LINEÁRIS DIFFERENCIÁL- ÉS DIFFERENCIAEGYENLETEK ÁLTALÁNOS KEZDETI FELTÉTELEKET KIELÉGÍTŐ EXPLICIT MEGOLDÁSÁRÓL

RÓZSA PÁL

Bevezetés

A lineáris differenciál- és differenciaegyenletek és egyenletrendszerek elmélete — mint ismeretes — az analízis egyik legalaposabban feltárt területének tekinthető. Az idevágó irodalom azonban a megoldás explicit előállítását szinte kivétel nélkül csak a *szokásos* kezdeti feltételek esetén, vagyis abban az esetben adja meg, amikor az ismeretlen függvény és annak deriváltjai, illetve az ismeretlen függvények, a független változó *egy bizonyos* értékénél adottak. Annak az általánosabb feladatnak a megoldására, amikor az ismeretlen függvény és annak *szukcesszív* deriváltjai a független változó több *különböző* értékénél vannak előírva, Th. VAHLEN egyik dolgozatában [5] található eljárás. Th. VAHLEN az igen speciális $y^{(n)}=f(x)$ differenciálegyenletnek a mondott feltételeket kielégítő megoldására ad explicit előállítást. Meg kell még említeni, hogy G. D. BIRKHOFF egyik dolgozatában [1] azt az általánosabb esetet vizsgálja, amikor a fenti differenciálegyenletnél az előírt deriváltak *tetszőleges* rendűek, explicit megoldást azonban nem ad.

E dolgozat célja, hogy a fenti differenciálegyenletnél általánosabb lineáris differenciál- és differenciaegyenletek, illetve rendszerek *általános*[1] kezdeti feltételeket kielégítő megoldása számára adjon exisztencia-kritériumot, valamint eljárást a megoldás explicit alakban való előállítására. Az 1. §. és 2. §. a rendszerek és az n-edrendű egyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának a meghatározását tartalmazza. A 3. §. és 4. §. az előző két paragrafus eredményeit lineáris differenciaegyenletekre és differenciaegyenlet-rendszerekre alkalmazza.

1. §.

Tekintsük az

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)\, x + f(t) \tag{1.1}$$

[1] „Általános" kezdeti feltételeken a továbbiakban azt értjük, hogy az ismeretlen függvények értéke, illetve az ismeretlen függvény tetszőleges rendű deriváltjai a független változó több különböző értékénél vannak előírva. (Az általános kezdeti feltételek tehát magukban foglalják az úgynevezett kerületi feltételeket is, amelyek egy intervallum két végpontján írják elő a függvény, illetve bizonyos deriváltja értékét.)

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszert, és legyen

(1.2) $$\dot{y} = \mathbf{A}(t)\, y$$

a hozzá tartozó homogén rendszer, ahol $x, y, f(t)$ n-elemű oszlopvektorok, $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ n-edrendű kvadratikus matrix. Az $a_{ij}(t)$ és az $f_i(t)$ adott függvények valamely T $(a \leq t \leq b)$ zárt intervallumban folytonosak.

Az alábbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy létezik-e, és ha igen, hogyan határozható meg az (1.1) differenciálegyenletrendszernek az a megoldása, amely az

(1.3) $$x_{\alpha_i}(t_i) = x_{i0}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$t_i \in T$$

általános kezdeti feltételeket elégíti ki. Itt α_i egész $(1 \leq \alpha_i \leq n)$ és értékei között egyenlők is lehetnek.[2]

Legyen $\mathbf{X}(t) = [x_{ij}(t)]$ az (1.2) egyenlethez tartozó rezolvens matrix, amely tehát kielégíti az

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{X}(t)$$

matrixdifferenciálegyenletet és az $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}$ kezdeti feltételt. Jelölje $x^{\alpha_i}(t_i)$ a rezolvens matrix α_i-edik sorát a t_i helyen, továbbá $[x_{\alpha_i j}(t_i)]$ az e sorokból $(i = 1, 2, \ldots, n)$ alkotott n-edrendű kvadratikus matrixot.

Az (1.1) egyenletrendszer (1.3) feltételeket kielégítő megoldását megkapjuk, ha az (1.2) homogén egyenlet

(1.4) $$y_{\alpha_i}(t_i) = x_{i0}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

inhomogén feltételeket kielégítő megoldásához hozzáadjuk az (1.1) inhomogén egyenletnek az

(1.5) $$x_{\alpha_i}(t_i) = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

homogén feltételeket kielégítő megoldását.

1. tétel. *Az (1.2) homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek akkor és csakis akkor létezik az (1.4) feltételeket kielégítő egyértelmü megoldása, ha*

(1.6) $$|x_{\alpha_i j}(t_i)| \neq 0\,;$$

a megoldást

(1.7) $$y(t\,;\, t, x_0) = \mathbf{X}(t)\, [x_{\alpha_i j}(t_i)]^{-1} x_0$$

szolgáltatja.

---

[2] A t_i értékek között is lehetnek egyenlők, de — amint az a probléma természetéből következik és az 1. tételből is kiolvasható — ha valamennyi t_i megegyezik, akkor α_i értékei között nem lehetnek egyenlők, s ugyanez vonatkozik t_i értékeire, ha valamennyi α_i megegyezik.

