EINE VERALLGEMEINERUNG DER LAPLACESCHEN METHODE

ANDRÁS BÉKÉSSY

1. §. Einführung

Es ist wohlbekannt, dass der asymptotische Wert des Integrals

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt \tag{1}$$

für $x \to \infty$ mit dem asymptotischen Werte von

$$\int_0^a \exp\left\{-\frac{1}{2} x f''(0) t^2\right\} dt ,$$

— das heisst mit $\pi^{\frac{1}{2}} [2 x f''(0)]^{-\frac{1}{2}}$ — übereinstimmt, wenn x reell, positiv und $0 < a \leqq \infty$ eine von x unabhängige Konstante ist, und ausserdem die Funktion $f(t)$ die folgenden Eigenschaften besitzt :

a° Die Funktion $\exp\{-xf(t)\}$ ist in $[0, a]$ für genügend grosse Werte von x integrierbar.

b° Für jedes $\delta > 0$ ist

$$\inf_{\delta \leq t \leq a} f(t)$$

grösser als Null.

c° Die Funktion $f(t)$ ist im Punkte $t = 0$ von rechts stetig und zweimal differenzierbar, mit $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$.

Es ist ferner bekannt, dass die Bedingung *c*° durch die folgende, allgemeinere Bedingung ersetzt werden kann :

c'° Es sei für $t \to 0$

$$f(t) \sim Ct^{\alpha},$$

wobei $C > 0$ und $\alpha > 0$ sind. In diesem Fall gilt die Formel

$$\int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt \sim \int_0^a \exp\{-x C t^{\alpha}\} dt , \qquad (x \to \infty) , \tag{2}$$

das heisst

$$\int_0^a \exp\{-x f(t)\}\, dt \sim \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Die asymptotische Gleichung (2) spielt eine zentrale Rolle bei der Laplaceschen Methode (Problem der »Funktionen grosser Zahlen«), oder bei der sogenannten Sattelpunktmethode, wo man die Aufgabe hat, den asymptotischen Wert von Integralen der Gestalt

$$\int_{(C)} h(z) \exp\{x f(z)\}\, dz$$

zu bestimmen.

Obgleich zahlreiche und verschiedenartige Verallgemeinerungen der Laplaceschen Methode in der Literatur vorhanden sind (für mehrfache Integrale, für zweiparametrige Integrale, u. s. w. siehe z. B. in der Arbeit von A. Erdélyi [1] das Literaturverzeichnis zum zweiten Kapitel, S. 57.), fand es meines Wissens keine derartige Untersuchung statt, in welcher hinreichende Bedingungen für das Bestehen einer Behauptung von Typus (2) für Funktionen aufgestellt worden wären, die asymptotisch nicht die Gestalt Ct^a, sondern z. B. die Gestalt $-Ct^a \log t$ oder allgemeiner, irgendeine Gestalt $g(t)$ haben.

Für die Untersuchung solcher Fragen hat A. Haar eine allgemeine Methode entwickelt [2], in seinem Artikel zeigt er nämlich, dass der asymptotische Wert eines Integrals der Gestalt (1) von den Singularitäten seiner Laplaceschen Transformierten abhängt, über den Fall c'.°. geht er aber nicht hinaus und seine Methode scheint mir in allgemeineren Fällen nicht leicht anwendbar zu sein. Ebenso scheint derjenige Weg, welcher mit der Transformation des Integrals (1) in ein Laplace—Stieltjessche Integral der Gestalt

$$\int \exp\{-xs\}\, d\Omega(s)$$

beginnt und mit der Anwendung Abelschen Sätzen der Laplaceschen Transformation fortgesetzt wird, nicht einfacher zu sein. Jedenfalls beschränkt sich die nachstehende Untersuchung auf Sätze, die unmittelbar ohne diesen Hilfsmitteln erreicht werden können.

Um die Sätze kürzer zu fassen, sind hier einige — später als *»die Grundbedingungen«* genannte — Voraussetzungen aufgestellt:

1°. Es sie die Veränderliche x reel und positiv; es sei $0 < a \leq \infty$, übrigens sei a eine von x unabhängige Konstante.

2°. Es gebe ein $x_0 \geq 0$ derart, dass die Funktion $\exp\{-x f(t)\}$ im Intervall $0 \leq t \leq a$ für alle $x \geq x_0$ integrierbar ist.

3°. Es sei

$$\inf_{\delta \leq t \leq a} f(t)$$

für jede positive Konstante δ grösser als Null.

4° Es soll

$$\lim_{t\to+0} f(t)$$

existieren und gleich Null sein.

Das folgende Kapitel wirft die Frage auf, ob die Beziehung

$$\int_0^a \exp\{-x\,f(t)\}\,dt \sim \int_0^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt \tag{3}$$

für $x \to \infty$ aus $f(t) \sim g(t)$ (für $t \to +0$) gefolgert werden kann — was ja eine Verallgemenierung der Beziehung (2) wäre —, wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ bloss die Grundbedingungen befriedigen, wenn also die Funktion $g(t)$ nicht gleich Ct^a ist, sondern sie eine allgemeinere, nicht näher bestimmte Form hat. Da aber (3) sich im allgemeinen als falsch erweist, sind zusätzliche Bedingungen, die zusammen mit den Grundbedingungen zur Gültigkeit der Gleichung (3) hinreichen, für die Funktion $g(t)$ aufgestellt worden.

Danach wird gezeigt, dass es ausser den Funktionen von der asymptotischen Gestalt Ct^a noch weitere Klassen der Funktionen $f(t)$ gibt, für die man einen asymptotischen Wert des Integrals (1) explizit angeben kann.

