REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, I.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

1. Le comportement de la série de Taylor sur son cercle de convergence a été l'objet de nombreuses recherches. Un résultat particulièrement intéressant a été récemment obtenu à ce sujet par M. P. TURÁN [1].

Il envisage notamment une fonction $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$, telle que la fonction

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right)$$

est également régulière dans le cercle-unité, si le nombre complexe $\zeta_0 \neq 0$ est inférieur à 1 en valeur absolue. Il range les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ dans une même classe, et les considère comme »équivalentes du point de vue de la théorie des fonctions«; il soulève ensuite le problème tout naturel: sont-elles »équivalentes du point de vue de la théorie des séries«. Pour expliquer ce qu'on entend par cette équivalence il faut formuler la question d'une manière plus précise: La fonction $f_1(z)$ étant régulière dans le cercle-unité, elle peut être développée en série de Taylor pour $|z| < 1$, soit

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu .$$

La question s'énonce alors ainsi: La convergence de cette série au point $z = 1$ a-t-elle pour conséquence nécessaire la convergence de la série

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$$

au point

$$z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} = e^{i\gamma} \qquad (\gamma \text{ réel})$$

solution de l'équation

$$\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = 1 .$$

Sa réponse négative s'exprime par le théorème suivant:

Étant donné un nombre complexe $\zeta_0 \neq 0$ dans le cercle-unité on peut trouver une fonction

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.1}$$

régulière dans le cercle $|z| < 1$, *telle que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{1.2}$$

soit convergente et que la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \tag{1.3}$$

soit divergente au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

En d'autres termes, malgré la convergence de la série (1.2), la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu \tag{1.4}$$

est divergente, pourvu que la fonction $f_1(z)$ soit convenablement choisie.

M. Turán a démontré encore que la sommabilité au sens d'Abel de la série (1.1) au point $z = 1$ a pour conséquence la sommabilité au sens d'Abel de la série (1.3) au point $z = (1+\zeta_0)\,(1+\bar{\zeta}_0)$. En outre, il pose dans son article différents problèmes à résoudre dans le même ordre d'idées, en particulier : peut-on conclure de la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.2) la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.4)?

C'est ce dernier problème qui nous intéresse, mais nous traitons une question un peu plus générale en examinant la sommabilité (C, k) des deux séries mentionnées ci-dessus, k étant un nombre entier positif. Nous allons prouver que la sommabilité (C, k) de la série (1.2) n'entraîne pas nécessairement la sommabilité (C, k) de la série (1.4).

2. Dans ce qui suit nous gardons les notations précédentes et nous désignons de plus la n-ième moyenne (C, k) de la série (1.2) par $\alpha_n^{(k)}$ et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.4). Le théorème que nous venons d'énoncer peut donc être formulé d'une façon plus précise.

Théorème. *Étant donné un nombre complexe* $\zeta_0 \neq 0$ *dans le cercle-unité, on peut trouver une fonction*

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2.1}$$

régulière dans le cercle $|z| < 1$, *telle que la série* $\sum_\nu a_\nu$ *soit sommable* (C, k), *c'est-à-dire que la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)} = A < \infty \tag{2.2}$$

existe, et que la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \tag{2.3}$$

ne soit pas sommable (C, k) au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

autrement dit, que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} \tag{2.4}$$

n'existe pas.

Démonstration. L'idée de notre raisonnement est de prouver qu'entre les $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ on peut établir une relation de la forme

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} , \tag{2.5}$$

où les $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ ne dépendent que de n, ν, k et ζ_0. La relation (2.5) définit un procédé de sommation qui serait régulier si les conditions de TOEPLITZ—SCHUR étaient remplies. Or, nous allons constater qu'il n'existe pas de constante K telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de n. Il existe donc des suites convergentes $\{\sigma_n\}$ qui se transforment par la matrice $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ en suites divergentes $\{\tau_n\}$. Posons donc

$$a_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right] \qquad n = 1, 2, \ldots$$

alors

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

est convergente pour $|z| < 1$ et $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$. Par conséquent la fonction $f_1(z)$ satisfait aux conditions du théorème.

