

# CSILLAGHÉJAK TERVEZÉSE TOTÁLIS TEHERRE

CSONKA PÁL

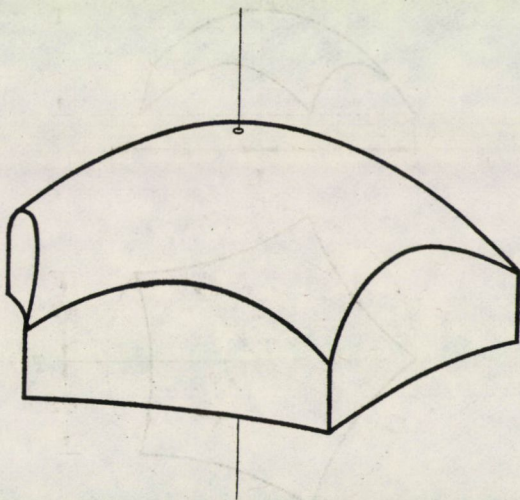
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1975. január 28.]

A dolgozat forgásszimmetrikus megoszló totális teherrel (egyidejűleg működő önsúlyteherrel és hőteherrel) terhelt forgásparaboloid héjak tervezésével foglalkozik. A tárgyalt héjak alaprajzi idoma befelé ívelt oldalakkal bíró szabályos alakzat, ún. *csillagsokszög*. A dolgozat felteszi, hogy a szóban forgó héjaknak, az ún. *csillaghéjaknak* peremtartója teljes hosszában fallal van alátámasztva, miért is e tartók keresztmetszeteire csak központos derékerő — *kötélerő* — hat. Magának a csillagsokszögnek alakja akként van megállapítva, hogy a héj feszítőerői zárt képletekkel legyenek számíthatók. A javasolt számítóeljárás egyszerű voltát számpélda igazolja.

## 1. Bevezetés

*Csillagsokszögön* befelé ívelt oldalakkal bíró szabályos sokszögszerű síkidomot, *csillaghéjon* pedig csillagsokszög alaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloid héjat értünk (1. ábra). Utóbbiról feltesszük, hogy szélét fallal alátámasztott peremtartó szegélyezi. Az ilyen peremtartó keresztmetszetein csak központos derékerők — *kötélerők* — keletkeznek [5].



1. ábra. Ötoldalú csillaghéj.

A héjra ható teherként forgásszimmetrikus megoszlású függőleges erőket (egyidejűleg működő önsúlyterhet és hőterhet) veszünk számításba.

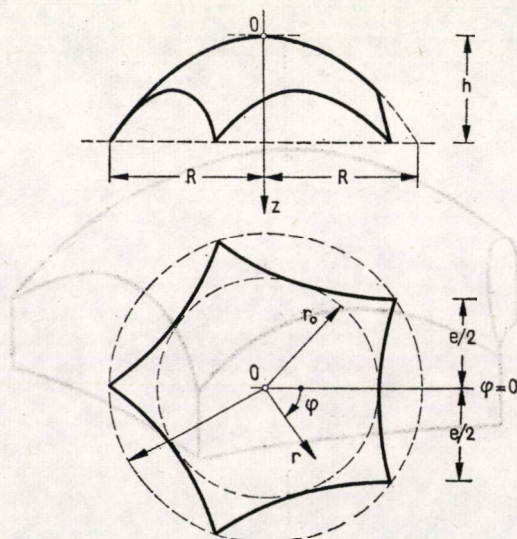
Vizsgálatainkat a membránelmélet szokásos feltevéseinek keretében végezzük. A héj és peremtartó egymástól eltérő alakváltozása folytán előálló hajlító- és csavaróerőket figyelmen kívül hagyjuk.

Magának a csillagsokszögnek az alakját a számításba veendő teherrendszertől függően úgy állapítjuk meg, hogy ezen teherrendszer (vagy vele arányos teherrendszerek) hatására a héjban keletkező feszítőerők zárt képletekkel legyenek számíthatók.

A csillaghéjak egy különleges egyszerű fajtájával, az alaprajz területén *egyenletesen megoszló* függőleges erőrendszerre tervezett csillaghéjak problémájával már két előző dolgozatunkban foglalkoztunk [3, 4]. Jelen tanulmányunk egy általánosabb feladatot tárgyal: a *forgásszimmetrikus megoszlású* függőleges erőrendszerre (önsúlyterherre és vele egyidejűleg működő hőterherre) tervezett csillaghéjak problémáját oldja meg.

