EIN BEWEIS DES WEDDERBURN—ARTINSCHEN STRUKTURENSATZES

von

OTTÓ STEINFELD

Einleitung

Unter einem *halbeinfachen Ring* verstehen wir einen assoziativen Ring, der kein von Null verschiedenes nilpotentes Linksideal besitzt und in dem für die Linksideale die Minimalbedingung gilt. In dieser Arbeit geben wir einen kurzen, elementaren Beweis des Wedderburn-Artinschen Strukturensatzes. Der Beweis benützt wesentlich nur das wohlbekannte Ergebnis von E. NOETHER (Hilfssatz 1).

Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Arbeit spreche ich meinen herzlichen Dank Herrn Professor L. FUCHS aus.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz 1 (E. NOETHER). *Ein halbeinfacher Ring R besitzt ein Einselement ε und ist die direkte Summe von endlich vielen minimalen Linksidealen $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$, wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ orthogonal idempotente Elemente mit $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$ sind.*[1]

Hilfssatz 2. *Die minimalen Linksideale $R\varepsilon_i$, $R\varepsilon_k$ ($\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_k^2 = \varepsilon_k$) eines (assoziativen) Ringes R sind dann und nur dann als R-Moduln operatorisomorph, wenn $\varepsilon_i R \varepsilon_k$ von Null verschieden ist.*

Beweis. Sind $R\varepsilon_i$ und $R\varepsilon_k$ operatorisomorph, und gilt bei einem gegebenen Operatorisomophismus $\varepsilon_i \rightarrow \varrho\varepsilon_k$ $(\neq 0\,;\ \varrho \in R)$, so folgt $\varepsilon_i = \varepsilon_i\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i\varrho\varepsilon_k$, also $\varepsilon_i R\varepsilon_k \neq 0$.

Es sei $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \neq 0$ $(\alpha \in R)$. Die Abbildung

$$(1) \qquad \varrho\varepsilon_i \rightarrow \varrho\varepsilon_i\,\alpha\varepsilon_k \qquad (\varrho \in R)$$

ist offenbar ein Operatorhomomorphismus von $R\varepsilon_i$ in $R\varepsilon_k$. Da das Bild von $\varepsilon_i\varepsilon_i = \varepsilon_i$ in (1) das Element $\varepsilon_i^2\alpha\varepsilon_k = \varepsilon_i\alpha\varepsilon_k$ $(\neq 0)$ ist, liefert (1) einen Operatorisomorphismus von $R\varepsilon_i$ auf $R\varepsilon_k$.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{l}$ ein minimales Linksideal eines (assoziativen) Ringes R und $\varepsilon(\neq 0)$ ein idempotentes Element in $\mathfrak{l}$, so ist $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper mit dem Einselement ε.*

Beweis. $\varepsilon\mathfrak{l}$ ist ein Unterring von R mit dem linksseitigen Einselement ε. Da für ein beliebiges Element $\varepsilon\lambda$ $(\neq 0\,;\ \lambda \in \mathfrak{l})$ von $\varepsilon\mathfrak{l}$ die Gleichung $\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \mathfrak{l}$ und deshalb $\varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\mathfrak{l}$ gilt, existiert ein Element $\varepsilon\lambda'$ $(\neq 0\,;\ \lambda' \in \mathfrak{l})$ mit $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon$, womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

[1] Für den Beweis s. § 123 der *Algebra, II.* von B. L. VAN DER WAERDEN (Springer, Berlin, 1955).

§ 2. Beweis des Wedderburn-Artinschen Satzes

Der Wedderburn-Artinsche Strukturensatz. *Ein halbeinfacher Ring R ist die (ringtheoretische) direkte Summe von endlich vielen Unterringen, deren jeder einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$R = R\varepsilon_1 + \ldots + R\varepsilon_m\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m \qquad (\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i\,;\ \varepsilon_i\varepsilon_k = 0 \ \text{ für } i \neq k\,;\ i, k = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

wo ε das Einselement und $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$ minimale Linksideale von R bezeichnen.

Offenbar kann man voraussetzen, dass in (2) die minimalen Linksideale als R-Moduln in Klassen operatorisomorpher eingeteilt sind. Da sich die nicht-operatorisomorphen Linksideale unter $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_m$ infolge Hilfssatz 2 paarweise annullieren, bildet die direkte Summe der Linksideale, die in derselben Klasse sind, ein zweiseitiges Ideal von R und deshalb ist R die ringtheoretische direkte Summe von diesen Idealen. Nach einer geeigneten Umordnung kann man erreichen, dass z. B.