Bizonyítás: Az (1.6) feltétel szükséges. Tegyük fel ugyanis, hogy az (1.2) rendszernek létezik az (1.4) feltételeket kielégítő megoldása. Akkor ez az alaprendszert képező $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ vektorok lineáris kombinációjaként előállítható:

$$\text{(1.8)} \qquad \boldsymbol{y}(t\,; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{X}(t)\,\boldsymbol{c}\ .$$

Az (1.8) egyenletnek ki kell elégítenie az (1.4) feltételt:

$$\boldsymbol{x}_0 = [x_{a_i j}(t_i)]\,\boldsymbol{c}\ .$$

Innen a $\boldsymbol{c}$ vektor akkor és csakis akkor határozható meg egyértelműen, ha

$$|x_{a_i j}(t_i)| \neq 0\ .$$

Ekkor

$$\boldsymbol{c} = [x_{a_i j}(t_i)]^{-1}\ \boldsymbol{x}_0\ ,$$

ezt (1.8)-ba helyettesítve, (1.7) adódik.

Az (1.6) feltétel elegendő is. Ugyanis, ha (1.6) teljesül, akkor $[x_{a_i j}(t_i)]$ invertálható. Képezzük az

$$\text{(1,9)} \qquad \mathbf{U}(t) = \mathbf{X}(t)\,[x_{a_i j}(t_i)]^{-1}$$

szorzatot. Az így nyert

$$\mathbf{U}(t) = [\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)]$$

matrix oszlopvektorai az (1.2) rendszer lineárisan független partikuláris megoldásai, tehát alaprendszert alkotnak. Az (1.9) szorzatból kiolvasható, hogy az $\boldsymbol{u}_j(t)$ vektorok elemei az alábbi összefüggésnek tesznek eleget:

$$\text{(1.10)} \qquad u_{a_i j}(t_i) = \delta_{ij}\ , \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Innen következik, hogy az (1.2) egyenlet (1.4) feltételeket kielégítő megoldását az $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)$ alaprendszer segítségével

$$\boldsymbol{y}(t\,; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}_j(t)\, x_{j0} = \mathbf{U}(t)\,\boldsymbol{x}_0$$

alakban kapjuk, ahonnan (1.9) segítségével (1.7) következik.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. tétel. *Ha teljesül az (1.6) feltétel, akkor az (1.1) differenciálegyenletrendszer (1.5) feltételeket kielégítő megoldását*

$$\text{(1.11)} \qquad \boldsymbol{x}(t\,; \boldsymbol{t}, 0) = \mathbf{U}(t)\,\boldsymbol{z}(t)$$

adja, ahol

(1.12)
$$z(t) = [z_j(t)] = \left[\int_{t_j}^{t} \boldsymbol{v}^j(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\right] \qquad j = 1, 2, \ldots, n \;,$$

és

(1.13)
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{v}^n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V}(t) = \mathbf{U}(t)^{-1} \,.$$

Bizonyítás: Ha az (1.1) differenciálegyenletrendszernek az $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ homogén feltételeket kielégítő

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(\tau)^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau$$

megoldásába[3] behelyettesítjük az (1.9) összefüggést, és levonjuk belőle az (1.2) homogén egyenletnek azt az

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{U}(t)\left[\int_{t_0}^{t_j} \boldsymbol{x}^{a_j}(t_j)\,\mathbf{X}(\tau)^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\right]$$

megoldását, amely kielégíti az

$$y_{a_j}(t_j) = x_{a_j}(t_j\,; t_0, 0) \;, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

feltételeket, megkapjuk az (1.1) egyenletnek az (1.5) homogén feltételeket kielégítő megoldását:

(1.14)
$$\boldsymbol{x}(t\,; \boldsymbol{t}, 0) = \mathbf{U}(t)\left[\int_{t_j} \boldsymbol{x}^{a_j}(t_j)\,\mathbf{X}(\tau)^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\right] .$$

Ha még egyszer felhasználjuk az (1.9) összefüggést és bevezetjük az (1.12), (1.13) jelöléseket, a keresett megoldásra (1.11) adódik.

Az 1. és 2. tétel eredményeként kimondhatjuk, hogy *ha*

$$|x_{a_i j}(t_i)| \neq 0 \;,$$

akkor az (1.1) egyenlet (1.3) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását

$$\boldsymbol{x}(t\,; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{U}(t)\,\{\boldsymbol{x}_0 + z(t)\}$$

[3] Lásd pl.: [2], 384. oldal.

azaz

$$x_i(t\,;t_k, x_{k0}) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(t)\{x_{j0} + z_j(t)\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

szolgáltatja, ahol

$$[u_{ij}(t)] = \mathbf{U}(t) = \mathbf{X}(t)\,[x_{\alpha_{ij}}(t_i)]^{-1}\ ,$$

$$z_j(t) = \int_{t_j}^{t} \sum_{k=1}^{n} v_{jk}(\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau$$

és

$$[v_{ij}(t)] = [u_{ij}(t)]^{-1}\ .$$

2. §.