Pour arriver à cette fin nous partons d'une relation classique valable pour tous les $|s| < 1$ et qui lie entre elles les suites $\{a_n\}$ et $\{\alpha_n^{(k)}\}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \alpha_n^{(k)} s^n = \frac{1}{(1-s)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \frac{f_1(s)}{(1-s)^{k+1}} = P_k(s) , \tag{2.6}$$

d'où

$$f_1(s) = (1-s)^{k+1} P_k(s) . \tag{2.7}$$

1*

De même

$$(2.8)\quad \begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\beta_n^{(k)}s^n=\\&=\frac{1}{(1-s)^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n s^n=\frac{f_2\left(\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}s\right)}{(1-s)^{k+1}}=Q_k(s)\end{aligned}$$

ou en tenant compte de (2.3)

$$(2.9)\quad \begin{aligned}Q_k(s)&=\frac{1}{(1-s)^{k+1}}f_1\left(\frac{\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}s-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}s}\right)=\\&=\frac{1}{(1-s)^{k+1}}f_1\left(\frac{(1+\zeta_0)s-\zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right)\end{aligned}$$

qui s'écrit, en vertu de la relation (2.7) :

$$(2.10)\quad \begin{aligned}&Q_k(s)=\\&=\frac{1}{(1-s)^{k+1}}\left[1-\frac{(1+\zeta_0)s-\zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right]^{k+1}P_k\left(\frac{(1+\zeta_0)s-\zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right)=\\&=\frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{[1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s]^{k+1}}P_k\left(\frac{(1+\zeta_0)s-\zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right).\end{aligned}$$

Les expressions (2.8) et (2.10) nous permettent d'exprimer $\beta_n^{(k)}$ à l'aide du théorème de Cauchy :

$$(2.11)\quad \binom{n+k}{k}\beta_n^{(k)}=\frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{P_k\left(\dfrac{(1+\zeta_0)s-\zeta_0(1+\bar{\zeta}_0)}{1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s}\right)}{[1+\bar{\zeta}_0-\bar{\zeta}_0(1+\zeta_0)s]^{k+1}}\frac{ds}{s^{n+1}},$$

où (l) est un contour fermé entourant l'origine dans le sens positif et situé entièrement à l'intérieur du cercle-unité. Le changement de variable

$$s=\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}w$$

conduit à l'expression

$$(2.12)\quad \binom{n+k}{k}\beta_n^{(k)}=\frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{2\pi i}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n\int_{(l_1)}\frac{P_k\left(\dfrac{w-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0w}\right)}{(1-\bar{\zeta}_0w)^{k+1}}\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Soit encore

$$\frac{w - \zeta_0}{1 - \zeta_0 w} = \omega ,$$

il en résulte

$$\binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \tag{2.13}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \int\limits_{(l_2)} P_k(\omega) \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0 \omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} (1+\bar{\zeta}_0 \omega)^{k-1} d\omega$$

(l_2) est une courbe fermée dans le cercle $|\omega| < 1$ entourant le point $\omega = -\zeta_0$. Nous pouvons prendre pour (l_2) le cercle $1 > |\omega| = \varrho > |\zeta_0|$, ϱ étant une constante.

Remplaçons maintenant dans (2.13) $P_k(\omega)$ par son expression donnée sous (2.6) :

$$P_k(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_n^{(k)} \omega^\nu ,$$

et nous obtenons $\binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)}$ sous la forme

$$\binom{n+k}{k} \beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_\nu^{(k)} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) , \tag{2.14}$$

où

$$p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \int\limits_{|\omega|=\varrho} \omega^\nu \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0 \omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} (1+\zeta_0 \omega)^{k-1} d\omega \tag{2.15}$$

et par suite

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} \tag{2.16}$$

sera le procédé de sommation cherché dont nous avons fait allusion avec la formule (2.5). Si toutes les conditions de la régularité étaient satisfaites, il existerait une constante K telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K \tag{2.17}$$

soit vérifiée indépendamment de n. Nous allons démontrer que ce n'est pas le cas.

Désignons pour cela par x un nombre différent de zéro et inférieur à 1 en valeur absolue, soit $\zeta_0 = |\zeta_0| e^{i\alpha}$ et considérons la fonction suivante:

$$H_{nk}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) e^{-i\nu\alpha} x^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\nu+k}{k} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) e^{-i\nu\alpha} x^{\nu} = \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1+\zeta_0\,\omega)^{n+k}}{(\omega+\zeta_0)^{n+1}} \frac{d\omega}{(1+e^{-i\alpha} x\,\omega)^{k+1}},$$

où la dernière égalité s'obtient à l'aide de la relation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} (-e^{-i\alpha} x\,\omega)^{\nu} = \frac{1}{(1+e^{-i\alpha} x\,\omega)^{k+1}}.$$

L'intégrale qui figure dans la formule (2.18) peut être calculée d'une manière explicite. Soit $\omega = 1/u$, alors le cercle $|\omega| = \varrho$ se transforme en le cercle $|u| = 1/\varrho$ et nous arrivons à l'expression nouvelle

$$H_{nk}(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \times$$

$$\times \int_{|\ |=\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k} (1+\zeta_0 u)^{k-1} \frac{du}{(u+e^{-i\alpha} x)^{k+1}}. \tag{2.19}$$

