ÜBER DAS THOMSONSCHE PRINZIP

von

GÉZA FREUD

In elektrischer Formulierung leutet das Thomsonsche Prinzip bekanntlich folgendermassen: E_0 sei ein elektrostatisches Feld, das von den Ladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ erzeugt wird, welche auf den sich paarweise nicht berührenden und nicht durchdringenden elektrisch leitenden Körpern $K_1, K_2, \ldots, K_n$ mit den Oberflächen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ verteilt sind. Die Ladung auf F_i sei Q_i. Es sei $\boldsymbol{E}$ ein anderes Vektorfeld, welches, sowohl wie $\boldsymbol{E}_0$ die Eigenschaft

$$\int_F \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \Sigma Q_i \tag{1a}$$

besitzt. Hier muss an der rechten Seite über alle Indices i summiert werden, für die K_i innerhalb des von der geschlossenen Fläche F begrenzten endlichen Gebietes liegt. (1a) soll für jede solche geschlossene Fläche F gelten, welche keines der K_i schneidet. Erstreckt sich der Raum ausserhalb der K_i ins Unendliche, dann wird auch die Gültigkeit von

$$|\boldsymbol{E}| = O(r^{-2})$$

vorausgesetzt. Wie üblich, bedeutet r den Abstand von einen festen Aufpunkt.

Die rechte Seite in (1a) bedeutet hier die Summe der Ladungen innerhalb der geschlossenen Fläche F mit dem Flächenelement $d\boldsymbol{f}$. Dann ist die elektrostatische Energie des tatsächlich auftretenden Feldes $\boldsymbol{E}_0$ die kleinste, die bei verschiedener Wahl des fiktiven Feldes $\boldsymbol{E}$ entsteht:

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}_0^2\, d\tau \leqq \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}^2\, d\tau \tag{2a}$$

($d\tau$ ist das Volumenelement).

Es gibt auch eine gleichwertige Formulierung dieses Prinzipes für stationäre Ströme. $K_1, K_2, \ldots, K_n$ seien vollkommene Leiter, denen also keine Potentialunterschiede infolge Leitungsströme entstehen. Diese Leiter seien in ein homogenes Medium endlicher Leitfähigkeit eingebettet und auf fest gehaltenen Spannungen gehalten. Das Feld der Stromdichte des entstehenden stationären Stromes sei $\boldsymbol{i}_0$. Dies soll mit einem Felde $\boldsymbol{i}$ verglichen werden, welche dieselben Quellen und Senken wie $\boldsymbol{i}_0$ besitzt. In Formeln heisst es

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f} \tag{1b}$$

für jede geschlossene, die K_i nicht schneidende Fläche F. Anschaulich bedeutet dass dass aus jedem Leiter derselbe Gesamtstrom fliesst und im Felde keine weiteren Quellen und Senken vorhanden sind. Dann ist der Wärmeverlust bei $\boldsymbol{i}_0$ am niedrigsten. Nach Unterdrücken konstanter Faktoren, lautet das formelmässig

$$\int \boldsymbol{i}_0^2\, d\tau \leqq \int \boldsymbol{i}^2\, d\tau \; . \tag{2b}$$

Der gemeinsame mathematische Inhalt dieser Behauptungen besteht darin, dass unter Feldern mit gleichen Quellen und Senken das Wirbelfreie das kleinste Quadratintegral besitzt.[1]

In der praktischen Elektrotechnik hat es eine immer wachsende Bedeutung, die Stromverteilung in Leitern zu studieren, in welchen zwischen Strom und Spannung ein nichtlinearer Zusammenhang besteht. Meistens ist die Spannung gleich einer Potenz der Stromstärke. Das Thomsonsche Prinzip ist in der oben formulierten Allgemeinheit leider falsch. Doch werden wir zeigen, dass unter weiterer Einchränkungen der Konkurenzfelder eine Variante des Prinzipes gültig bleibt.

Satz. *Die vollkommenen Leiter $K_1, K_2, \ldots, K_n$ seien an fest gehaltenen Spannungen gelegt und in ein homogenes Medium eingebetett, in welchem das Potenzgesetzt*

$$\boldsymbol{E} = \alpha\, i^{\beta-1}\, \boldsymbol{i} \qquad (\alpha > 0 \;, \; \beta > 0) \tag{3}$$

zwischen den Vektoren der Stromdichte und dem Vektor des elektrischen Feldes besteht, wobei $\boldsymbol{E}$ der Vektor der elektrischen Feldstärke ist, $\boldsymbol{i}$ der Vektor der elektrischen Stromdichte, und i der Betrag des letzteren. Es entstehe im Medium das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_0$ und der Stromverlauf $\boldsymbol{i}_0$. Wir betrachten nun solche Konkurrenzverteilungen $\boldsymbol{i}$ des Stromes, welche die Gleichung (1b) *befriedigen und denselben Stromlinienverlauf wie i_0 besitzen, d. h. $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{i}_0$ sind in jedem Punkte parallel und gleichgerichtet. Wir berechnen aus i ein fiktives elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ nach* (3). *Behauptet wird, dass der Ausdruck der Verlustleistung*

$$W = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{i}\, d\tau \tag{4}$$

fü $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$ am kleinsten ausfällt.