## 2. Az alakfüggvény

Vizsgálatainkat a 2. ábrán feltüntetett  $O(r, \varphi, z)$  hengeres koordináta-rendszerben végezzük. Ennek  $O$  kezdőpontja a héj középfelületének tetőpontjában van,  $z$  tengelye a paraboloidhéj forgástengelyével esik egybe. A  $z$  tengely pozitív ága lefelé irányul, a  $\varphi = 0$  poláris sík pedig az alaprajzi idom egyik oldalát felezi.



2. ábra. Az  $O(r, \varphi, z)$  hengeres koordinátarendszer.

A csillagsokszög köré írt kör sugarát  $R$  betűvel, a beírt kör sugarát  $r_0$  betűvel, a csillaghéj magasságát  $h$  betűvel jelöljük.

Az  $n$ -oldalú csillagsokszög sarokpontjainak koordinátái:

$$r = R; \quad \varphi = \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Az  $O(r, \varphi, z)$  koordináta rendszerben a csillaghéj alakját középfelületének egyenletével, vagyis a

$$z = \frac{h}{R^2} r^2$$

egyenlettel jellemezzük. Ezt az egyenletet a héj *alakfüggvényének* nevezzük.

### 3. A teherfüggvény

A héjra ható terheket az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott fajlagos értékükkel, az ún. *redukált* teherértékekkel jellemezzük. A redukált teherértéket kifejező

$$\bar{p} = \bar{p}(r) \quad (1)$$

függvényt *teherfüggvénynek* nevezzük.

Az alábbiakban kétféle teherfüggvénnyel foglalkozunk.

#### 3.1. A pontos teherfüggvény

Így nevezzük az állandó falvastagságú héj önsúlyterhének és az alaprajz területén egyenletesen megoszló hőtehernek együttes értékét kifejező teherfüggvényt. Ha a héjfalnak a *középfelület* felszínegységére vonatkoztatott fajlagos súlya

$$p_0 = \text{konst.},$$

a héjra ható hőtehernek az *alaprajz* területegységére vonatkoztatott fajlagos értéke pedig

$$p_s = \text{konst.},$$

akkor a „pontos” teherfüggvény a

$$\bar{p} = p_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} + p_s = p_0 \sqrt{1 + \frac{4k^2 r^2}{R^4}} + p_s \quad (2)$$

képlettel fejezhető ki. Ez a függvény az

$$a \equiv \frac{R^2}{2h} \quad (3)$$

egyszerűsítő jelöléssel

$$\bar{p} = \frac{P_0}{a} \sqrt{a^2 + r^2} + p_s \quad (4)$$

alakra hozható.

### 3.2. A közelítő teherfüggvény

Így nevezzük a teherfüggvényt, ha a héjra ható totális terhet (az önsúlyterhet és a vele egyidejűleg működő hőterhet) valamely

$$\bar{p} = A_0 + A_1 \frac{r^2}{R^2} + A_2 \frac{r^4}{R^4} + \dots + A_k \frac{r^{2k}}{R^{2k}} \quad (5)$$

alakú polinommal közelítjük meg.

Ilyen szerkezetű teherfüggvényt alkalmazhatunk közelítésként a 3.1. alatti „pontos” teherfüggvény helyett is. Ilyenkor közelítő polinomként a

$$\bar{p}^* = (p_0 + p_s) + \frac{9}{5} p_0 \gamma \frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3} p_0 \gamma^2 \frac{r^4}{R^4}. \quad (5^*)$$

kifejezés használható, ahol

$$\gamma = \frac{h^2}{R^2}.$$

### 4. A feszültségfüggvény

A függőleges megoszló  $\bar{p} = \bar{p}(r, \varphi)$  erőkkel terhelt forgáshéjak  $F = F(r, \varphi)$  feszültségfüggvénye, mint ismeretes [3], általában az alábbi differenciálegyenletnek tartozik megfelelni:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + \bar{p} = 0.$$

Forgásparaboloid esetében

$$\frac{dz}{dr} = \frac{2h}{R^2} r = \frac{r}{a}, \quad \frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{2h}{R^2} = \frac{1}{a},$$

miért is a feszültségfüggvény által kielégítendő differenciálegyenlet így egyszerűsödik:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + a \bar{p} = 0. \quad (6)$$

Az alábbiakban a fenti differenciálegyenletnek olyan véges megoldását keressük, amely a héj peremén az

$$F = 0 \quad (7)$$

feltételnek, a héj sarokpontjaiban pedig ezen felül a

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

kikötésnek is eleget tesz.