A következőkben meghatározzuk az

$$x^{(n)} = p_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)\, x + f(t) \tag{2.1}$$

n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$x^{(k_i)}(t_i) = x_{i0}\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$k_i \text{ egész } (0 \leqq k_i \leqq n-1)$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldását. A (2.1) egyenlet az

$$x_k(t) = x^{(k-1)}(t)\ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

transzformáció segítségével visszavezethető az

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{P}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{2.4}$$

elsőrendű rendszerre, ahol

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ & & & & 1 \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{és } \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{W}(t) = [w_{ij}(t)]$ a (2.4) egyenlet rezolvens matrixa (ez nem egyéb, mint a (2.1)-hez tartozó homogén egyenlet normált alaprendszert alkotó partikuláris megoldásaiból képzett Wronski-féle matrix), ekkor a (2.4) egyenletnek a (2.2) feltételekből ugyancsak a (2.3) transzformációval nyert

$$x_{\alpha_i}(t_i) = x_{i0}\ , \qquad \alpha_i = k_i + 1$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását az 1. és. 2. tételek felhasználásával

$$\text{(2.5)} \qquad \boldsymbol{x}(t\,;\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{W}(t)\,[w_{a_i j}(t_i)]^{-1}\left\{\boldsymbol{x}_0 + \left[\left[\int\limits_{t_i}^{t} \boldsymbol{w}^{a_i}(t_i)\,\mathbf{W}(\tau)^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\right]\right]\right\}$$

alakban kapjuk. A (2.5) összefüggést a tetszőleges — nem szükségképpen különböző — **B** és **C** nemszinguláris transzformáló matrixok segítségével következőképpen alakítjuk át:

$$\text{(2.6)} \quad \boldsymbol{x}(t\,;\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{W}(t)\,\mathbf{B}\big([w_{a_i j}(t_i)]\,\mathbf{B}\big)^{-1}\left\{\boldsymbol{x}_0 + \left[\left[\int\limits_{t_i}^{t} \boldsymbol{w}^{a_i}(t_i)\,\mathbf{C}(\mathbf{W}(\tau)\,\mathbf{C})^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\right]\right]\right\}.$$

Az itt fellépő $\mathbf{W}(t)\,\mathbf{B}$, illetve $\mathbf{W}(t)\,\mathbf{C}$ a (2.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges — egymástól nem szükségképpen különböző —, lineárisan független $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$, illetve $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ megoldás-rendszeréből képzett Wronski-féle matrix. Ha még figyelembe vesszük, hogy a megoldás-vektornak az első komponense szolgáltatja a keresett megoldást, továbbá az $\boldsymbol{f}(t)$ vektornak csak az utolsó komponense 0-tól különböző, a (2.6) összefüggésből könnyen kiolvasható a következő tétel.

3. tétel. *A (2.1) differenciálegyenlet (2.2) általános kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása akkor és csakis akkor létezik, ha*

$$\text{(2.7)} \qquad |\eta_j^{(k_i)}(t_i)| \neq 0 \,.$$

A megoldást ekkor

$$\text{(2.8)} \qquad x(t\,;t_\varkappa, x_{\varkappa 0}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{H_\nu(t)}{H}\left\{x_{\nu 0} + \int\limits_{t_\nu}^{t} \frac{\Xi_n(\tau,\nu)}{\Xi(\tau)} f(\tau)\,d\tau\right\}$$

szolgáltatja, ahol

$$H = |\eta_j^{(k_i)}(t_i)|\,, \quad \Xi(\tau) = |\xi_j^{(i-1)}(\tau)|\,,$$

továbbá $H_\nu(t)$ a H determinánsból úgy keletkezik, hogy ν-edik sorát az $\eta_1(t)$, $\eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)$ sorral, $\Xi_n(\tau,\nu)$ a $\Xi(\tau)$ determinánsból pedig úgy, hogy utolsó sorát a $\xi_1^{(k_\nu)}(t_\nu), \xi_2^{(k_\nu)}(t_\nu), \ldots, \xi_n^{(k_\nu)}(t_\nu)$ sorral helyettesítjük.

A kapott eredmény magában foglalja mint speciális esetet a szokásos kezdeti feltételek esetét. Ekkor $t_i = t_0$, $k_i = i-1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a (2.8) képlet pedig a következő ismert alakba[4] megy át:

$$x(t\,;t_0, x_{k0}) = \sum_{j=1}^{n} w_{1j}(t)\,x_{j0} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Xi_n(\tau)}{\Xi(\tau)} f(\tau)\,d\tau \,.$$

Itt $\Xi_n(\tau)$ a $\Xi(\tau)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\xi_1(t)$, $\xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ sorral helyettesítjük.

[4] Lásd pl.: [6], II. kötet, 197. oldal.

Példaként meghatározzuk az

$$x^{(n)}(t) = f(t) \tag{2.9}$$

differenciálegyenletnek az

$$x^{(k_i)}(t_i) = x_{i0}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$k_i \text{ egész } (0 \leq k_i \leq n - 1)$$

feltételeket kielégítő megoldását.[5]

Az egyértelmű megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele (2.7) alapján

$$\left| \frac{t_i^{j-1-k_i}}{(j-1-k_i)!} \right| \neq 0\,,$$

ami megegyezik a G. D. BIRKHOFF dolgozatában szereplő feltétellel. Felhasználva a (2.8) összefüggést és kifejtve az integrandusban szereplő determinánsokat, a keresett megoldást

$$x(t\,; t_k, x_{k0}) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(t) \left\{ x_{\nu 0} + \int_{t_\nu}^{t} \frac{(t_\nu - \tau)^{n-k_\nu-1}}{(n - k_\nu - 1)!} f(\tau)\, d\tau \right\}$$

alakban nyerjük, ahol

$$\omega_\nu(t) = \frac{\Omega_\nu(t)}{\Omega}\,, \qquad \Omega = \left| \frac{t_i^{j-1-k_i}}{(j-1-k_i)!} \right|$$

és $\Omega_\nu(t)$ az Ω determinánsból úgy keletkezik, hogy ν-edik sorát az $1, t, \ldots, t^{n-1}/(n-1)!$ sorral helyettesítjük.