2. §. Kriterien

Um zu zeigen, dass die Grundbedingungen 1°—4° für das Bestehen der Behauptung (3) nicht hinreichen, haben wir den folgenden einfachen, fast trivialen Hilfssatz nötig:

Hilfssatz 1. Wenn $f(t)$ den Grundbedingungen genügt, so sind — für Werte von x, die gross genug sind —, die folgenden Beziehungen gültig:

I. Falls $0 < \delta \leq a$ ist, so gibt es eine positive Zahl $\eta(\delta)$ derart, dass

$$\int_\delta^a \exp\{-x\,f(t)\}\,dt = O\big(\exp\{-x\,\eta(\delta)\}\big)$$

gilt.

II. Falls $0 < \delta \leq a$ ist, so gilt die Limesrelation

$$\exp\{\varepsilon x\}\cdot\int_0^\delta \exp\{-x\,f(t)\}\,dt \to \infty$$

für $x \to \infty$ mit jedem $\varepsilon > 0$.

Nach den Grundbedingungen 2° und 3° bestehen nämlich die Ungleichungen:

$$\int_\delta^a \exp\{-x\,f(t)\}\,dt \leq \exp\{-(x-x_0)\inf_{\delta\leq t\leq a} f(t)\}\cdot\int_\delta^a \exp\{-x_0 f(t)\}\,dt <$$

$$< A\exp\{-x\inf_{\delta\leq t\leq a} f(t)\}\,,$$

wo A eine von x unabhängige Konstante ist ; es folgt ferner aus der Grundbedingung 4°. :

$$\exp\{\varepsilon x\}\int_0^\delta \exp\{-x f(t)\}\,dt = \int_0^\delta \exp\{[\varepsilon - f(t)]\,x\}\,dt > B\exp\left\{\frac{\varepsilon x}{2}\right\},$$

wobei der Wert der Konstante $B(\delta)$ von x nicht abhängt. Damit sind beide Teile des Hilfssatzes bewiesen.

Für $0 < b \leq a$ folgt

$$\int_0^a \exp\{-x f(t)\}\,dt \sim \int_0^b \exp\{-x f(t)\}\,dt\,, \qquad (x \to \infty)$$

unmittelbar aus dem Hilfsatze.

Es sei nun $c > 1$; die Funktion $g(t)$ genüge den Grundbedingungen, es sei $f(t) = g(ct)$ und

$$\lim_{t\to+0} \frac{g(ct)}{g(t)} = 1\,.$$

Es kann z. B. $g(t) = (-\log t)^{-1}$, $0 < a < 1$ gewählt werden. Somit erhält man

$$\int_0^{a/c} \exp\{-x f(t)\}\,dt = \frac{1}{c}\int_0^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt \sim \frac{1}{c}\int_0^{a/c} \exp\{-x\,g(t)\}\,dt\,,$$

die Beziehung (3) besteht also nicht.

Dieses Beispiel zeigt, dass man die Funktion $g(t)$, mit welcher $f(t)$ für, $t \to +0$ asymptotisch ist, zur Gültigkeit der Relation (3) noch weiteren zusätzlichen Bedingungen unterwerfen muss.

Kriterium 1. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ den Grundbedingungen genügen, zwischen ihnen die Relation $f(t) \sim g(t)$ für $t \to +0$ besteht, und ausserdem eine positive Konstante existiert, damit

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\int_0^a \exp\{-cxg(t)\}\,dt}{\int_0^a \exp\{-xg(t)\}\,dt} = M < \infty \tag{4}$$

ausfällt, so gilt die asymptotische Gleichung (3).

Beweis: Es sei $\sigma(t) = f(t)/g(t) - 1$. Nach der Voraussetzung $f(t) \sim g(t)$ ist $\lim \sigma(t) = 0$, daher findet man positive Zahlen δ_1 und λ derart, dass für jedes, der Bedingung $0 \leq t \leq \delta_1$ unterworfenes t die Ungleichung

$$1 - |\sigma(t)| > c(1 + \lambda)$$

gilt. Es sei nun $0 < \delta < \delta_1$. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\exp\{-x f(t)\} =$$
$$= \exp\{-x g(t)\} \cdot [1 - x g(t) \sigma(t) \cdot \exp\{-\vartheta x g(t) \sigma(t)\}] \ , \quad (0 \leqq \vartheta(t) < 1) \ ,$$

erhält man nach elementaren Umformungen die Gleichung

$$\int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt = 1 + R_1 + R_2 \ , \tag{5}$$

wobei

$$|R_1| \leqq \int_0^\delta x g(t) |\sigma(t)| \exp\{-x g(t) [1 - |\sigma(t)|]\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt \ ,$$

und

$$|R_2| \leqq \left(\int_\delta^a \exp\{-x g(t)\} dt + \int_\delta^a \exp\{-x f(t)\} dt \right) : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt$$

ist. Da die Ungleichung

$$x g(t) < \frac{1}{\lambda c} \exp\{x \lambda c\, g(t)\}$$

für jeden λ, c, x und t besteht, ist auch

$$|R_1| < \sup_{0 \leqq t \leqq \delta} |\sigma(t)| \cdot \frac{2M}{\lambda c}$$

für genügend grosse Werte von x.

Wird nun eine beliebig kleine, positive Zahl ε gegeben, so wähle man die Zahl δ klein, dass $|R_1| < \varepsilon$ wird und dann x so gross, dass auch das Restglied $|R_2| < \varepsilon$ ausfällt, was wegen Hilfssatz 1. möglich ist. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Kriterium 2. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ den Grundbedingungen genügen, für $t \to +0$ die asymptotische Gleichung $f(t) \sim g(t)$ besteht, ausserdem eine solche positive Konstante $c < 1$ existiert, dass

$$\limsup_{t \to +0} \frac{g(ct)}{g(t)} < 1 \tag{6}$$

ausfällt, so gilt auch die asymptotische Gleichung (3).