A (7) peremfeltétel minden olyan héjra előírható, amelynek körbefutó peremtartója teljes hosszában fallal van alátámasztva [5]. A (8) kikötést viszont az indokolja, hogy a csillagsokszög peremvonalának  $r = R$  pontjai *kettőspontok* tartoznak lenni. A kettőspontok létezésének az a további feltétele, hogy az  $r = R$  pontokban az  $F$  második deriváltjai közül legalábbis az egyik zérustól eltérő legyen, esetünkben eleve teljesítve van, hiszen az  $r = R$  pontokban  $\bar{p} \neq 0$ .

#### 4.1. A pontos teherfüggvény esete

A (4) jelű „pontos” teherfüggvény esetében a (6) differenciálegyenlet így alakul:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + p_0 \sqrt{a^2 + r^2} + p_s a = 0. \quad (9)$$

A fenti differenciálegyenletnek megfelelő  $F$  függvényt két részből állítjuk elő: az *inhomogén* differenciálegyenletnek egy forgásszimmetrikus

$$F_i = F_i(r)$$

alakú megoldásából és a *homogén* differenciálegyenletnek egy

$$F_h = C_n r^n \cos n\varphi, \quad C_n = \text{konst.}$$

alakú megoldásából. Ezek szerint

$$F = F_i + F_h = F_i + C_n r^n \cos n\varphi. \quad (10)$$

Először az  $F_i$  függvényt határozzuk meg. Forgásszimmetrikus esetről lévén szó, a (9) jelű parciális differenciálegyenlet helyett az alábbi közönséges differenciálegyenletet írhatjuk:

$$\frac{d^2 F_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dF_i}{dr} + p_0 \sqrt{a^2 + r^2} + p_s a = 0.$$

Ez a másodrendű differenciálegyenlet a

$$\frac{dF_i}{dr} = U(r) \quad (11)$$

helyettesítéssel a

$$\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} dU + p_0 \sqrt{a^2 + r^2} + p_s a = 0$$

elsőrendű differenciálegyenletté alakul, ennek általános megoldása pedig:

$$U = -\frac{p_0}{3} \left( \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}}{r} + \frac{C_0}{r} \right) - p_s \frac{ar}{2}.$$

Ezek szerint

$$\frac{dF_i}{dr} = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}}{r} + \frac{C_0}{r} \right] = p_s \frac{ar}{2},$$

és innen integrálás után

$$F_i = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - a^3 \ln(a + \sqrt{a^2 + r^2}) + a^3 \ln r + C_0 \ln r \right] - p_s \frac{ar^2}{4} + C_1. \quad (12)$$

A fenti kifejezés az  $r = 0$  helyen csak akkor lehet véges, ha

$$C_0 = -a^3.$$

Ezzel a helyettesítéssel az  $F_i$  függvény (12) képlete így alakul:

$$F_i = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - a^3 \ln(a + \sqrt{a^2 + r^2}) \right] - p_s \frac{ar^2}{4} + C_1. \quad (13)$$

Ismervén az  $F$  függvény első részét képező  $F_i$  függvényt, magát az  $F$  függvényt a (10) alatti utasítás szerint úgy szerkeszthetjük meg, hogy ezt a függvényrészt a  $C_n r^n \cos n\varphi$  kifejezéssel kiegészítjük. Ezek szerint

$$F = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - a^3 \ln(a + \sqrt{a^2 + r^2}) \right] - p_s \frac{ar^2}{4} + C_1 + C_n r^n \cos n\varphi.$$

A fenti képletben szereplő  $C_1$  és  $C_n$  határozatlan állandókat a (7) és (8) *peremfeltételek* figyelembevételével lehet és kell megállapítani.

Írjuk fel először a (8) feltételt, vagyis azt a követelményt, hogy az  $r = R$ ,  $\varphi = \pi/n$  pontban az  $R$  függvény  $r$  szerinti deriváltjának el kell tűnnie:

$$-\frac{p_0}{3} \left[ \frac{2a^2R + R^3}{\sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{a^3R}{(a + \sqrt{a^2 + r^2})\sqrt{a^2 + R^2}} \right] - p_s \frac{aR}{2} - C_n n R^{n-1} = 0.$$

Innen

$$C_n = -\frac{p_0}{3} \left( a + \frac{a^2 + R^2}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right) \frac{1}{nR^{n-2}} - p_s \frac{a}{2nR^{n-2}}. \quad (14a)$$

Ezt az értéket a (14a) képletbe behelyettesítve, azt találjuk, hogy

$$F = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - a^3 \ln(a + \sqrt{a^2 + r^2}) + \left( a + \frac{a^2 + R^2}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right) \frac{r^n \cos n\varphi}{nR^{n-2}} \right] - p_s a \left( \frac{r^2}{4} + \frac{r^n \cos n\varphi}{rnR^{n-2}} \right) + C_1. \quad (15)$$

