superiore (Pisa)* **18** (1901) 143—210.
- [3] DONSKEER, M. D.: „An invariance principle for certain probability limit theorems”. *Memoirs of the American Mathematical Society* **6** (1951) 1—11.
- [4] ELLIS, R. E.: „On the solution of equations in finite differences”. *Cambridge Mathematical Journal* **4** (1844) 182.
- [5] ERDŐS, P.—KAC, M.: „On certain limit theorems of the theory of probability”. *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946) 292—302.
- [6] FELLER, W.: „The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables”. *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 427—439.

- [7] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: „Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes”. *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 537—558.
- [8] JORDAN K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűség-számításból*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [9] JORDAN, CH.: *Calculus of finite differences*, Eggenberger, Budapest, 1939.
- [10] KOLMOGOROV, A. N.: „Sulla determinazione empirico di una legge di distribuzione”. *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari* **4** (1933) 13—91.
- [11] LÉVY, P.: *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1948. („Monographies des Probabilités”, fasc. VI.)
- [12] VON MISES, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik*. Deuticke, Leipzig—Wien, 1931.
- [13] NETTO, E.: *Lehrbuch der Combinatorik*. Teubner, Leipzig, 1901.
- [14] RÉNYI A.: „Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 43—50. (e fűzetben).
- [15] SOMMERFELD, A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Berlin, 1954.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О БЛУЖДЕНИИ

L. TAKÁCS

Резюме

Рассмотрим блуждающую частицу, которая исходя из точки $x = 0$ вещественной оси, может на каждом шаге, независимо от остальных, с той же вероятностью сдвинуться на единицу в положительном или отрицательном направлении. Пусть положение частицы после n шагов обозначает η_n . Рассмотрим, далее, это же блуждание с той только разницей, что в точках $x = a$ и $x = -a$ находится поглощающая стена. Пусть в этом случае положение частицы после n шагов обозначается через η_n^* . Автор даёт простое доказательство следующих известных результатов.

Для блуждания с поглощающей стеной имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} - \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\}] = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a}. \end{aligned}$$

Для обычного блуждания имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n}z\} = F(z)$$

где $F(z) = 0$, если $z \leq 0$, и в случае $z > 0$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}},$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

Далее, имеет место следующая теорема об условном предельном распределении :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z | \eta_{2n} = 0 \} = K(z) ,$$

где $K(z) = 0$, если $z \leq 0$, а в случае $z > 0$

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8 z^2}}$$

ON RANDOM WALK PROBLEMS

L. TAKÁCS

Summary

Let us consider the motion of a particle on a straight line, which starts at $x = 0$, and in each step it can move either a unit distance to the right or a unit distance to the left with the same probability $1/2$, the displacements being independent of each other. Denote by η_n the position of the particle after the n -th step. Further let us consider the above random walk with absorbing barriers at $x = a$ and $x = -a$. Denote by η_n^* the position of the particle at the n -th step.

For the random walk with absorbing barriers we have

$$\mathbf{P} \{ \eta_n^* = x \} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P} \{ \eta_n = 4ja + x \} - \mathbf{P} \{ \eta_n = (4j+2)a - x \}]$$

or

$$\mathbf{P} \{ \eta_n^* = x \} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a}$$

if $x \neq \pm a$.

For the ordinary random walk we have the following limiting distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n} z \} = F(z)$$

where $F(z) = 0$ if $z \leq 0$ and

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

if $z > 0$. Here

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Further we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z \mid \eta_{2n} = 0 \} = K(z) ,$$

where $K(z) = 0$ if $z \leq 0$ and

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

for $z > 0$.