Beweis: Es wird gezeigt, dass die Funktion $g(t)$ dem Kriterium 1., (der Bedingung (4)) genügt. Nach Ungleichung (6) findet man solche Konstanten $0 < \delta < 1$ und $0 < \lambda < 1$, dass für jedes t im Intervall $0 \leqq t \leqq \delta$

$$g(ct) < \lambda g(t)$$

wird, so dass auch die Ungleichung

$$\int_0^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt > c\int_0^\delta \exp\{-\lambda x\,g(t)\}\,dt + \int_{\delta/c}^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt\,,$$

also

$$\int_0^\delta \exp\{-\lambda\,x\,g(t)\}\,dt : \int_0^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt < \frac{1}{c}$$

besteht und, mit Rücksicht auf den Hilfssatz 1., auch

$$\int_0^a \exp\{-\lambda x\,g(t)\}\,dt : \int_0^a \exp\{-x\,g(t)\}\,dt < \frac{1}{c} + o(1) < \infty$$

ist.

3. §. Der Fall regulär veränderlicher Funktionen

Wie im Fall $f(t) \sim Ct^{\alpha}$, $(t \to +0, \alpha > 0)$, wo nebst der Gleichung (2) auch

$$\int_0^a \exp\{-x\,Ct^{\alpha}\}\,dt \sim \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}\,, \qquad (x \to \infty)$$

bekannt ist, so dass man den asymptotischen Wert der Funktion (1) explizit angeben kann, so kann der asymptitosche Wert der Funktion (1) in diesem Sinne explizit angegeben werden, falls die Funktion $f(t)$ für $t \to +0$ asymptotisch gleich einer Funktion von der Gestalt $t^{\alpha} L(1/t)$ ist, wobei $L(s)$ zur Klasse der *langsam veränderlichen Funktionen* gehört.

Die Definition und Eigenschaften der langsam veränderlichen Funktionen sind in den Arbeiten von J. Karamata [3], [4] und von J. Korevaar, T. van Aardenne-Ehrenfest und N. G. De Bruijn [5] angeführt, um aber bequemer zu zitieren, habe ich die später benutzten Eigenschaften kurz zusammengestellt:

Von einer für alle $s > 0$ definierten, positiven Funktion $L(s)$ sagt man, dass sie — im Sinne von Karamata — *langsam veränderlich* ist, oder dass sie *sich langsam verändert*, wenn für jede positive Konstante $c > 0$ der Grenzwert

$$\lim_{s\to\infty} \frac{L(cs)}{L(s)} \tag{7}$$

existiert und gleich Eins ist.

A°. Ist die Funktion $L(s)$ auf jedem Intervall $1 \leq s \leq A$ messbar, so existiert der Grenzwert (7) in jedem, von Null abgegranzten geschlossenen Intervall $a \leq c \leq b$ gleichmässig (siehe [5]).

B°. Aus der vorigen Eigenschaft folgt, dass es eine Zahl s_0 zu jedem $\sigma > 0$ und $\varrho > 0$ derart gibt, dass die Ungleichungen

$$(8) \qquad (1-\varrho)\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^\sigma < \frac{L(s_2)}{L(s_1)} < (1+\varrho)\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^\sigma$$

für jede $s_2 \geqq s_1 \geqq s_0$ gelten.

Ist nämlich $\sigma > 0$ und $\varrho > 0$ gegeben, so wählt man zuerst eine Zahl $c > 1$ beliebig, dann eine Zahl $\varrho_1 < \varrho$, damit

$$\frac{\log(1+\varrho_1)}{\log c} < \sigma$$

wird, endlich ein s_0 derart, dass für jedes γ im Intervall $1 \leqq \gamma \leqq c$ und für jedes $s \geqq s_0$

$$\frac{L(\gamma s)}{L(s)} < 1 + \varrho_1$$

ausfällt, was wegen der gleichmässigen Konvergenz des Quotienten möglich ist. Setzt man

$$s_2 = c^k s_1 ,$$

also

$$k = \frac{\log \frac{s_2}{s_1}}{\log c} ,$$

so ergibt sich

$$\frac{L(s_2)}{L(s_1)} = \frac{L(c^k s_1)}{L(c^{k-1} s_1)} \cdot \frac{L(c^{k-1} s_1)}{L(c^{k-2} s_1)} \cdots \frac{L(c^{k-[k]} s_1)}{L(s_1)} <$$

$$< (1+\varrho_1)^{[k]+1} < (1+\varrho)(1+\varrho_1)^k =$$

$$< (1+\varrho)\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{\log(1+\varrho_1)/\log c} < \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^\sigma (1+\varrho) ,$$

was der erste Teil der Behauptung war. Die Abschätzung nach unten geht nach demselben Muster.

C°. Für jede positive Zahl α ist

$$\lim_{s\to\infty} s^{-\alpha} L(s) = 0 .$$

Setzt man nämlich in der Gleichung (8) $s_2 = s$ und $\sigma = \alpha/2$, so entsteht

$$s^{-\alpha} L(s) < \frac{L(s_1)}{s_1^{\alpha/2}}(1+\varrho) \cdot s^{-\alpha/2} , \qquad (s \geqq s_1 \geqq s_0) ,$$

woraus die Behauptung folgt.

$D°$. Falls $\alpha > 1$ ist, so ist die Funktion

$$L^*(s) = s^{\alpha} \sup_{s \leq \tau \leq \infty} \tau^{-\alpha} L(\tau)$$

für $s \to \infty$ asymptotisch gleich $L(s)$.

Für jedes $\varrho > 0$ und $s > 0$ gibt es nämlich eine Zahl $c_s \geqq 1$ derart, dass

$$s^{-\alpha} L^*(s) = \sup_{s \leq \tau \leq \infty} \tau^{-\alpha} L(\tau) \leqq (s\, c_s)^{-\alpha} L(sc_s) \cdot (1 + \varrho)$$

gilt, daher erhält man

$$1 \leqq \frac{L^*(s)}{L(s)} \leqq \frac{1}{c_s^{\alpha}} (1 + \varrho) \frac{L(s\, c_s)}{L(s)} ,$$

da offensichtlich $L^*(s) \geqq L(s)$ ist. Aus (8) folgt aber für jedes $s \geqq s_0$ auch die Ungleichung

$$\frac{L(sc_s)}{L(s)} < c_s^{\alpha} (1 + \varrho) ,$$

so dass für genügend grosse s Werte

$$1 \leqq \frac{L^*(s)}{L(s)} \leqq (1 + \varrho)^2$$

ist, wie klein auch ϱ sein mag, und somit ist die Behauptung bewiesen.