Abban a további speciális esetben, amikor a (2.9) egyenlet megoldása az

$$x^{(\nu)}(t_i) = x_i^{(\nu)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 0, 1, \ldots, r_i - 1 \\ \sum_{i=1}^{m} r_i = n \end{array} \tag{2.10}$$

feltételeknek tesz eleget, az $\omega_i(t)$ „alapfüggvények” éppen az Hermite-féle, $k_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ esetén pedig a Lagrange-féle alappolinomok. Ezen esetekben a (2.9) egyenlet megoldására megkapjuk a TH. VAHLEN dolgozatában[6] is szereplő

$$x(t\,; t_k, x_k^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{r_i-1} H_{i\nu}(t) \left\{ x_i^{(\nu)} + \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - \tau)^{n-\nu-1}}{(n - \nu - 1)!} f(\tau)\, d\tau \right\} \tag{2.11}$$

formulát, ahol

$$H_{i\nu}^{(\mu)}(t_j) = \delta_{ij}\, \delta_{\mu\nu}\,.$$

[5] Ezt a fajta feladatot vizsgálja G. D. BIRKHOFF idézett dolgozatában (lásd: [1], 110. oldal).

[6] Lásd: [5], 186. oldal.

3. §.

Ebben a paragrafusban az 1. §-ban közölt gondolatmenetet lineáris differenciaegyenletrendszerekre alkalmazzuk. Tekintsük a

$$\Delta \mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{f}(x+1) - \mathbf{f}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{f}(x) + \mathbf{q}(x) \tag{3.1}$$

lineáris differenciaegyenletrendszert, ahol $\mathbf{f}(x)$ és $\mathbf{q}(x)$ n-elemű oszlopvektorok, $\mathbf{P}(x) = [p_{ij}(x)]$ n-edrendű kvadratikus matrix. Az egyenletben szereplő valamennyi függvény egész argumentumokra van értelmezve. A differenciálegyenletrendszerekhez hasonlóan, a (3.1) egyenletnek az

$$\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}_0 \tag{3.2}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását megkapjuk, ha a

$$\Delta \mathbf{g}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{g}(x) \tag{3.3}$$

homogén egyenletnek a $\mathbf{g}(x_0) = \mathbf{f}_0$ inhomogén feltételeket kielégítő $\mathbf{g}(x\,;\,x_0, \mathbf{f}_0)$ megoldásához hozzáadjuk a (3.1) inhomogén egyenlet $\mathbf{f}(x_0) = 0$ homogén feltételeket kielégítő $\mathbf{f}(x;\,x_0,\,0)$ megoldását. Először meghatározzuk a

$$\Delta \mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{F}(x) \tag{3.4}$$

matrixdifferenciaegyenletnek azt a megoldását, amely kielégíti az

$$\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{E}$$

kezdeti feltételt. Az elsőrendű lineáris differenciaegyenletek elméletében követett eljárást[7] értelemszerűen alkalmazva a (3.4) matrixdifferenciaegyenletre — tekintettel arra, hogy az ekvivalens az

$$\mathbf{F}(x+1) = (\mathbf{E} + \mathbf{P}(x))\mathbf{F}(x)$$

egyenlettel — azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}(x) = (\mathbf{E} + \mathbf{P}(x-1))(\mathbf{E} + \mathbf{P}(x-2))\ldots(\mathbf{E} + \mathbf{P}(x_0))\,. \tag{3.5}$$

Az így nyert $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ rezolvens matrix oszlopvektorai a (3.3) egyenlet lineárisan független partikuláris megoldásai, melyek normált alaprendszert alkotnak.

A rezolvens matrix segítségével a homogén egyenlet keresett megoldása

$$\mathbf{g}(x\,;\,x_0, \mathbf{f}_0) = \mathbf{F}(x)\mathbf{f}_0 \tag{3.6}$$

alakban adódik, az inhomogén egyenlet $\mathbf{f}(x\,;\,x_0,\,0)$ partikuláris megoldása pedig az állandó variálása néven ismert módszer differenciaegyenletrendszerekre való alkalmazásával nyerhető :

$$\mathbf{f}(x\,;\,x_0, 0) = \mathbf{F}(x)\sum_{\nu=x_0}^{x-1}\mathbf{F}(\nu+1)^{-1}\mathbf{q}(\nu)\,. \tag{3.7}$$

---

[7] Lásd : [3], 296. oldal.

A (3.1) egyenlet (3.2) feltételeket kielégítő megoldása tehát

$$f(x;x_0,f_0)=\mathbf{F}(x)\left\{f_0+\sum_{\nu=x_0}^{x-1}\mathbf{F}(\nu+1)^{-1}q(\nu)\right\}. \tag{3.8}$$

Az 1. §-ban kifejtett meggondolás alkalmazásával megkaphatjuk a (3.1) differenciaegyenletrendszernek

$$f_{a_i}(x_i)=f'_i \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{3.9}$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását. Jelölje $f^{a_i}(x_i)$ a rezolvens matrix α_i-edik sorát az x_i helyen és $[f_{a_ij}(x_i)]$ az e sorokból ($i=1,2,\ldots,n$) alkotott kvadratikus matrixot. Az 1. és 2. tétel analógiájára könnyen bebizonyítható a következő két tétel:

4. tétel. *A (4.3) homogén lineáris differenciaegyenletrendszernek akkor és csakis akkor létezik a*

$$[g_{a_i}(x_i)]=f'$$

inhomogén feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása, ha

$$|f_{a_ij}(x_i)|\neq 0\ ; \tag{3.10}$$

a megoldást

$$g(x;x,f')=\mathbf{F}(x)\,[f_{a_ij}(x_i)]^{-1}f'$$

szolgáltatja.