Hátra van még a (7) feltétel teljesítése, vagyis annak biztosítása, hogy a csillaghéj peremvonala mentén az  $F$  függvény értéke mindenütt zérus legyen. Ezt a követelményt először csak az  $r = R$ ,  $\varphi = \pi/n$  sarokpontra írjuk fel:

$$-\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + R^2}{3} \sqrt{a^2 + R^2} - a^3 \ln(a + \sqrt{a^2 + R^2}) - \left( a + \frac{a^2 + R^2}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right) \frac{R^2}{n} \right] - p_s a \left( \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2n} \right) + C_1 = 0.$$

Ha ebből az egyenletből  $C_1$  értékét kifejezzük, és azt a (15) képletbe behelyettesítjük, feszültségfüggvényként az alábbi kifejezést kapjuk:

$$F = -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - \frac{4a^2 + R^2}{3} \sqrt{a^2 + R^2} - a^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} + \left( a + \frac{a^2 + R^2}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right) \frac{R^2 - r^2 \cos n\varphi}{nR^{n-2}} \right] + p_s a \left( \frac{R^2 - r^2}{4} - \frac{R^n + r^n \cos n\varphi}{2nR^{n-2}} \right). \quad (16)$$

Ámde a (7) feltételnek *nem csak a sarokpontokban*, hanem a *peremvonal teljes hosszában* is teljesülnie kell. Ezért az alaprajzi idom határvonalát nem vehetjük fel szabadon, azt úgy kell meghúznunk, hogy a szóban forgó vonal mentén mindenütt  $F = 0$  legyen, vagyis e vonal teljes hosszában teljessüljön

az alábbi feltétel:

$$\begin{aligned}
 -\frac{p_0}{3} \left[ \frac{4a^2 + r^2}{3} \sqrt{a^2 + r^2} - \frac{4a^2 + R^2}{3} \sqrt{a^2 + R^2} - a^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} + \right. \\
 \left. + \left( a + \frac{a^2 + R^2}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right) \frac{R^n - r^n \cos n\varphi}{nR^{n-2}} \right] + \\
 + p_s a \left( \frac{R^2 - r^2}{4} - \frac{R^n + r^n \cos n\varphi}{2nR^{n-2}} \right) = 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

A (16) képlet a „pontos” teherre tervezett csillaghéj feszültségfüggvényének a képlete, a (17) egyenlet pedig e héj alaprajzi idomát határoló vonalának, a csillagszög peremvonalának az egyenlete.

#### 4.2. A közelítő teherfüggvény esete

Ha a héjra ható terhet az (5) polinom fejezi ki, a héj feszültségfüggvényére az

$$\begin{aligned}
 F = \frac{R^4}{8h} \left[ \frac{A_0}{1} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{A_1}{4} \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{A_2}{9} \left( 1 + \frac{R^6}{r^6} \right) + \dots + \right. \\
 \left. + \frac{A_k}{(k+1)^2} \left( 1 - \frac{r^{2k+2}}{R^{2k+2}} \right) - \frac{2}{n} \left( \frac{A_0}{1} + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \right) \times \right. \\
 \left. \times \left( 1 + \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi \right) \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

képletet, a csillagszög peremvonalának képletéként pedig az

$$\begin{aligned}
 \frac{A_0}{1} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{A_1}{4} \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{A_2}{9} \left( 1 - \frac{r^6}{R^6} \right) + \dots + \frac{A_k}{(k+1)^2} \left( 1 - \frac{r^{2k+2}}{R^{2k+2}} \right) - \\
 - \frac{2}{n} \left( \frac{A_0}{1} + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \right) \left( 1 + \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi \right) = 0 \quad (19)
 \end{aligned}$$

egyenletet kapjuk.

Ha a héjra ható terhet a (4) alatti pontos képlet helyett az (5\*) jelű közelítő képlet szerint vesszük számításba, akkor

$$\begin{aligned}
 A_0 &= p_0 + p_s, \\
 A_1 &= \frac{9}{5} p_0 \gamma, \\
 A_2 &= -\frac{2}{3} p_0 \gamma^2, \\
 A_3 &= A_4 = \dots = A_k = 0. \quad (20)
 \end{aligned}$$