Der Kürze halber führen wir den folgenden Begriff ein : Die Funktion $q(s)$ heisse *für $s \to \infty$ schnell veränderlich*, wenn sie positiv ist, und die Grenzwertrelationen

$$\lim_{s \to \infty} \frac{q(cs)}{q(s)} = \begin{cases} \infty \text{ für } c < 1 , \\ 1 \text{ für } c = 1 , \\ 0 \text{ für } c > 1 \end{cases} \tag{9}$$

gelten, sie heisse jedoch *für $s \to +0$ schnell veränderlich*, falls

$$\lim_{s \to +0} \frac{q(cs)}{q(s)} = \begin{cases} 0 \text{ für } c < 1 \\ 1 \text{ für } c = 1 \\ \infty \text{ für } c > 1 \end{cases} \tag{10}$$

besteht.

Satz 1. *Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Grundbedingungen befriedigen, $f(t)$ für $t \to +0$ asymtotisch gleich $g(t)$ ist, endlich die Funktion $g(t)$ die Gestalt*

$$g(t) = t^{\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right) \tag{11}$$

hat, wobei die Funktion $L(s)$ (für $s \to \infty$) sich langsam verändert, so gilt die asymtotpische Formel

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot t(x), \qquad (x \to \infty), \tag{12}$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$x(t) = \frac{1}{\sup\limits_{0 \leq \tau \leq t} \tau^a L\left(\frac{1}{\tau}\right)} \tag{13}$$

ist.

Beweis: Aus der Grundbedingung 2. folgt, dass die Funktion $g(t)$ messbar ist, so dass $L(s)$ die vorher aufgezählten Eigenschaften der langsam veränderlichen Funktionen besitzt. Aus der Gestalt (11) der Funktion $g(t)$ ist es klar, dass sie dem Kriterium 2. genügt, daher besteht auch die asymptotische Gleichung (3). Da aus der Eigenschaft $D_\circ$ der langsam veränderlichen Funktionen folgt, dass

$$t^{-a} g(t) \sim t^{-a} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^a L\left(\frac{1}{\tau}\right) = L^*\left(\frac{1}{t}\right)$$

für $t \to +0$ ist, genügt es den Beweis für den Fall $g(t) = t^a L^*(1/t)$ durchzuführen, also nur die Beziehung

$$\int_0^\delta \exp\left\{-x t^a L^*\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) t(x), \qquad (x \to \infty)$$

zu beweisen und dabei kann die Zahl δ nach Korollar des Hilfssatz 1. beliebig klein gewählt werden. Man wählt daher δ so klein, dass $\delta^{-1} \leq s_0$ für $\sigma = a/2$ und $\varrho = \frac{1}{2}$ wird, wobei unter s_0, σ und ϱ die bei der Eigenschaft $B_\circ$ der langsam veränderlichen Funktionen vorgekommen Konstanten zu verstehen sind.

Die Funktion $t^a L^*(1/t)$ strebt von rechts monoton gegen Null, so dass man zu jedem Werte des Veränderlichen x — wenn er nur gross genug ist — eine Zahl $t(x) > 0$ findet, für die

$$x = \frac{1}{t(x)^a L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)}$$

ist, setzt man daher $t = rt(x)$, so entsteht

$$\int_0^\delta \exp\left\{-x t^a L^*\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt = t(x) \int_0^{\delta/t(x)} \exp\left\{-r^a \frac{L^*\left(\frac{1}{r\,t(x)}\right)}{L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)}\right\} dr = t(x) \cdot I\{t(x)\}.$$

Zum Bewis des Satzes 1. hat man noch zu zeigen, dass

$$(14)\qquad I\{t(x)\} = \int_0^{\delta/t(x)} \exp\left\{ - r^\alpha \frac{L^*\left(\frac{1}{r\,t(x)}\right)}{L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)} \right\} dr \to \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),$$

falls $t(x) \to 0$ konvergiert, — das heisst $x \to \infty$ strebt. Zerlegt man das Integral $I\{t(x)\}$ in drei Teile:

$$I\{t(x)\} = \int_0^A + \int_A^B + \int_B^{\delta/t(x)} = I_1 + I_2 + I_3 ,$$

so ist ersichtlich, dass das Integral I_2 wegen der gleichmässigen Konvergenz des Integranden (siehe Eigenschaft A°.) gegen

$$\int_A^B \exp\{-r^\alpha\}\, dr$$

strebt und

$$I_1 \leqq A$$

ist. Was das Restglied I_3 betrifft, nach der Eigenschaft B°. und nach Wahl der Zahl δ — für geeignet kleines $t(x)$ —, gilt die Abschätzung

$$I_3 = \int_B^{\delta/t(x)} \exp\left\{ - r^\alpha \frac{L\left(\frac{1}{r\,t(x)}\right)}{L\left(\frac{1}{t(x)}\right)} \right\} dr < \int_B^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2} r^{\frac{\alpha}{2}}\right\} dr .$$

Ist daher ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählt man zuerst die Zahlen A und B derart, damit erstens $I_1 < \varepsilon$, zweitens

$$\int_B^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2} r^{\alpha/2}\right\} dr < \varepsilon,$$

drittens

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \int_A^B \exp\{-r^\alpha\}\, dr < \varepsilon$$

wird, dann $t(x)$ so klein, dass $[\delta/t(x)] > B$ und

$$\left| I_2 - \int_A^B \exp\{-r^\alpha\}\, dr \right| < \varepsilon$$

ausfällt. Dadurch ist aber die Behauptung (14) und somit der Satz 1. bewiesen.