La fonction à intégrer a un pôle d'ordre $k+1$ au point $u = -e^{-i\alpha} x$ dans le cercle $|u| = 1/\varrho$; le pôle $u = -1/\zeta_0$ se trouve en dehors de ce cercle, car nous avons supposé $1 > \varrho > |\zeta_0|$. L'intégrale (2.19) peut donc être déterminée par le théorème du résidu. Ainsi

$$H_{nk}(x) =$$

$$= \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} \left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k} (1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]_{u=-e^{-i\alpha}x}. \tag{2.20}$$

Il est facile de prouver par récurrence par rapport à k que

$$\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]= \tag{2.21}$$

$$=(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

En effet, pour $k=1$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}=(n+1)\frac{1-|\zeta_0|^2}{(1+\zeta_0 u)^2}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

Supposons maintenant la relation (2.21) vérifiée pour $1, 2, \ldots, k$, et nous pouvons écrire :

$$\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k+1}(1+\zeta_0 u)^k\right]=$$

$$=\frac{d}{du}\left\{\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\cdot(u+\bar{\zeta}_0)\right]\right\}=$$

$$=\frac{d}{du}\left\{(n+k)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n(u+\bar{\zeta}_0)+\right.$$

$$\left.+\binom{k}{1}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]\right\}=$$

$$=(n+k)\ldots(n+1)(1-|\zeta_0|^2)^k\frac{d}{du}\left[\frac{1}{(1+\zeta_0 u)^k}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}\right]+ \tag{2.22}$$

$$+k\frac{d^k}{du^k}\left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k}(1+\zeta_0 u)^{k-1}\right]=$$

$$=(n+k)\ldots(n+1)(1-|\zeta_0|^2)^k\left\{\frac{d}{du}\left[\frac{1}{(1+\zeta_0 u)^k}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{(1+\zeta_0 u)^{k+1}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n\right\}=$$

$$=(n+k+1)(n+k)\ldots(n+1)\frac{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}{(1+\zeta_0 u)^{k+2}}\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^n.$$

La relation (2.21) est donc vérifiée. Nous en déduisons pour $H_{nk}(x)$ sa forme définitive :

$$H_{nk}(x) = \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \left(\frac{1+\zeta_0}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^{k+1} \left(\frac{-e^{-i\alpha}x+|\zeta_0|\,e^{-i\alpha}}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n = \tag{2.23}$$

$$= (-1)^n e^{-in\alpha} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n \left(\frac{1+\zeta_0}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^{k+1} \left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n .$$

Par la suite la fonction

$$\left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{n\nu}(|\zeta_0|)\, x^\nu \tag{2.24}$$

jouera un rôle important. C'est M. B. M. BAJŠANSKI [2] qui s'est occupé des fonctions de ce genre, données par cette dernière formule, et la relation

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_{n\nu}(|\zeta_0|)| = +\infty \tag{2.25}$$

est une conséquence directe du théorème 3. de son essai.

Pour pouvoir profiter de cette circonstance nous devons développer $(1-|\zeta_0|\,x)^{k+1} H_{nk}(x)$ selon les puissances de x. Or, un calcul simple nous conduit à l'identité

$$(1-|\zeta_0|\,x)^{k+1} H_{nk}(x) =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l e^{li\alpha} p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0)\right] e^{-i\nu\alpha} x^\nu = \tag{2.26}$$

$$= (-1)^n e^{-in\alpha} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n (1+\zeta_0)^{k+1} \left(\frac{x-|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|\,x}\right)^n .$$

Il faut remarquer que $\binom{k+1}{l} = 0$ pour tous les $l > k+1$. Par conséquent d'après (2.25)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l e^{li\alpha} p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0) \right| = \tag{2.27}$$

$$= \lim_{n\to\infty} L_n = +\infty .$$

Mais

$$L_n \leqq \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\nu} \binom{k+\nu-l}{k} \binom{k+1}{l} |\zeta_0|^l \, |p_{n,\nu-l}^{(k)}(\zeta_0)| = \tag{2.28}$$

$$= (1+|\zeta_0|)^{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} |p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| \,.$$

Et par suite

$$\lim_{n\to\infty} L_n \leqq (1+|\zeta_0|)^{k+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} |p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| = \tag{2.29}$$

$$= (1+|\zeta_0|)^{k+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| = +\infty \,.$$

La condition (2.17) ne peut donc pas être remplie. Il n'existe pas de constante K telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

soit vérifiée pour chaque valeur du nombre n. Ce qui prouve notre théorème.

(Reçule 20 Février 1958.)

LITTÉRATURE

[1] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) (à paraître).

[2] BAJŠANSKI, B. M.: „Sur une classe générale de procédés de sommations du type Euler-Borel". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **10** (1956) 131—152.

MEGJEGYZÉS A TAYLOR-SOR SZUMMABILITÁSÁRÓL A KONVERGENCIAKÖRÖN, I.

ALPÁR L.