Ilyenkor a közelítő feszültségfüggvény képlete

$$F = \frac{R^4}{8h} \left[ (p_0 + p_s) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{9}{20} p_0 \gamma \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) - \frac{2}{27} p_0 \gamma^2 \left( 1 - \frac{r^6}{R^6} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{n} \left( p_0 + p_s + \frac{9}{10} p_0 \gamma - \frac{2}{9} p_0 \gamma^2 \right) \left( 1 + \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi \right) \right], \quad (18^*)$$

a csillagsokszög peremvonalának egyenlete pedig:

$$(p_0 + p_s) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{9}{20} p_0 \gamma \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) - \frac{2}{27} p_0 \gamma^2 \left( 1 - \frac{r^6}{R^6} \right) - \\ - \frac{2}{n} \left( p_0 + p_s + \frac{9}{10} p_0 \gamma - \frac{2}{9} p_0 \gamma^2 \right) \left( 1 + \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi \right) = 0. \quad (19^*)$$

A fenti képletekben

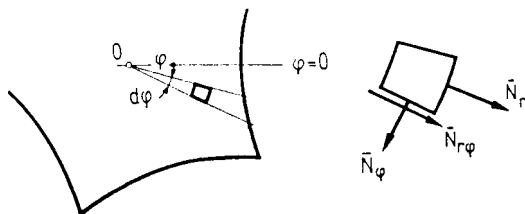
$$\gamma = \frac{h^2}{R^2}.$$

### 5. A feszítőerők

A csillaghéj redukált feszítőerői az alábbi ismert képletek szerint számíthatók [2]:

$$\bar{N}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ \bar{N}_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \cdot \partial \varphi}, \\ \bar{N}_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}. \quad (21)$$

Ezeknek a feszítőerőknek pozitív értelmét a 3. ábra tünteti fel.



3. ábra. Az  $\bar{N}_r$ ,  $\bar{N}_{r\varphi}$ ,  $\bar{N}_\varphi$  redukált feszítőerők.

### 5.1. A pontos teherfüggvény esete

Ha a (21) képleteket a (16) képlet szerinti pontos  $F$  függvényre alkalmazzuk, a redukált feszítőerőkre ezeket a képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r &= -\frac{P_0}{3} \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)^3 - a^3}}{r^2} - P_s \frac{a}{2} - C_n n(-1)r^{n-2} \cos n\varphi, \\ \bar{N}_{r\varphi} &= C_n n(n-1) r^{n-2} \sin n\varphi, \\ \bar{N}_\varphi &= -\frac{P_0}{3} \cdot \frac{(2r^2 - a^2)\sqrt{a^2 + r^2} + a^3}{r^2} - P_s \frac{a}{2} + \\ &\quad + C_n n(n-1) r^{n-2} \cos n\varphi.\end{aligned}\tag{22}$$

A fenti képletekben  $C_n$  a (14) alatti jelentéssel bír.

### 5.2. A közelítő teherfüggvény esete

A (21) képleteket a (18) alatti közelítő feszültségfüggvényre alkalmazva, a redukált feszítőerőkre az alábbi képletek adódnak:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r &= -\frac{R^2}{4h} \left[ A_0 + \frac{A_1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{A_2}{3} \frac{r^4}{R^4} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \frac{r^{2k}}{R^{2k}} - \right. \\ &\quad \left. - \left( A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \right) \frac{(n-1)r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right], \\ \bar{N}_{r\varphi} &= -\frac{R^2}{4h} \left( A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \right) \frac{(n-1)r^{n-2}}{R^{n-2}} \sin n\varphi, \\ \bar{N}_\varphi &= -\frac{R^2}{4h} \left[ A_0 + \frac{3A_1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{5A_2}{3} \frac{r^4}{R^4} + \dots + \frac{(2k+1)A_k}{k+1} \frac{r^{2k}}{R^{2k}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_k}{k+1} \right) \frac{(n-1)r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right].\end{aligned}\tag{23}$$

Ha a héj totális terhét az (5\*) alatti közelítő polinommal vesszük számításba, akkor a redukált feszítőerők képletei így alakulnak:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r^* &= -\frac{R^2}{4h} \left\{ \left( 1 + \frac{9}{10} \gamma \frac{r^2}{R^4} - \frac{2}{9} \gamma^2 \frac{r^4}{R^4} \right) P_0 + P_s - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left( 1 + \frac{9}{10} \gamma - \frac{2}{9} \gamma^2 \right) P_0 + P_s \right] (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right\},\end{aligned}$$

$$\bar{N}_{r\varphi}^* = -\frac{R^2}{4h} \left[ \left( 1 + \frac{9}{10} \gamma - \frac{2}{9} \gamma^2 \right) p_0 + p_s \right] (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \sin n\varphi, \quad (23^*)$$