Bemerkung: Ist in der Gleichung (10) $\alpha = 0$, ist also $g(t)$ selbst eine langsam veränderliche Funktion, so gilt der Satz 1. natürlich nicht, es erhebt sich doch die Frage, wie sich in diesem Fall das Integral (1) asymptotisch verhält. Eine elementare, aber recht umständliche Rechnung zeigt zwar, dass z. B. unter der Annahme

$$f(t) = \left[\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\alpha_1}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\log_{(k)}\frac{1}{t}\right)^{\alpha_k}\right]^{-1},$$

wobei die erste, nicht-verschwindende α_i positiv sein soll, für $\log_{(k)}\frac{1}{\delta} > 0$ die asymptotische Gleichung

$$\int_0^\delta \exp\{-x\,f(t)\}\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi\,u(x)}{A\{u(x)\}+1}}\exp\left\{-u(x) - \frac{u(x)}{A\{u(x)\}}\right\}$$

besteht, wo

$$A\{u\} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\log u} + \frac{\alpha_3}{\log u\,\log\log u} + \ldots + \frac{\alpha_k}{\log u\,\log\log u\ldots\log_{(k)}(u)}$$

ist und $u(x)$ die inverse Funktion von

$$x = u\cdot\frac{u^{\alpha_1}(\log u)^{\alpha_2}\ldots(\log_{(k-1)}u)^{\alpha_k}}{A(u)}$$

bedeutet, aber ein allgemeineres, für jede langsam veränderliche Funktion gültiges Resultat habe ich nicht erhalten können.

Für die langsam veränderlichen Funktionen im allgemeinen kann ein asymptotischer Wert des Integrals (1) nach der Methode des Satzes 1. nicht angegeben werden, es lässt sich dagegen ein einfaches Resultat »nach der anderen Seite hin« also für den »schnell veränderlichen Funktionen« [vgl. (10)] durch dieselbe Methode erreicht werden.

Satz 2. *Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Grundbedingungen befriedigen, für $t \to +0$ $f(t) \sim g(t)$ ist, die Funktion $g(t)$ monoton anwächst und für $t \to +0$ schnell veränderlich ist, so gilt die asymptotische Formel*

$$\int_0^a \exp\{-x\,f(t)\}\,dt \sim t(x)\,, \qquad (x \to \infty)\,, \tag{15}$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$x = \frac{1}{g(t)} \tag{16}$$

bedeutet.

Beweis: Erstens bemerkt man, dass nach den Voraussetzungen des Satzes die Funktion $g(t)$ dem Kriterium 2. genügt, zweitens, dass die Limesbeziehung (9) wegen der vorausgesetzten Monotonie der Funktion $g(t)$ gleichmässig in jedem vom Punkte $c = 1$ abgegrenzten (aber nach 0 und ∞ vielleicht offenen) Intervall besteht, so dass der Beweis ganz nach dem Muster des Satzes 1. geführt werden kann.

Satz 3. *Die Funktion $f(t)$ sei den Grundbedingungen unterworfen und es sei*

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-x f(t)\}\, dt\ .$$

Ist $\alpha > 0$ und die Funktion $t^{-\alpha} f(t)$ langsam veränderlich, so ist auch $x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)$ langsam veränderlich. Ist α gleich Null, so verändert sich die Funktion $F(x)$ für $x \to \infty$ schnell. Ist dagegen $f(t)$ eine für $t \to +0$ schnell veränderliche Funktion, so verändert sich $F(x)$ langsam.

Beweis: Es sei $t^{-\alpha} f(t) = L(1/t)$ eine langsam veränderliche Funktion. Betrachtet man die Funktion

$$\frac{(cx)^{\frac{1}{\alpha}} F(cx)}{x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)} = c^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\int_0^a \exp\left\{-cx t^\alpha L\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt}{\int_0^a \exp\left\{-x t^\alpha L\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt}$$

und wird $c^{1/\alpha} t = \tau$ gesetzt, so ist

$$\frac{(cx)^{\frac{1}{\alpha}} F(cx)}{x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)} = \frac{\int_0^{ac^{1/\alpha}} \exp\left\{-x \tau^\alpha L\left(\frac{c^{1/\alpha}}{\tau}\right)\right\} d\tau}{\int_0^a \exp\left\{-x t^\alpha L\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt}, \tag{17}$$

aber nach dem Hilfssatz 1. und dem Kriterium 2. ist die rechte Seite der Gleichung (17) für $x \to \infty$ asymptotisch gleich Eins, was die erste Behauptung des Satzes ist.

Wenn α gleich Null ist, so betrachte man die Funktion

$$F(x) = \int_0^a \exp\left\{-x L\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt\ .$$

Es genügt die Gleichung

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = 0$$

für Zahlen c, die grösser als Eins sind, zu beweisen.

Es seien $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ beliebig gegeben. Es gibt nun ein Intervall $0 \leqq t \leqq \delta$, für welches $L(\varepsilon/t) : L(1/t) \leqq c$ ist, es gilt ja

$$\lim_{t \to +0} \frac{L\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)}{L\left(\frac{1}{t}\right)} = 1 ,$$

daher wird nach Hilfssatz 1.

$$F(x) = \int_0^a \exp\left\{-xL\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{a\varepsilon} \exp\left\{-xL\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)\right\} dt >$$

$$> \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^{\delta} \exp\left\{-cxL\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt + \int_{\delta}^{a\varepsilon} \exp\left\{-xL\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)\right\} dt\right] \leqq$$

$$> \frac{1}{\varepsilon}\left[F(cx) + O(e^{-x\eta})\right]$$

für $x \to \infty$, dabei hängt $\eta > 0$ von δ, ε und c, aber nicht von x ab, so dass man wieder mit Benutzung des Hilfssatzes 1. die Ungleichung

$$\frac{F(cx)}{F(x)} < \varepsilon + o(1) \qquad (x \to \infty)$$

erhält, was die zweite Behauptung beweist.