Dieses Prinzip scheint geeignet zu sein, die Stromverteilung angenähert zu berechnen, falls das Stromlinienbild in guter Näherung vorhanden ist. Bezüglich Anwendungen sei auf eine folgende Arbeit von Herrn J. Rinagel verwiesen.

Beweis. Das tatsächlich entstandene Feld E_0 besitzt ein Potential:

$$\boldsymbol{E}_0 = -\operatorname{grad} \Phi \; . \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist:

$$\boldsymbol{i} = (1 + x)\, \boldsymbol{i}_0 \; ,$$

[1] Es werden auch Oberflächenwirbel mitberücksichtigt, d. h. die Komponente von $\boldsymbol{E}$ entlang der Oberfläche muss in jedem Punkte der F_i verschwinden.

wobei $x > -1$ eine skalare Ortsfunktion mit $\operatorname{div}(x\boldsymbol{i}_0) = 0$ bedeutet. Wir bilden eine einparametrige Schar von zugelassenen fiktiven Stromverteilungen

$$\boldsymbol{i}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon x)\,\boldsymbol{i}_0 \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \tag{6}$$

bilden hieraus $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ nach (3) und zeigen, dass der Ausdruck

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}(\varepsilon)\,\boldsymbol{i}(\varepsilon)\,d\tau \tag{7}$$

seinen kleinsten Wert für $\varepsilon = 0$ annimmt. Man erhält nach einigen Rechnungen

$$\left(\frac{dW}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{\beta+1}{2}\int \boldsymbol{E}_0(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau = -\frac{\beta+1}{2}\int \operatorname{grad}\Phi(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\beta+1}{2}\int \operatorname{div}(\Phi\, x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau + \frac{\beta+1}{2}\int \Phi \operatorname{div}(x\,\boldsymbol{i}_0)\,d\tau\,.$$

Nach (1b) ist $\operatorname{div}(x\boldsymbol{i}_0) = 0$, daher verschwindet das zweite Glied. Das Integral im ersten Gliede ist gleich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu \oint_{F_\nu} x\,\boldsymbol{i}_0\,d\boldsymbol{t}\,,$$

wobei $\boldsymbol{F}_\nu$ die Oberfläche von K_ν bedeutet und Φ_ν der konstante Wert von Φ auf K_ν ist. Nach (1b) müssen nun alle Integrale über die einzelnen $\boldsymbol{F}_\nu$ verschwinden. Es ergab sich also

$$\left(\frac{dW}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{8}$$

Es ist weiter

$$\frac{d^2W}{d\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2}(\beta+1)\,\beta\int (1+\varepsilon x)^{\beta-1}x^2 i_0^{\beta+1}\,d\tau > 0 \tag{9}$$

falls x nicht identisch verschwindet. Aus (8) und (9) ersieht man, dass $W(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ tatsächlich am kleinsten wird, w. z. b. w.

(Eingegangen 20. May. 1958.)

A THOMSON-ELVRŐL

FREUD G.

Kivonat

A $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ideális vezetők olyan elektromosan vezető közegbe vannak ágyazva, melyben az $\boldsymbol{E}$ elektromos térerősség vektor és az $\boldsymbol{i}$ áramsűrűség vektor között az

$$\boldsymbol{E} = \alpha\, i^{\beta-1}\,\boldsymbol{i} \qquad \alpha > 0\,,\ \beta > 0$$

nem-lineáris kapcsolat áll fenn. Legyen $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{i}_0$ az a ténylegesen kialakuló elektromos tér és árameloszlás, amelynél a K_j vezetőből $\boldsymbol{I}_j$ áram lép ki ($j = 1, 2, \ldots, n$). Tekintsük az olyan fiktív $\boldsymbol{i}$ árameloszlásokat, melyeknek forrásai és nyelői $\boldsymbol{i}_0$-lal azonosak, azaz amelyeknél minden zárt F felületre

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f}$$

teljesül és az $\boldsymbol{i}$ vektor minden pontban ugyanolyan irányú, mint $\boldsymbol{i}_0$. Ebből az $\boldsymbol{i}$ fiktív árameloszlásból az

$$\oint_F \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

és

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{i}\, d\tau$$

képletekkel számított fiktív wattveszteség akkor a legkisebb, ha $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$.

О ПРИНЦИПЕ THOMSON-А

G. FREUD

Резюме

Идеальные проводники $K_1, K_2, \ldots, K_n$ помещены в такую электрически проводящую среду, в которой между вектором электрической силы поля $\boldsymbol{E}$ и вектором плотности тока $\boldsymbol{i}$ имеет место нелинейная связь

$$\boldsymbol{E} = \alpha\, i^{\beta-1}\, \boldsymbol{i} \qquad \alpha > 0\,, \ \beta > 0\,.$$

Пусть $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{i}_0$ суть действительно возникающие электрическое поле и распределение тока, при котором из проводника K_j выходит ток $\boldsymbol{I}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Рассмотрим такие фиктивные распределения тока $\boldsymbol{i}$, для которых для всякой замкнутой поверхности F имеет место

$$\oint_F \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{f} = \oint_F \boldsymbol{i}_0\, d\boldsymbol{f}$$

и направление вектора $\boldsymbol{i}$ в каждой точке совпадает с направлением $\boldsymbol{i}_0$. Для этого фиктивного распределния тока $\boldsymbol{i}$ фиктивная ваттовая потера, вычисляемая формулами

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

и

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{i}\, d\tau$$

наименьшая тогда, когда $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0$.