Kivonat

A szerző egy TURÁN PÁL által felvetett kérdésre ad választ. TURÁN kimutatja (sajtó alatt levő [1] dolgozatában), hogy ha $0 < |\zeta_0| < 1$, akkor található olyan, a $|z| < 1$ körben reguláris

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \tag{1}$$

függvény, melynél a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{2}$$

sor konvergenciája ellenére, a $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}$ transzformáció segítségével előállított

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{3}$$

és az egységkörben szintén reguláris függvény hatványsora a $(z-\zeta_0)/(1-\bar{\zeta}_0 z) = 1$ egyenlet megoldás-pontjában, a $z = (1+\bar{\zeta}_0)/(1+\zeta_0)$ pontban divergens. TURÁN még azt is bebizonyítja, hogy ha az (1) sor a $z = 1$ pontban Abel-szummálható, akkor a (3) sor a $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ pontban ugyancsak Abel-szummálható. Kérdése az, hogy a (2) sor $(C, 1)$ szummálhatóságából feltétlenül következik-e a (3) sor $(C, 1)$ szummálhatósága is a $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ pontban.

A szerző azt az általánosabb tételt mutatja ki, hogy ha k tetszőleges pozitív egész szám, akkor a (2) sor (C, k) szummálhatóságából nem feltétlenül következik a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu \tag{4}$$

sor (C, k) szummálhatósága.

A bizonyítás lényege a következő: Jelölje $\alpha_n^{(k)}$ a (2) és $\beta_n^{(k)}$ a (4) sor n-edik (C, k) közepét. Kimutatjuk, hogy az $\alpha_n^{(k)}$-ek és $\beta_n^{(k)}$-ek között található olyan

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{=\nu 0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} \tag{5}$$

alakú kapcsolat, ahol $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ csak az n, ν, k és ζ_0 értékektől függ. Az (5) összefüggés szummációs eljárást definiál, amely permanens, ha $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ mátrixa

kielégíti a TOEPLITZ—SCHUR-féle feltételeket. Bebizonyítjuk, hogy ennek ellenkezője igaz, amennyiben igazoljuk, hogy nincs olyan K állandó, amelyre a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

egyenlőtlenség minden n-re teljesülne. Van tehát olyan konvergens $\{\sigma_n\}$ sorozat, amelynek $\{\tau_n\}$ transzformáltja divergens. Legyen ezután

$$a_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right],$$

akkor az

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

sor konvergens a $|z| < 1$ körben és $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$, azaz $f_1(z)$ éppen a tétel követelményeinek megfelelő függvény.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА TAYLOR-А НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, I.

L. ALPÁR

Резюме

Автор дает ответ на один вопрос, поставленный P. TURÁN-ом. TURÁN показал (в одной находящейся в печати работе [1]), что если $0 < |\zeta_0| < 1$, то существует такая, регулярная в круге $|z| < 1$ функция

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1}$$

что, несмотря на сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{2}$$

степенной ряд полученной с помощью преобразовании $(z - \zeta_0)/(1 - \bar{\zeta}_0 z)$ в единичном круге также регулярной функции

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{3}$$

расходится в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ где z такая точка, что $(z-\zeta_0)/(1-\bar{\zeta}_0 z) = 1$. TURÁN доказал также, что если ряд (1) суммируем по Abel-ю в точке $z = 1$, то то же самое имеет место в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$ для ряда (3). Он спрашивает: обязательно следует ли из суммируемости $(C, 1)$ ряда (2) суммируемость $(C, 1)$ ряда (3) в точке $z = (1+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0)$?

Автор доказывает более общую теорему, согласно которой при любом целом положительном k из суммириемости (C, k) ряда (2) не обязательно следует суммируемость (C, k) ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu . \tag{4}$$

Сущность доказательства такова: Пусть $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ обозначает n-ые средние (C, k) рядов (2) и (4) соответственно. Доказывается, что между $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ имеет место соотношение типа

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)}) , \tag{5}$$

где $c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ зависит лишь от n, ν, k и ζ_0. Соотношение (5) определяет процесс суммирования, которыи регулярный если матрица $[c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ удовлетворяет условию Toeplitz—Schur-а. Доказывается, что имеет место противное: не существует такой постоянной K для которой неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)| < K$$

имел бы место для всех n. Таким образом, существует такая сходящаяся последовательность $\{\sigma_n\}$, преобразованная которой — $\{\tau_n\}$ расходится. Пусть

$$\alpha_n = \triangle^{k+1}\left[\binom{n+k}{k}\sigma_n\right] \quad \text{тогда ряд} \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

сходится в круге $|z| < 1$ и $\alpha_n^{(k)} = \sigma_n$, $\beta_n^{(k)} = \tau_n$ т. е. функция $f_1(z)$ удовлетворяет требованиям теоремы.