Was die dritte Behauptung betrifft, es genügt die Gleichung

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = 1$$

ähnlich wie vorher, nur für jedes $c > 1$ zu beweisen. Zuerst wählt man die Zahlen $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ beliebig, dann eine Zahl p so, damit

$$\frac{1}{1-\varepsilon} > p > 1$$

wird, endlich eine Zahl δ derart, dass für jedes t im Intervall $0 \leqq t \leqq \delta$ die Ungleichung

$$\frac{f(pt)}{f(t)} > c \text{ und } \delta p \leqq a$$

ausfällt, was wegen der Beziehung

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(pt)}{f(t)} = \infty$$

möglich ist. Nach Wahl der erwähnten Konstanten gilt für genügend grosse Werten von x die Ungleichung

$$\int_0^{\delta p} \exp\{-x f(t)\}\, dt = p \int_0^{\delta} \exp\{-x f(pt)\}\, dt < p \int_0^{\delta} \exp\{-c x f(t)\}\, dt \;,$$

es ist also wegen Hilfsatz 1. für $x \to \infty$

$$\frac{F(cx)}{F(x)} > \frac{1}{p} - o(1) > 1 - \varepsilon - o(1) \;.$$

Da der Quotient $F(cx)/F(x)$ für jedes $x > 0$ und für jedes $c > 1$ gewiss kleiner als Eins ist, wurde die Behauptung und damit alle drei Teile des Satzes 3. bewiesen.

Es gibt Fälle, bei denen die Funktion $t(x)$ [siehe (11) und (12)] sich asymptotisch elementar, mit Hilfe der Funktion $g(t)$ [ohne Benutzung inverser Funktionen ausdrücken lässt, bei denen also ein asymptotischer Wert des Integrals $F(x)$ (11), welcher sozusagen »noch mehr explizit« ist, angegeben werden kann. Dies ermöglicht der folgende Hilfsatz.

Hilfssatz 2. Es sei $L(s)$ eine langsam veränderliche Funktion, die für genügend grosse Werte von s auch monoton ist. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{s \to \infty} \frac{L\big(s[L(s)]^{-1/a}\big)}{L(s)} \tag{18}$$

existiert und gleich Eins ist, bzw. die schwächere Bedingung

$$0 < \lim_{s \to \infty} \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \frac{L\big(s[L(s)]^{-1/a}\big)}{L(s)} < \infty \tag{19}$$

erfüllt wird, so ist die inverse Funktion von

$$x = \frac{s^a}{L(s)} \tag{20}$$

für $x \to \infty$ asymptotisch gleich

$$[x L(x^{1/a})]^{1/a}, \tag{21}$$

bzw.

$$x L\big([x L(x^{1/a})]^{1/a}\big)]^{1/a}. \tag{22}$$

Der Beweis ist sehr einfach ; man bildet die Iterationsfolge

$$s_1(x) = x^{1/a} \;,$$

$$s_{k+1}(x) = x^{1/a} L\big(s_k(x)\big) \;, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \;.$$

Sind nun die Quotienten $s_2(x)/s(x)$ bzw. $s_3(x)/s(x)$ gebildet und sucht man Bedingungen, unter denen diese Quotienten für $x \to \infty$ gegen Eins streben, so erweisen sich die Bedingungen (18) bzw. (19) als hinreichend.

Falls die Bedingung (18) oder (19) erfüllt wird, so lässt sich der Satz 1. durch Hilfssatz 2. ergänzen. Ist z. B. für $t \to +0$

$$f(t) \sim t^{\alpha}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_1}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\log_{(k)}\frac{1}{t}\right)^{\beta_k}, \tag{23}$$

wobei $\alpha > 0$ ist, so kann der Hilfssatz 2. angewendet werden, und für $\log_{(k)} 1/a > 0$ erhält man

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot \alpha^{\beta_1/\alpha}}{[x(\log x)^{\beta_1}(\log\log x)^{\beta_2}\dots(\log_{(k)} x)^{\beta_k}]^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{24}$$

Als zweites Beispiel sei

$$f(t) \sim t^{\alpha}\exp\left\{-\sqrt{\log\frac{1}{t}}\right\}. \qquad (\alpha > 0)\ .$$

Die Bedingung (19) ist befriedigt, daher gilt für jedes $a < 1$

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\right\}x^{-\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{\frac{\sqrt{\log x}}{\alpha^{3/2}}\right\}.$$

Wenn sich die Funktion $g(t)$ für $t \to +0$ schnell verändert, so hat man zwar keinen Anhaltspunkt, mit dessen Hilfe ein dem Hilfssatze 2. ähnliches, mehr oder weniger allgemeines Resultat könnte erreicht werden, es gibt jedoch spezielle Fälle, bei welchen eine im Sinne des Hilfssatzes 2. explizite Darstellung der inversen Funktion möglich ist. Es sie z. B. für $t \to +0$

$$f(t) \sim \exp\{-h(t)\}\ ,$$

wobei die Funktion $h(t)$ für $t \to +0$ asymptotisch gleich $Ct^{-\alpha}$ ($C > 0$, $\alpha > 0$) ist. Unter dieser Annahme ist die Funktion $f(t)$ für $t \to +0$ eine schnell veränderliche, nach Satz 2. besteht daher für $x \to \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim t(x) \qquad (x \to \infty)\ ,$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$x = \exp h(t)$$

bedeutet. Setzt man

$$t_1(x) = \left(\frac{C}{\log x}\right)^{\alpha},$$

so ergibt sich, dass der Quotient $t_1(x)/t(x)$ für $x \to \infty$ gegen 1 strebt, so dass für $x \to \infty$ die Relation

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \int_0^a \exp\left\{-x\exp\{-h(t)\}\right\}dt \sim C^{\alpha}(\log x)^{-\alpha}$$

als Endergebnis erhalten wird.