5. tétel. *Ha teljesül a (3.10) feltétel, akkor a (3.1) inhomogén lineáris differenciaegyenletrendszer*

$$f_{a_i}(x_i)=0 \tag{3.11}$$

homogén feltételeket kielégítő megoldását

$$f(x;x,0)=\mathbf{T}(x)\,h(x) \tag{3.12}$$

adja, ahol

$$\mathbf{T}(x)=\mathbf{F}(x)\,[f_{a_ij}(x_i)]^{-1}\ , \tag{3.13}$$

$$h(x)=[h_i(x)]=\left[\sum_{\nu=x_i}^{x-1}\mathbf{s}^i(\nu+1)\,q(\nu)\right] \tag{3.14}$$

és

$$\begin{bmatrix}\mathbf{s}^1(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathbf{s}^n(x)\end{bmatrix}=\mathbf{S}(x)=\mathbf{T}(x)^{-1}\ . \tag{3.15}$$

A 4. tétel bebizonyítása teljesen megegyezik az 1. tételével, az 5. tétel bizonyítása pedig a következő: Ha a (3.1) differenciaegyenletrendszernek a homogén feltételeket kielégítő (3.7) megoldásába behelyettesítjük a (3.13) összefüggést és levonjuk belőle a (3.3) homogén egyenletnek azt a

$$\boldsymbol{g}(x) = \mathbf{T}(x)\left[\sum_{\nu=x_0}^{x_j-1} \boldsymbol{f}^{\alpha_j}(x_j)\,\mathbf{F}(\nu+1)^{-1}\,\boldsymbol{q}(\nu)\right]$$

megoldását, amely a

$$g_{\alpha_j}(x_j) = f_{\alpha_j}(x_j\,; x_0, 0)\ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

feltételeket elégíti ki, a (3.1) egyenletnek a (3.11) homogén feltételeket kielégítő megoldására

$$\boldsymbol{f}(x\,; \boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{T}(x)\left[\sum_{\nu=x_j}^{x-1} \boldsymbol{f}^{\alpha_j}(x_j)\,\mathbf{F}(\nu+1)^{-1}\,\boldsymbol{q}(\nu)\right] \tag{3.16}$$

adódik. Abban az esetben, amikor $x < x_j$, a (3.16) kifejezésben szereplő szummát a

$$\sum_{\nu=x_j}^{x-1} = -\sum_{\nu=x}^{x_j-1}$$

összefüggés definiálja. Ismét felhasználva a (3.13) összefüggést, és bevezetve a (3.14), (3.15) jelöléseket, a keresett megoldásra megkapjuk a (3.12) kifejezést.

A 4. és 5. tétel eredményeként kimondható, hogy *ha*

$$|f_{\alpha_i j}(x_i)| \neq 0\ ,$$

akkor a (3.1) differenciaegyenletrendszer (3.9) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását

$$\boldsymbol{f}(x\,; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}') = \mathbf{T}(x)\,\{\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{h}(x)\}\ ,$$

azaz

$$f_i(x\,; x_k, f_k') = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}(x)\,\{f_j' + h_j(t)\}$$

szolgáltatja, ahol

$$[t_{ij}(x)] = \mathbf{T}(x) = \mathbf{F}(x)\,[f_{\alpha_i j}(x_i)]^{-1}\ ,$$

$$h_i(x) = \sum_{\nu=x_i}^{x-1}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}(\nu+1)\,q_k(\nu)$$

és

$$[s_{ik}(x)] = [t_{ik}(x)]^{-1}\ .$$

4. §.

Ebben a paragrafusban a

$$\Delta^n f(x) = p_{n-1}(x)\,\Delta^{n-1} f(x) + \ldots + p_0(x)\,f(x) + q(x) \tag{4.1}$$

n-edrendű lineáris differenciaegyenlet különféle kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának meghatározásával foglalkozunk. Az együtthatók egész argumentumokra értelmezett függvények.

A (4.1) egyenlet az

$$f_k(x) = \Delta^{k-1} f(x)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2}$$

transzformációval visszavezethető egy speciális (3.1) alakú differenciaegyenlet-rendszerre, ahol

$$\mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ p_0(x) & p_1(x) & \ldots & & p_{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{q}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Az így nyert rendszernek az

$$f_k(x_0) \equiv \Delta^{k-1} f(x_0) = f_{k0}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldására érvényes a (3.8) összefüggés. Egy tetszőleges, nem-szinguláris **C** transzformáló matrix segítségével ez az összefüggés a következőképpen alakítható át:

$$\boldsymbol{f}(x\,; x_0, \boldsymbol{f}_0) = \mathbf{F}(x)\,\boldsymbol{f}_0 + \mathbf{F}(x)\,\mathbf{C} \sum_{\nu=x_0}^{x-1} (\mathbf{F}(\nu+1)\,\mathbf{C})^{-1} \boldsymbol{q}(\nu)\,. \tag{4.5}$$