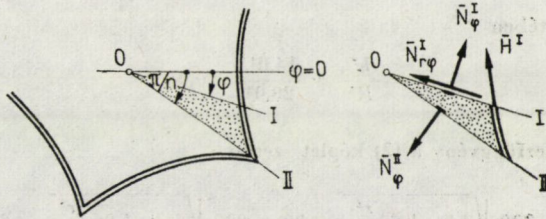
$$\begin{aligned} \bar{N}_{\varphi}^* = & -\frac{R^2}{4h} \left\{ \left( 1 + \frac{9}{5} \gamma \frac{r^2}{R^2} - \frac{5}{3} \gamma^2 \frac{r^4}{R^4} \right) p_0 + p_s + \right. \\ & \left. + \left[ \left( 1 + \frac{9}{10} \gamma - \frac{2}{9} \gamma^2 \right) p_0 + p_s \right] (n-1) \frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} \cos n\varphi \right\}. \end{aligned}$$

## 6. A kötélérő

A csillaghéj peremtartójában csak axiális erők — *kötélérők* — keletkeznek. Ezek nagysága a peremtartó sarokpontjaiban zérus, maximális értékük a peremtartó  $\varphi = 0, 2\pi/n, 4\pi/n, \dots, (2n-2)\pi/n$  keresztmetszeteiben jön létre.

A csillaghéj  $\varphi < \pi/n$  keresztmetszetét *I* keresztmetszetnek, a  $\varphi = \pi/n$  keresztmetszetét *II* keresztmetszetnek nevezzük, és ennek megfelelően az *I*, illetve *II* keresztmetszethez tartozó erőket *I*, illetve *II* indexekkel látjuk el.

A peremtartó tetszőleges *I* keresztmetszetére ható  $H^I$  kötélérőnek az alaprajz síkjával párhuzamos  $\bar{H}^I$  alkotója a 4. ábra szerint kimetszett 0 *I* *II* héjcsikkely egyensúlyi vizsgálatával határozható meg. E héjcsikkely 0 *II* oldalára csak  $\bar{N}_{\varphi}^{II}$  erők hatnak, a peremtartó 0 *II* metszetén pedig a kötélérő zérus. Így  $\bar{H}^I$  könnyen meghatározható.



4. ábra. Az egyensúlyi vizsgálat céljaira kimetszett héjcsikkely.

## 7. Számpélda

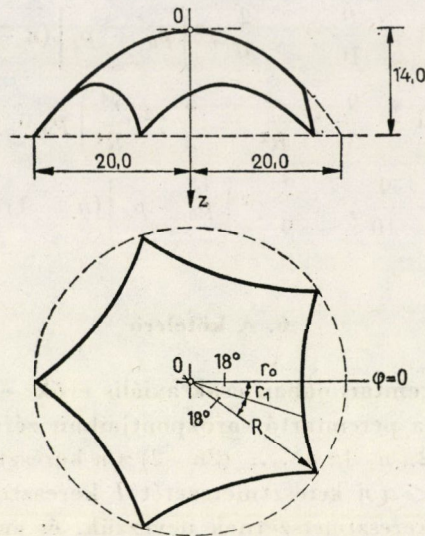
Alkalmazzuk a fentiekben ismertetett számítóeljárást az 5. ábrán feltüntetett  $n = 5$  oldalú csillagsokszög fölé szerkesztett állandó falvastagságú forgáspároloidhéjra.

A számítandó héj méretadatai

$$R = 20,0 \text{ m}, \quad h = 14,0 \text{ m},$$

terhei pedig

$$p_0 = 200 \text{ kp/m}^2$$



5. ábra. Számpélda.

intenzitású önsúlyteher és ezzel egyidejűleg működő

$$p_s = 80 \text{ kp/m}^2$$

intenzitású hőteher.

Feladatunk esetében

$$\gamma = \frac{h^2}{R^2} = \frac{14,0^2}{20,0^2} = 0,49,$$

és így a „pontos” teherfüggvény a (2) képlet szerint

$$\bar{p} = 200 \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{r^2}{R^2}} + 80 = 200 \sqrt{1 + 1,96 \frac{r^2}{R^2}} + 80,$$

az (5\*) képlet szerinti közelítő teherfüggvény pedig:

$$\begin{aligned} \bar{p}^* &= 280 + \frac{9}{5} 200 \cdot 0,49 \frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3} 200 \cdot 0,49^2 \frac{r^4}{R^4} = \\ &= 280 + 176,4 \frac{r^2}{R^2} - 32,013 \frac{r^4}{R^4}. \end{aligned}$$

