**SULLA CARATTERIZZABILITÀ DELL'EQUAZIONE
DEL CALORE DAL PUNTO DI VISTA DEL CALCOLO
DELLE VARIAZIONI**

GYÖRGY ADLER

È ben noto che due equazioni alle derivate parziali spesso adoperate nella fisica matematica, e cioè l'equazione di Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

e l'equazione delle onde

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

possono essere considerate come equazioni di Euler¹⁾ dei problemi seguenti del calcolo delle variazioni [1] (pp. 244—247):

$$(1') \quad \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right] d\tau = \int F_1 d\tau = \text{minimo},$$

risp.

$$(2') \quad \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau = \int F_2 d\tau = \text{minimo},$$

dove gli integrali si riferiscono a qualche dominio dello spazio $(x_1, \dots, x_n)$ risp. dello spazio $(x_1, \dots, x_n; t)$.

L'equazione (1) è di tipo ellittico, e quella (2) di tipo iperbolico. Il fatto che queste equazioni possono essere considerate come equazioni di Euler dei problemi del calcolo delle variazioni è di grande importanza da molti punti di vista, così per esempio dal punto di vista della soluzione numerica di queste equazioni.

Si imposta il problema di per sè se l'equazione del calore di tipo parabolico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

¹⁾ Questo è vero in generale anche per equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico ed iperbolico a coefficienti non costanti [2] (p. 893).

possa essere considerata come equazione di Euler di qualche problema del calcolo delle variazioni. Le nostre ricerche precedenti hanno dato un solo risultato negativo che sorprende, risultato che può essere dimostrato in modo molto semplice.

Teorema. *Non esiste una tale funzione $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ analitica in qualche dominio R dello spazio $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, che l'equazione di Euler appartenente al problema*

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

del calcolo delle variazioni (dove D significa qualche subdominio di R e supponiamo che anche i valori in questione delle funzioni u, u_x ed u_t si trovano nel dominio R) sia l'equazione

$$(4) \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

del calore.

Dimostrazione. Supponiamo che esiste una tale funzione analitica $F(x, t; u, u_x, u_t)$. Sviluppiamo questa funzione in serie nell'intorno di un punto del dominio D , che sia — senza restrizione della generalità — l'origine del sistema di coordinati:

$$F = \sum_{k,l,m,p,q} a_{k,l,m,p,q} x^k t^l u^m u_x^p u_t^q.$$

L'equazione di Euler del problema (3) è:

$$(5) \quad F_u - \frac{dF_{u_x}}{dx} - \frac{dF_{u_t}}{dt} = 0.$$

Sostituendovi la serie di sopra della funzione F , l'equazione (5) ha la forma seguente:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\epsilon [(1-\delta-\epsilon)(\gamma+1)a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\epsilon} - (\delta+1)(\alpha+1)a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\epsilon} - \\ & \quad - (\epsilon+1)(\beta+1)a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\epsilon+1}] - \\ & - u_{xx} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\epsilon [(\delta+1)(\delta+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\epsilon}] - \\ & - u_{tt} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\epsilon [(\epsilon+1)(\epsilon+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon+2}] - \\ & - u_{xt} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\epsilon [2(\delta+1)(\epsilon+1)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+1,\epsilon+1}] = 0. \end{aligned}$$

Per dimostrare l'affermazione si deve far vedere che il primo membro dell'equazione (6) non può essere di forma

$$(6^*) \quad \Phi(x, t; u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) [u_{xx} - u_t],$$

dove $\Phi \not\equiv 0$ perchè, altrimenti divisa l'equazione con Φ , otterremo l'equazione (4) del calore.

Considerato che nell'equazione (6) tra i moltiplicatori di u_{xx} soltanto le derivate parziali della funzione u di primo ordine, al più, possono riscontrarsi, Φ non può dipendere dalle derivate parziali di u di secondo ordine. Dunque nell'equazione (6) i termini contenenti le derivate u_{xt} ed u_{tt} s'annullano. Questo significa che

- (a) $a_{k,l,m,p,q} = 0$ se $q > 1$,
 (b) ed $a_{k,l,m,p,q} = 0$ se $p > 0$ e $q > 0$ nello stesso tempo.