Az $\mathbf{F}(x)\mathbf{C}$ matrix, a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges, lineárisan független $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ megoldásaiból, és ezek differenciáiból képzett — a Wronski-féle matrixra emlékeztető — matrix. Bennünket azonban nem a (4.1) differenciaegyenletből a (4.2) transzformációval nyert rendszernek, hanem magának a (4.1) egyenletnek a megoldása érdekel, ezt pedig a (4.5) megoldás-vektornak az első komponense szolgáltatja. Ha még figyelembe vesszük — az 1. §-ban vázolt gondolatmenethez hasonlóan —, hogy a $\boldsymbol{q}(x)$ vektornak csak az utolsó komponense 0-tól különböző, akkor a (4.4) feltételeket kielégítő megoldás a következő alakban adódik:

$$f(x\,; x_0, f_{\varkappa 0}) = \sum_{k=1}^{n} f_{1k}(x)\,f_{k0} + \sum_{\nu=x_0}^{x-1} \frac{\Delta_n(\nu)}{\Delta(\nu)}\,q(\nu)\,.$$

Itt $\Delta(\nu) = |\,\Delta^{i-1}\varphi_j(\nu+1)\,|$ és $\Delta_n(\nu)$ a $\Delta(\nu)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sorral helyettesítjük. Az $f_{1k}(x)$ függvények a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet normált alaprendszert alkotó megoldásai, melyek az $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ rezolvens matrix (3.5) kifejezéséből (4.3) figyelembevételével határozhatók meg.

A továbbiakban a (4.1) egyenletnek az

(4.6) $$f(x_k) = f'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \; x_k \text{ egész}$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldását kívánjuk meghatározni. Mielőtt azonban erre rátérnénk, a (4.6) feltételeknek az

$$x_k = x_0 + k - 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

speciális esetét tekintjük. Ez mintegy átmenetet képez a (4.4) és az általános (4.6) feltételek között.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$[f(x_0 + k - 1)] = [f'_{k0}] = f'_0$$

az adott kezdeti értékekből, mint komponensekből alkotott vektor,

$$f_0 = [f_{k0}]$$

pedig a (4.4) összefüggéssel definiált értékekből alkotott vektor. Továbbá, bevezetve a

$$\mathbf{H} = \left[\binom{i-1}{j-1}\right]$$

háromszögmatrixot, könnyen belátható, hogy az f'_0 és f_0 vektorok a következő transzformációval kapcsolhatók össze:

(4.7) $$f'_0 = \mathbf{H} f_0 .$$

Itt jegyezzük meg, hogy a $\mathbf{H}$ matrix, a $\mathbf{D} = \langle(-1)^{k-1}\rangle$ diagonálmatrix segítségével képzett hasonló transzformációval invertálható:[8]

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{DHD}^{-1} .$$

Ha az $\mathbf{F}(x)$ rezolvens matrixra alkalmazzuk a $\mathbf{H}$ transzformációt, (4.4) figyelembevételével az

(4.8) $$\mathbf{F}'(x) = \mathbf{HF}(x) = [f_{1j}(x + i - 1)]$$

összefüggést kapjuk.

---

[8] A fenti összefüggés felírható a

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+j} \binom{i-1}{\nu-1}\binom{\nu-1}{j-1} = \delta_{ij}$$

alakban is. Ez valóban fennáll, mert

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+j} \binom{i-1}{\nu-1}\binom{\nu-1}{j-1} = (-1)^j \sum_{\nu=j}^{i} (-1)^\nu \frac{(i-1)!}{(j-1)!\,(i-\nu)!\,(\nu-j)!} =$$

$$= (-1)^j \binom{i-1}{j-1} \sum_{\nu=j}^{i} (-1)^\nu \binom{i-j}{\nu-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{\varkappa=0}^{i-j} (-1)^\varkappa \binom{i-j}{\varkappa} = \delta_{ij} .$$

Ezek után a (4.1) egyenletből a (4.2) transzformációval nyert differenciaegyenletrendszer (4.4) feltételeket kielégítő (3.8) alakú megoldását kissé átalakítjuk. Szorozzuk meg a (3.8) megoldási formula mindkét oldalát balról a **H** matrixszal, vegyük figyelembe a (4.8) összefüggést, és amint azt a (4.5) formulánál tettük, egy tetszőleges, nem-szinguláris **C** matrix segítségével hozzuk a következő alakra:

$$(4.9)\qquad \mathbf{H}\mathbf{f}(x;x_0,\mathbf{f}_0)=\mathbf{F}'(x)\mathbf{f}_0+\mathbf{F}'(x)\,\mathbf{C}\sum_{\nu=x_0}^{x-1}(\mathbf{F}'(\nu+1)\,\mathbf{C})^{-1}\mathbf{H}\,\mathbf{q}(\nu)\,.$$

Az itt szereplő

$$\mathbf{F}'(x)\,\mathbf{C}=[\varphi_j(x+i-1)]$$

matrixban szereplő függvények a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges, lineárisan független megoldásai. Felhasználva a (4.7) összefüggést, (4.9) első komponensére

$$(4.10)\qquad f(x;x_0,f'_{x0})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}i-1\\j-1\end{vmatrix}f'_{i0}\,f_{1j}(x)+\sum_{\nu=x_0}^{x-1}\frac{\Phi_n(\nu,x)}{\Phi(\nu)}\,q(\nu)$$

adódik, ahol $\Phi(\nu)=|\,\varphi_j(\nu+i)\,|$ és $\Phi_n(\nu,x)$ a $\Phi(\nu)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ sorral helyettesítjük.[9] Ezzel megkaptuk a (4.1) egyenletnek (4.6) feltételeket kielégítő megoldását $x_k=x_0+k-1$ esetén.