A pontos  $\bar{p}$  és a közelítő  $\bar{p}^*$  teherértékeket, valamint a pontos helyett a közelítő teherfüggvény alkalmazása révén elkövetett hiba viszonylagos értékét az I. táblázat tünteti fel. Mint látható, az említett kétféle teherértéknek egymástól való legnagyobb eltérése a pontos teherértéknek legfeljebb 0,006-szorosa, az eltérés abszolút értékének átlaga pedig mindössze 0,003-szoros, vagyis teljesen lényegtelen. Az elkövetett hiba jelentéktelen volta feljogosít arra, hogy a következőkben a (4) alatti pontos teherfüggvény helyett az (5\*) jelű közelítő teherfüggvénnyel dolgozzunk.

## I. táblázat

A  $\bar{p}$  pontos és  $\bar{p}^*$  közelítő teherértékek, valamint a közelítő teherfüggvény használata esetében elkövetett hiba viszonylagos értéke

r/R	$\bar{p}$ kp/m <sup>2</sup>	$\bar{p}^*$ kp/m <sup>2</sup>	$(\bar{p}^* - \bar{p})/\bar{p}$
0	280,0	280,0	0,00
0,1	282,0	281,8	- 0,001
0,2	287,7	287,0	- 0,002
0,3	296,9	295,6	- 0,004
0,4	309,2	307,4	- 0,006
0,5	324,1	322,1	- 0,006
0,6	341,2	339,4	- 0,005
0,7	360,0	358,7	- 0,003
0,8	380,3	379,8	- 0,001
0,9	401,7	401,9	+ 0,000
1,0	424,1	424,4	+ 0,001

A közelítő teherfüggvény esetében a csillaghéj feszültségfüggvénye a (18\*) képlet szerint

$$F^* = \frac{20^4}{8 \cdot 14,0} (200 + 80) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{9}{20} 200 \cdot 0,49 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) -$$

$$- \frac{2}{27} 200 \cdot 0,49^2 \left(1 - \frac{r^6}{R^6}\right) - \frac{2}{5} \left(200 + 80 + \frac{9}{10} 200 \cdot 0,49 -$$

$$- \frac{2}{9} 200 \cdot 0,49^2\right) \left(1 + \frac{r^5}{R^5} \cos 5\varphi\right),$$

a csillagsokszög peremvonalának egyenlete pedig a (19\*) képlet szerint

$$280 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + 44,1 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) - 3,55703 \left(1 - \frac{r^6}{R^6}\right) -$$

$$- 143,0115 \left(1 + \frac{r^5}{R^5} \cos 5\varphi\right) = 0.$$

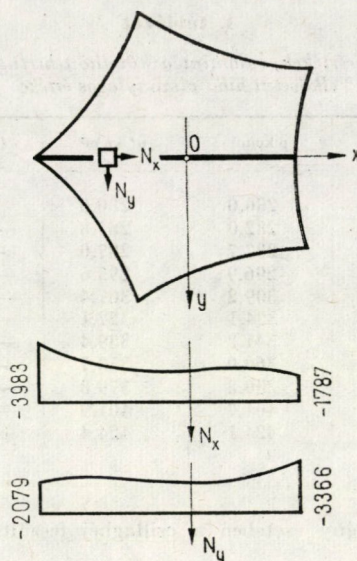
Ismerve a csillagsokszög peremvonalának egyenletét, a csillagsokszögbe írt kör  $r_0$  sugarát a

$$280 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) + 44,1 \left(1 - \frac{r_0^4}{R^4}\right) - 3,55703 \left(1 - \frac{r_0^6}{R^6}\right) -$$

$$- 143,0115 \left(1 + \frac{r_0^5}{R^5}\right) = 0$$

egyenletből határozhatjuk meg, a  $\varphi = \pi/10 = 18^\circ$  poláris szöghöz tartozó  $r_1$  rádiusz vektort pedig a

$$280 \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right) + 44,1 \left(1 - \frac{r_1^4}{R^4}\right) - 3,55703 \left(1 - \frac{r_1^6}{R^6}\right) - 143,0115 = 0$$



6. ábra. Az  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_y$  redukált feszítőerők megoszlása az  $y = 0$  metszet mentén.

egyenlet segítségével állapíthatjuk meg. A számítás eredménye:

$$\frac{r_0}{R} = 0,7097, \text{ tehát } r_0 = 14,194 \text{ m,}$$

$$\frac{r_1}{R} = 0,7636, \text{ tehát } r_1 = 15,272 \text{ m.}$$

Ezen adatok birtokában a csillagsokszög határoló vonala könnyűszerrel meghúzható.\*