Il moltiplicatore di u_{xx} nell'equazione (6) è:

$$-\sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon (\delta+1)(\delta+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\varepsilon},$$

mentre il moltiplicatore di $-u_t$ è:

$$\begin{aligned} & -\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,\varepsilon=1}^{\infty} x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^{\varepsilon-1} [(1-\delta-\varepsilon)(\gamma+1)a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon} - (\delta+1)(\alpha+1)a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon} - \\ & \qquad \qquad \qquad - (\varepsilon+1)(\beta+1)a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+1}] = \\ & = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon=0}^{\infty} x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [(-\delta-\varepsilon)(\gamma+1)a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon+1} - (\delta+1)(\alpha+1)a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon+1} - \\ & \qquad \qquad \qquad - (\varepsilon+2)(\beta+1)a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+2}]. \end{aligned}$$

Questi due moltiplicatori devono essere identici, dunque i coefficienti nelle serie di questi moltiplicatori si devono identificare:

$$\begin{aligned} & (\delta+1)(\delta+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\varepsilon} = \\ (7) \quad & = (-\delta-\varepsilon)(\gamma+1)a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon+1} - (\delta+1)(\alpha+1)a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon+1} - \\ & \qquad \qquad \qquad - (\varepsilon+2)(\beta+1)a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+2}. \end{aligned}$$

Nel caso di $\varepsilon=0$, in virtù dei risultati sotto (a) e (b) otteniamo da (7), che

$$(c) \quad a_{k,l,m,p,q} = 0 \text{ se } p > 1.$$

Sommati i risultati sotto (a), (b) e (c) vediamo che i coefficienti $a_{k,l,m,p,q}$ si devono annullare, eccetto i seguenti tre casi possibili:

1. $p=0, q=0$;
2. $p=0, q=1$;
3. $p=1, q=0$.

Dunque la funzione F può essere soltanto della seguente forma:

$$F = \sum_{k,l,m} x^k t^l u^m (a_{k,l,m,0,0} + a_{k,l,m,1,0} u_x + a_{k,l,m,0,1} u_t).$$

Si verifica con una semplice sostituzione che con la suddetta scelta della funzione F l'equazione (6) di Euler non contiene nessuna derivata della funzione u , e così quella non può essere di forma (6*), dove abbiamo supposto $\Phi \equiv 0$. Qu. e. d.

Questo risultato è sorprendente perchè, da un lato le funzioni F_1 e F_2 figuranti nei problemi (1') e (2'), problemi che hanno per equazioni di Euler quelle (1) e (2) di tipo ellittico risp. iperbolico, sono semplici polinomi delle

sue variabili, dall'altro un problema conducente a una equazione di tipo parabolico non può essere prodotto nemmeno con l'aiuto di una funzione analitica.

La difficoltà di costruire un problema che abbia come equazione di Euler quella (4), può essere messa in chiaro mediante il processo seguente. L'equazione (4) può essere ottenuta da quella

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\varepsilon > 0)$$

di tipo ellittico in caso che $\varepsilon \rightarrow 0$. È facile costruire un problema del calcolo delle variazioni che ha come equazione di Euler l'equazione (8). Questo problema è il seguente:

$$\delta \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\varepsilon} u^2 \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} t} dx dt = 0.$$

Si può vedere che, in caso che $\varepsilon \rightarrow 0$, questo problema perde il significato e così il tentativo di produrre nel modo suddetto un problema che conduca all'equazione (4), fallisce.

(Ricevuto: 15. XII. 1957.)

BIBLIOGRAFIA

- [1] COURANT, R.—HILBERT, D.: *Methods of mathematical physics*. Interscience Publishers, New York — London, 1953.
 [2] FRANK, PH.—MISES, R. VON: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930.

A HŐVEZETÉS EGYENLETÉNEK VARIÁCIÓSZÁMÍTÁSI JELLEMEZHETŐSÉGÉRŐL

ADLER GY.

Kivonat

A szerző azzal a problémával foglalkozik, hogy a hővezetés egyenlete tekinthető-e valamilyen variációszámítási feladat Euler-egyenletének. E kérdés felvetése azért természetes, mert ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet és a hullámgörbe felfoghatók megfelelő variációszámítási feladatok Euler-egyenleteiként. Erre vonatkozóan a szerző a következő, negatív választ adó tételt bizonyítja be:

Tétel. Nem létezik olyan, az $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tér valamely R tartományában analitikus $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ függvény, amelyhez tartozó

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

variációszámítási probléma (ahol D az R tartomány valamely résztartományát

jelenti, és feltételezzük, hogy u , u_x és u_t szóbajövő értékei szintén az R tartományba esnek) Euler-egyenlete a hővezetés

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

differenciálegyenlete.

ВАРИАЦИОННО-ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИЗИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

GY. ADLER

Резюме

Автор занимается следующей задачей: является ли уравнение теплопроводности уравнением Euler-а некоторой вариационной задачи? Постановка этого вопроса естественна, потому что известно, что уравнение Laplace-а и волновое уравнение могут быть рассмотрены, как уравнения Euler-а соответствующей вариационной задачи. Он доказывает следующую теорему, дающую отрицательный ответ:

Т е о р е м а. Не существует такой, аналитической в некоторой области R пространства $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ функции $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, что вариационная задача

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

(где D является некоторой подобластью области R и предполагается, что допустимые значения u , u_x и u_t также принадлежат области R) имеет уравнением Euler дифференциальное уравнение теплопроводности

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$