$$\mathfrak{a} = R\varepsilon_1 + \ldots + R\varepsilon_h \qquad (1 \leq h \leq m) \tag{4}$$

ein solches Ideal mit dem Einselement

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h \qquad (\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i\,;\ \varepsilon_i\varepsilon_k = 0 \ \text{ für } i \neq k\,;\ i, k = 1, \ldots, h) \tag{5}$$

ist. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist. Da für ein festes Element $\delta_i (\neq 0)$ von $\varepsilon_i R\varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, h)$ das Produkt $R\varepsilon_i \cdot \delta_i$ ein von Null verschiedenes Linksideal von R in $R\varepsilon_1$ ist, gilt $R\varepsilon_i \cdot \delta_i = R\varepsilon_1$, woraus $\varepsilon_1 R\varepsilon_i \cdot \delta_i = \varepsilon_1 R\varepsilon_1$ folgt. Dies bestätigt die Existenz eines Elementes $\delta_i^* \ (\neq 0, \in \varepsilon_1 R\varepsilon_i)$ mit

$$\delta_i^*\delta_i = \varepsilon_1 \qquad (i = 1, \ldots, h)\,. \tag{6}$$

$\delta_i\delta_i^*$ $(\in \varepsilon_i R\varepsilon_i)$ ist wegen (6) idempotent und wegen $\delta_i\delta_i^*\delta_i = \delta_i\varepsilon_1 = \delta_i \neq 0$ von Null verschieden. Da $\varepsilon_i R\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ nach Hilfssatz 3 ein Schiefkörper (mit dem Einselement ε_i) ist, besteht

$$\delta_i\delta_i^* = \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, h)\,. \tag{7}$$

So kann man voraussetzen, dass die Elementepaare $\delta_i\ (\neq 0)$ und $\delta_i^* (\neq 0\,;\ i = 1, \ldots, h)$ mit den Eigenschaften (6) und (7) ausgewählt sind.

Betrachten wir die Abbildung

$$\alpha \to \| \delta_i^* \alpha \delta_j \| \qquad (\alpha \in \mathfrak{a}\,;\ i, j = 1, \ldots, h), \tag{8}$$

wo die rechte Seite eine h-reihige quadratische Matrix über dem Schiefkörper $\varepsilon_1 R\varepsilon_1 = K$ bezeichnet. Nach (8) wird $\mathfrak{a}$ in den vollen Matrizenring K_h vom Range h^2 über K abgebildet und die Homomorphieeigenschaft gilt bezüglich der Addition trivialerweise. Da infolge (5), (7) und (8) für die Elemente $\alpha, \beta\, (\in \mathfrak{a})$

$$\alpha\beta \to \| \delta_i^* \alpha\beta \delta_j \| = \| \delta_i^* \alpha \varepsilon' \beta \delta_j \| = \left\| \sum_{k=1}^{h} \delta_i^* \alpha \varepsilon_k \beta \delta_j \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{h} \delta_i^* \alpha \delta_k \delta_k^* \beta \delta_j \right\| =$$

$$= \| \delta_i^* \alpha \delta_j \| \cdot \| \delta_i^* \beta \delta_j \|$$

richtig ist, ist (8) auch bezüglich der Multiplikation eine homomorphe Abbildung.

Wir zeigen jetzt, dass jede Matrix $\| \varrho_{ij} \|$ $(\varrho_{ij} \in K)$ von K_h als Bildelement in (8) vorkommt. Wegen (4), (6), (8) und der Orthogonalität der idempotenten Elemente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ hat $\| \varrho_{ij} \|$ in (8) das Urbild

$$\sum_{i,j=1}^{h} \delta_i \varrho_{ij} \delta_j^* \in \mathfrak{a}.$$

Ist zuletzt das Bild von $\alpha (\in \mathfrak{a})$ die Nullmatrix, so gilt $\delta_i^* \alpha \delta_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, h)$, woraus wegen (5), (7) die Gleichung

$$\alpha = \varepsilon' \alpha \varepsilon' = \sum_{i,j=1}^{h} \varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \sum_{i,j=1}^{h} \delta_i \cdot \delta_i^* \alpha \delta_j \cdot \delta_j^* = 0$$

folgt.

Damit ist der Beweis vollendet.

Bemerkung. Aus dem vorigen Ergebnis ergibt sich der zweite Wedderburn-Artinsche Strukturensatz über einfache Ringe.

(Eingegangen 20. Februar 1958.)

A FÉLIGEGYSZERŰ GYŰRŰK WEDDERBURN—ARTIN-FÉLE STRUKTÚRA-TÉTELÉNEK EGY ÚJ BIZONYÍTÁSA

STEINFELD O.

Kivonat

Egy (asszociatív) gyűrűt, amelynek nincs zérótól különböző nilpotens balideálja, és amelynek balideáljaira teljesül a minimum-feltétel, *féligegyszerűnek* nevezünk.

E dolgozatban egy olyan új, rövid bizonyítást adunk a féligegyszerű gyűrűk nevezetes WEDDERBURN—ARTIN struktúratételére, amely lényegileg csak a NOETHER-féle alaptételre támaszkodik.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СТРУКТУРНОЙ ТЕОРЕМЫ WEDDERBURN—ARTIN-А ПОЛУПРОСТЫХ КОЛЕЦ

O. STEINFELD

Резюме

Ассоциативное кольцо, которое не имеет отличных от нуля нильпотентных левых идеалов, для левых идеалов которого выполненно условие минимума, называется полупростым.

В настоящей работе дается такое новое, короткое доказательство указанной в заголовке теоремы, которое по существу опирается лишь на основную теорему NOETHER.