A héjban keletkező redukált feszítőerők a (23\*) képlet szerint számíthatók. Értékük kp/m-ben kifejezve

$$\bar{N}_r^* = -2000 - 630 \frac{r^2}{R^2} + 76,2 \frac{r^4}{R^4} + 1430,115 \frac{r^3}{R^3} \cos 5\varphi,$$

$$\bar{N}_{r\varphi}^* = -1430,115 \frac{r^3}{R^3} \sin 5\varphi,$$

$$\bar{N}_\varphi^* = -2000 - 1890 \frac{r^2}{R^2} + 381,1 \frac{r^4}{R^4} - 1430,115 \frac{r^3}{R^3} \cos 5\varphi.$$

Az  $\bar{N}_r^*$  és  $\bar{N}_\varphi^*$  feszítőerők megoszlását az  $y = 0$  metszet mentén a 6. ábra szemlélteti.

\* Ha a csillaggörbét az  $r = 14,194$ ,  $\varphi = 0$  és  $r = 20,0$ ,  $\varphi = \pm 36^\circ$  pontokon átmenő  $\rho = 35,792$  m sugarú körívvel helyettesítendő, a  $\varphi = \pm 18^\circ$  helyen a peremvonal rádiuszvektora a pontos 15,272 m helyett 15,252 m-re adódnék. Itt tehát a két érték közti eltérés mindössze 2 cm.

Az  $\bar{N}_y$  erőknél a 6. ábrán feltüntetett diagramja egyszerű lehetőséget nyújt a csillaghéj peremtartójában keletkező legnagyobb kötélterő meghatározására is. Ez az erő ui. — egyszerű egyensúlyi okokból — a szöben forgó diagram területtel egyenlő. Értéke az

$$S_{\max} = \int_{14,194}^{-20,0} -2000 - 630 \frac{r^2}{R^2} + 76,2 \frac{r^4}{R^4} + 1430,115 \frac{r^3}{R^3} dr.$$

képlettel határozható meg.

A kijelölt számítást elvégezve, a legnagyobb kötélterőre az

$$S_{\max} = 78\,356 \text{ kp}$$

érték adódik.

## IRODALOM

1. MENYHÁRD, I.: Héjszerkezetek elmélete, II. rész. *Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai* 19 (1943), 48. füzet, 25.
2. GIRKMANN, K.: Flächen tragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Springer Verlag, Wien 1956, V. Aufl., 26 oldal.
3. CSONKA, P.: Csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héjak. *Műszaki Tudomány* 42 (1970), 243—256.
4. CSONKA, P.: Körszimmetrikusan terhelt csillagsokszög alaprajzú forgásparaboloid-héjak. *Műszaki Tudomány* 44 (1971), 149—165.
5. CSONKA, P.: Membrane Shells with Edge Beam Supported by a Wall. *Acta Techn. Hung.* 71 (1971), 149—159.

**Design of Star Shells Subjected to Full Loads.** Paper deals with paraboloid shells of revolution subjected to axi-symmetrically distributed full loads (dead load + snow load) acting in the vertical direction. The planform of the shells in question is a regular polygon-like plane-figure with inward curved sides, a so-called *star-polygon*. The shell itself — the so called *star-shell* — is bordered by an edge member, supported along its whole length by a wall. Therefore, only funicular forces — *string forces* — can come into being at its cross-sections. The shape of the star-polygon is determined by a procedure which assures, that the stress resultants of the shell, could be calculated with the aid of closed formulae. A numeric example proves the suggested method to be expedient.

**Berechnung von Sternschalen für Totalbelastung.** Der Aufsatz befaßt sich mit der Berechnung von Drehparaboloidschalen belastet durch eine drehsymmetrische verteilte vertikale Totlast (Eigengewicht und Schneelast). Die Grundrißfigur der behandelten Schalen ist ein regelmäßiges vieleckähnliches Gebilde mit nach innen gebogenen Seiten, die als *Sternvieleck* bezeichnet wird. Das Randglied der in Rede stehenden Schalen — *der Sternschalen* — ist in seiner ganzen Länge durch Mauerwerk gestützt, darum können in den Querschnitten des Randgliedes ausschließlich Normalkräfte, sogenannte *Seilkräfte* zustande kommen. Die Form der Sternschale selber ist mit Hilfe eines entsprechenden Rechenverfahrens so bestimmt, daß ihre Schnittkräfte mit geschlossenen Formeln berechnet werden können. Die Zweckmäßigkeit der vorgeschlagenen Berechnungsmethode wird anhand eines Zahlenbeispiels bewiesen.