Visszatérve a (4.1) egyenlet (4.6) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldására, ezt a 3. § eredményeinek a felhasználásával a következőképpen határozhatjuk meg. Vezessük be a kezdeti értékekből, mint komponensekből alkotott

$$[f(x_k)]=[f'_k]=\mathbf{f}'$$

vektort. A. 4. és 5. tételek alkalmazásával közvetlenül adódik a

$$\mathbf{H}\mathbf{f}(x;\boldsymbol{x},\mathbf{f}')=\mathbf{F}'(x)\,[f_{1j}(x_i)]^{-1}\left\{\mathbf{f}'+\sum_{\nu=x_i}^{x-1}\mathbf{f}^1(x)\,(\mathbf{F}'(\nu+1))^{-1}\,\mathbf{H}\,\mathbf{q}(\nu)\right\}$$

összefüggés, amely a tetszőleges — nem szükségképpen különböző — **B** és **C** nemszinguláris transzformáló matrixok segítségével — hasonlóan ahhoz, ahogy azt a 2. §-ban tettük — így alakítható át:

$$(4.11)\quad \mathbf{H}\mathbf{f}(x;\boldsymbol{x},\mathbf{f}')=\mathbf{F}'(x)\,\mathbf{B}\,([f_{1j}(x_i)]\,\mathbf{B})^{-1}\left\{\mathbf{f}'+\sum_{\nu=x_i}^{x-1}\mathbf{f}^1(x_i)\,\mathbf{C}\,(\mathbf{F}'(\nu+1)\,\mathbf{C})^{-1}\,\mathbf{H}\mathbf{q}(\nu)\right\}.$$

Az itt szereplő $\mathbf{F}'(x)\,\mathbf{B}=[\psi_j(x+i-1)]$, illetve $\mathbf{F}'(x)\,\mathbf{C}=[\varphi_j(x+i-1)]$ matrixban szereplő függvényrendszer a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges — egymástól nem szükségképpen különböző — lineárisan független

---

[9] A (4.10) kifejezés első tagja az $\mathbf{f}^1(x)\,\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f}'_0$ szorzat részletesen kiírva. A második tag megegyezik az irodalomból ismert eredménnyel (lásd pl.: [3], 313. oldal).

megoldásrendszere. A keresett megoldást a (4.11) összefüggés első komponense adja meg. Erre érvényes az alábbi tétel:[10]

6. tétel. *A (4.1) differenciaegyenlet (4.6) általános kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása akkor és csakis akkor létezik, ha*

$$|\psi_j(x_i)| \neq 0 .$$

A megoldást ekkor

$$f(x\,;x_\varkappa, f'_\varkappa) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi_k(x)}{\Psi} \left\{ f'_k + \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{\Phi_n(\nu, x_k)}{\Phi(\nu)} q(\nu) \right\} \tag{4.12}$$

szolgáltatja, ahol $\Psi = |\psi_j(x_i)|$ *és* $\Psi_k(x)$ *a* Ψ *determinánsból úgy keletekezik, hogy k-adik sorát a* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ *sorral helyettesítjük.* ($\Phi(\nu)$ *és* $\Phi_n(\nu, x_k)$ jelentése a (4.10) képlet után található.)

(Beérkezett: 1957. III. 11.)

IRODALOM

[1] Birkhoff, G. D.: „General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature". *Transactions of the American Mathematical Society* **7** (1906) 107—136.
[2] Гантмахер Ф. Р.: *Теория матриц.* Гостехиздат, Москва, 1953.
[3] Gelfond, A. O.: *Differenciaszámítás.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
[4] Rózsa P.: „A matrix-számítás alkalmazása rudak és lemezek sztatikájában". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 593—621.
[5] Vahlen, K. Th.: „Über den Heaviside-Kalkül". *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933) 183—198.
[6] de La Vallée Poussin, Ch. J.: *Cours d'analyse infinitésimale.* Gauthier-Villars, Paris, 1925.

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБЩИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

P. RÓZSA

Резюме

Литература, относящаяся к линейным дифференциальным уравнениям и системам, даёт явное представление решения лишь в том случае, когда неизвестная функция и её производные или неизвестные функции даны *при некотором* значении независимой переменной. Это привычные начальные условия. Для решения более общей задачи, когда неизвестная функция и её последовательные производные даны при нескольких *различных* значе-

[10] Az eredmény egy speciális esetének konkrét gyakorlati alkalmazását illetően lásd: [4], 600—601. és 612—615. oldalak.

ниях независимого переменного, Th. Vahlen даёт в работе [5] метод построения явного решения в случае очень специального дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$.

Настоящая работа, обобщая метод Th. Vahlen, даёт критерий существования а также метод получения в явной форме решения наиболее общих линейных дифференциальных и разностных уравнений и их систем (с переменными коэффициентами), удовлетворяющих общим начальным условиям.

Пусть $\mathbf{X}(t) = [x_{ij}(t)]$ есть так называемая резольвентная матрица однородной системы (1,2), относящейся к данной неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений (1.1), которая, таким образом, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}(t)$$

и начальному условию $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}$. В силу теорем 1 и 2 система дифференциальных уравнений (1.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее общему начальному условию (1.3), в том и только в том случае, если $|x_{a_i j}(t_i)| \neq 0$; решение даётся формулей

$$\boldsymbol{x}(t\,;\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}') = \mathbf{U}(t)\,\{\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{z}(t)\}\ ,$$

где значение $\mathbf{U}(t)$ и $\boldsymbol{z}(t)$ даётся выражениями (1.9), (1.12) и (1.13).