(Eingegangen: 25. VI. 1957.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Erdélyi, A.: *Asymptotic expansions*. Dover, New-York, 1956.
[2] Haar, A.: „Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen". *Mathematische Annalen* **96** (1927) 69—107.
[3] Karamata, J.: „Sur un mode de croissance régulière des fonctions". *Mathematica (Cluj)* **4** (1930) 38—53.
[4] Karamata, J.: „Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondementaux". *Bulletin de la Société Mathématique de France* **61** (1933) 1—8.
[5] Korevaar, J.—van Aardenne-Ehrenfest, T.—de Bruijn, N. G.: „A note on slowly oscillating functions." *Nieuw Archief voor Wiskunde* **23** (1949) 77—86

A LAPLACE-MÓDSZER EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSA

BÉKÉSSY A.

Kivonat

Ha x valós, pozitív, $0 < a \leq \infty$, a független x-től, $f(t)$ valós függvény és

$a°$ $\exp\{-xf(t)\}$ a $[0, a]$ intervallumban x elég nagy értékeire integrálható,

$b°$ minden pozitív δ számmal $\inf\limits_{\delta \leq t \leq a} f(t) > 0$,

$c°$ $f(t) \sim Ct^{\alpha}$, ha $t \to +0$ és $C > 0$, $\alpha > 0$, akkor, mint ismeretes,

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \int_0^a \exp\{-xCt^{\alpha}\}\,dt\,, \qquad (x \to \infty)\,. \tag{1}$$

azaz

$$F(x) \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(Cx)^{-1/\alpha}. \tag{2}$$

Kérdés, hogy az (1) típusú összefüggés igaz marad-e, ha $f(t)$ a $t = 0$ pontra vonatkozólag nem Ct^{α} alakú függvénnyel aszimptotikus, hanem általában

valamilyen, az a° és b° feltételt kielégítő függvénnyel; másszóval, ha c° helyébe az általánosabb $f(t) \sim g(t)$ feltétel kerül, akkor igaz marad-e, hogy

$$\int^{a} \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \int_{0}^{a} \exp\{-xg(t)\}\,dt \qquad (x \to \infty)\,. \tag{3}$$

Ellenpélda mutatja, hogy nem.

Ezzel szemben, ha $g(t)$ az a° és b° feltételen kívül még a dolgozatban kritériumoknak nevezett feltételek egyikét is kielégíti, akkor (3), az (1) összefüggés plauzibilis általánosítása, igaz marad. E kritériumok:

1. kritérium. Legyen olyan pozitív $c < 1$ szám, hogy

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\int_{0}^{a} \exp\{-cxg(t)\}\,dt}{\int_{0}^{a} \exp\{-xg(t)\}\,dt} < \infty\,. \tag{4}$$

2. kritérium. Legyen olyan $c < 1$, hogy

$$\limsup_{t\to+0} \frac{g(ct)}{g(t)} < 1\,. \tag{6}$$

A 3. fejezet a (2) típusú egyenlőség általánosításával foglalkozik.

1. tétel: Ha $f(t)$ és $g(t)$ kielégítik az a° és b° feltételt, $f(t) \sim g(t)$, $(t \to +0)$ és $g(t) = t^{\alpha} L(1/t)$, ahol $\alpha > 0$ és $L(1/t)$ lassan változó függvény (lásd: [4], [5]), akkor

$$F(x) = \int_{0}^{a} \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t(x)\,, \qquad (x \to \infty),$$

ahol $t(x)$ az

$$x(t) = \frac{1}{\sup\limits_{0 \le \tau \le t} \tau^{\alpha} L\left(\frac{1}{\tau}\right)}$$

függvény inverze.

2. tétel: Ha $f(t)$ és $g(t)$ kielégíti az a° és b° feltételt, $f(t) \sim g(t)$ $(t \to +0)$, $g(t)$ monoton és eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$\lim_{t\to+0} \frac{g(ct)}{g(t)} = \begin{cases} 0\,, & \text{ha} \quad c < 1\,, \\ 1\,, & \text{ha} \quad c = 1\,, \\ \infty, & \text{ha} \quad c > 1 \end{cases}$$

(»gyorsan változó függvény«), akkor

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim t(x)$$

ahol $t(x)$ az

$$x(t) = \frac{1}{g(t)}$$

függvény inverze.

Egy speciális példa vonatkozik az 1. tétel feltételeit ki nem elégítő $\alpha = 0$ esetre, másszóval arra az esetre, ha $g(t)$ maga lassan változó függvény.

3. tétel: Legyen

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt\ ,$$

$f(t)$ elégítse ki az a°. és b°. feltételt. Ha $f(t)$ lassan változó, $L(1/t)$ alakú függvény, akkor $F(x)$ a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(cx)}{F(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad c<1 \\ 1\,, & \text{ha} \quad c=1 \\ 0\,, & \text{ha} \quad c>1 \end{cases}$$

relációkat kielégítő, »gyorsan változó«-nak nevezett függvény. Ha $t^{-a}f(t)$ $(\alpha > 0)$ lassan változó, akkor $x^{1/\alpha}F(x)$ is lassan változó. Végül ha $f(t)$ gyorsan változó, akkor $F(x)$ változik lassan.