Теорема 3 применяет эти результаты для случая линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка. Пусть $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ и $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ суть любые линейно-независимые системы решений относящегося к (2.1) однородного уравнения. Теорема 3 утверждает, что единственное решение дифференциального уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.2), существует в том и только в том случае, если $|\eta_j^{(k_i)}(t_i)| \neq 0$. Решение даётся выражением (2.8). В случае дифференциального уравнения (2.9) и начальных условий (2.10), получается соотношение (2.11), фигурирующее и в работе Th. Vahlen.

Дальнейшая часть работы содержит применение полученных результатов к линейным системам разностных уравнений первого порядка и линейным разностным уравнениям n-го порядка. Пусть $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ есть резольвентная матрица однородной системы (3.3), относящейся к (3.1), которая, таким образом, удовлетворяет уравнению (3.4) и начальному условию $\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{E}$. В силу теорем 4 и 5 система разностных уравнений (3.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее общим начальным условиям (3.9), в том и только в том случае, если $|f_{a_i j}(x_i)| \neq 0$. Решение даётся формулой $\boldsymbol{f}(x\,;\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}') = \mathbf{T}(x)\,\{\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{h}(x)\}$, где значения $\mathbf{T}(x)$ и $\boldsymbol{h}(x)$ даются выражениями (3.13), (3.14) и (3.15). Наконец, теорема 6 утверждает, что, если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ суть любые линейно-независимые системы решений относящихся к (4.1) однородного линейного разностного уравнения, то единственное решение линейного разностного уравнения (4.1), удовлетворяющее общему начальному условию (4.6), существует в том и только в том случае, если $|\psi_j(x_i)| \neq 0$.. В этом случае решение даётся выражением (4.12). Автор применял этот метод в своей работе (4), где он дал решение одного разностного уравнения четвёртого порядка, удовлетворяющего специальным начальным условиям.

ON THE EXPLICIT SOLUTION OF DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS SATISFYING GENERAL INITIAL CONDITIONS

P. RÓZSA

Summary

The literature of linear differential equations and that of the systems of linear differential equations gives their solution in explicit form in general only in the customary case if the unknown function and its derivatives, respectively the unknown functions are given at a single value of the independent variable. For the solution of the more general problem, when the unknown function and its successive derivatives are prescribed at several *different* values of the independent variable, a method can be found in a paper of TH. VAHLEN [5] who gives the explicit solution satisfying the conditions mentioned above for the special differential equation $y^{(n)} = f(x)$.

The present paper — generalizing TH. VAHLEN's method — gives the condition of existence and a method of solution in explicit form, of the most general linear differential equations and of systems of linear differential equations (with variable coefficients), satisfying *general* initial conditions mentioned above.

Let $\mathbf{X}(t) = [x_{ij}(t)]$ be the resolvent matrix of the homogeneous system (1.2) belonging to the given system of nonhomogeneous linear differential equations of the 1st order (1.1). The resolvent matrix satisfies the differential equation

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}(t)$$

and the initial condition $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}$. According to Theorems 1. and 2. the unique solution of the system of differential equations (1.1) satisfying the general initial conditions (1.3) exists if and only if $| x_{a_ij}(t_j) | \neq 0$; the solution is given by

$$\boldsymbol{x}(t\,;\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}') = \mathbf{U}(t)\,\{\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{z}(t)\}$$

where the meaning of $\mathbf{U}(t)$ and $\boldsymbol{z}(t)$ can be seen from the formulae (1.9), (1.12) and (1.13).

Theorem 3. applies the above mentioned results to linear differential equations of the n^{th} order. Let $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, resp. $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ be arbitrary, linearly independent systems of solutions of the homogeneous equation corresponding to (2.1). Theorem 3. states that the unique solution of the differential equation (2.1) satisfying the general initial conditions (2.2) exists if and only if $| \eta_j^{(k_i)}(t_i) | \neq 0$. The solution is represented by (2.8). Applying Theorem 3. we obtain the expression (2.11), occurring in the paper of TH. VAHLEN too, for the solution of the differential equation (2.9) satisfying the initial conditions (2.10).

Further our results are applied to systems of linear difference equations of the 1st order and linear difference equations of the n^{th} order. Let $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ be the resolvent matrix of the homogeneous equation (3.3) belonging to (3.1). This resolvent matrix satisfies the difference equation (3.4) and the initial condition $\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{E}$. According to Theorems 4. and 5. the unique

solution of the system of linear difference equations (3.1) satisfying the general initial condition (3.9) exists if and only if $| f_{a_{ij}}(x_i) | \neq 0$. The solution is given by $\boldsymbol{f}(x\,;\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}') = \mathbf{T}(x)\,\{\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{h}(x)\}$ where the meaning of $\mathbf{T}(x)$ and $\boldsymbol{h}(x)$ is to be seen from formulae (3.13), (3.14) and (3.15). Finally Theorem 6. states that if $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ resp. $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ are arbitrary, linearly independent systems of solutions of the homogeneous linear difference equation belonging to (4.1) the unique solution of the linear difference equation of the n^{th} order (4.1) satisfying the general initial conditions (4.6) exists if and only if $| \psi_j(x_i) | \neq 0$. The solution is given by the expression (4.12). The author applied this method in his paper [4] where he gave the solution of a difference equation of the 4^{th} order satisfying particular initial conditions.