Az 1. tétel egyes esetekben kiegészíthető a 2. segédtétel eredményével, amely szerint, ha az $L(s)$ lassan változó függvény monoton és

$$\lim_{s\to\infty}\frac{L\left(s[L(s)]^{-1/\alpha}\right)}{L(s)} = 1\ ,$$

vagy legalábbis

$$0 < \lim_{s\to\infty}\ {\sup \atop \inf}\ \frac{L\left(s\,[L(s)]^{-\frac{1}{\alpha}}\right)}{L(s)} < \infty\ ,$$

akkor az

$$x = \frac{s^\alpha}{L(s)}$$

függvény inverz függvénye aszimptotikusan egyenlő az

$$[x\,L(x^{\frac{1}{\alpha}})]^{\frac{1}{\alpha}}\,,$$

illetőleg az

$$[x\,L([x\,L(x^{\frac{1}{\alpha}})]^{\frac{1}{\alpha}})]^{\frac{1}{\alpha}}$$

kifejezéssel. Így például ha

$$f(t)\sim t^{\alpha}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_1}\left(\log\,\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_2}\dots\left(\log_{(k)}\frac{1}{t}\right)^{\beta_k},\qquad(\alpha>0)$$

akkor $\log_{(k)}\frac{1}{a}>0$ esetében

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt\sim\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{\beta_1}{\alpha}}}{[x(\log x)^{\beta_1}(\log\log x)^{\beta_2}\dots(\log_{(k)}x)^{\beta_k}]^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА LAPLACE-A

A. BÉKÉSSY

Резюме

Если x вещественна и положительна, $0<a\leqq\infty$, a не зависит от x, $f(t)$ вещественная функция и

a°. $\exp\{-xf(t)\}$ в интервалле $[0,a]$ при достаточно больших значениях x интегрируема,

b°. с любым положительным числом δ $\inf\limits_{\delta\leqq t\leqq a} f(t)>0$

c'°. $f(t)\sim Ct^{\alpha}$, если $t\to+0$ и $C>0,\alpha>0$, тогда, как известно,

$$F(x)=\int_0^a \exp\{-xf(t)\,dt\sim\int_0^a\exp\{-x\,Ct^{\alpha}\}\,dt\ ,\quad(x\to\infty)\tag{1}$$

т. е.

$$F(x)\sim\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}.\tag{2}$$

Спрашивается, что соотношение типа (1) будет ли иметь место, если $f(t)$ в точке $t=0$ асимптотически равна не функции вида Ct^{α}, а, вообще, какой-нибудь функции, удовитворяющей условиям a°. и b°., т. е. если вместо условия c'°. выполняется более общее условие $f(t)\sim g(t)$, остаётся ли справедливым, что

$$\int_0^a\exp\{-xf(t)\}\,dt\sim\int_0^a\exp\{-xg(t)\}\,dt\ ,\quad(x\to\infty).\tag{3}$$

На примере можно показать, что нет.

Но если $g(t)$ кроме условия $a_\circ^\circ$ и $b_\circ^\circ$ удовлетворяет одному из приведённых ниже критериев, то (3), очевидное обобщение соотношения (1), остаётся в силе. Эти условия таковы

Критерий. 1. Пусть существует такое положительное число $c < 1$, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^a \exp\{-cxg(t)\}\,dt}{\int\limits_0^a \exp\{-xg(t)\}\,dt} = M < \infty \,, \tag{4}$$

Критерий. 2. Пусть существует такое $c < 1$, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{g(ct)}{g(t)} < 1 \,. \tag{6}$$

Третья глава занимается обобщением равенства типа (2).

Теорема 1. Если $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям $a_\circ^\circ$ и $b_\circ^\circ$, $f(t) \sim g(t)$ $(t \to +0)$, и $g(t) = t^\alpha L(1/t)$, где $\alpha > 0$ и $L(s)$ медленно изменяющаяся функция, то

$$F(x) = \int\limits_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t(x) \qquad (x \to \infty) \,,$$

где $t(x)$ функция обратная функции

$$x(t) = \left[\sup_{0\leq\tau\leq t} \tau^\alpha L\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^{-1} .$$

Теорема 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям $a_\circ^\circ$ и $b_\circ^\circ$, $f(t) \sim g(t)$, $(t \to +0)$, $g(t)$ монотонна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+0} \frac{g(ct)}{g(t)} = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \quad c < 1 \\ 1\,, & \text{если} \quad c = 1 \\ \infty, & \text{если} \quad c > 1 \end{cases}$$

(«быстро изменяющаяся функция»), то

$$\int\limits_0^1 \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim t(x) \qquad (x \to \infty)$$

где $t(x)$ функция, обратная функции

$$x(t) = [g(t)]^{-1}$$

Специальный пример относится к случаю $\alpha = 0$, не удовлетворяющему условиям теоремы 1., т. е. к случаю, когда $f(t)$ медленно изменяется.

Теорема 3. Пусть

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \ ,$$

$f(t)$ удовлетворяет условиям a° и b°. Если $f(t)$ медленно изменяющаяся функция типа $L(1/t)$, то $F(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad c < 1 \ , \\ 1 \ , & \text{если} \quad c = 1 \ , \\ 0 \ , & \text{если} \quad c > 1 \ , \end{cases}$$

«быстро изменяющаяся» функция. Если $t^{-a} f(t)$ медленно изменяется, то $x^{1/a} F(x)$ тагже медленно изменяется. Наконец, если $f(t)$ быстро изменяется, то $F(x)$ изменяется медленно.

Теорема 1. в некоторых случаях может быть дополненна результатами леммы 2., согласно которой, если медленно изменяющаяся функция $L(s)$ монотонна и

$$\lim_{s\to\infty} \frac{L\left(s\,[L(s)]^{-1/\alpha}\right)}{L(s)} = 1$$

или, по крайней мере,

$$0 < \lim \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \frac{L\left(s\,[L(s)]^{-1/\alpha}\right)}{L(s)} < \infty$$

то функция, обратная функции

$$x = \frac{s^\alpha}{L(s)}$$

ассимптотически равна выражению

$$[x\,L(x^{1/\alpha})]^{1/\alpha}$$

или соответственно

$$\left[x\,L\left([x\,L(x^{1/\alpha})]^{1/\alpha}\right)\right]^{1/\alpha}.$$

Так, например, если

$$f(t) \sim t^\alpha \left(\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_1} \left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{\beta_2} \dots \left(\log_{(k)}\frac{1}{t}\right)^{\beta_k},$$

$(\alpha > 0)$, то

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\}\,dt \sim \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{\beta_1}{\alpha}}}{[x(\log x)^{\beta_1}(\log\log x)^{\beta_2}\dots(\log_{(k)} x)^{\beta_k}]^{1/\alpha}}\,.$$