KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, II.

ÁDÁM ANDRÁS

Bevezetés

E dolgozat az azonos című, I. sorszámú dolgozat folytatása. Az ott használt terminológiát külön megállapodások nélkül tovább alkalmazzuk. Így (ha mást nem mondunk) gráfon véges gráfot értünk, amelyben kitüntettünk egy kezdőpontot és egy végpontot, és amely a T_1 és T_2 tulajdonságoknak (lásd : [1], 1. §, 213. oldal) eleget tesz. Pontok és élek egy $A_0, k_1, A_1, k_2, \ldots, A_{n-1}, k_n, A_0$ $(k \geqq 2)$ sorozatát *zárt út*nak nevezzük, ha az $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ pontok páronként különböznek, és bármely k_i él $(1 \leqq i \leqq n)$ a sorozatban vele szomszédos pontokat köti össze. Az A_0 pontot a zárt út *záródási pont*jának nevezzük, az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat a zárt út *belső pont*jainak.

Az összes gráfok jellemzése a soros és párhuzamos kapcsolással szemben irreducibilis gráfok leírásán múlik. Dolgozatunkban ezen irreducibilis gráfok bizonyos osztályának szerkezetébe fogunk (nem teljes) betekintést nyerni.

Az [1] dolgozat 2. tétele szerint bármely irreducibilis gráfban van kettős él. (Irreducibilis gráfon mindig egynél több élt tartalmazó irreducibilis gráfot értünk.) Ez a tény lehetőséget nyújt egy irreducibilis gráf pályáinak, éleinek, továbbá maguknak a gráfoknak a következő osztályozására.

Elsőfajú pályának nevezünk egy pályát, ha egyik éle sem kettős él ; másodfajú pályának, ha áthalad legalább egy kettős élen.

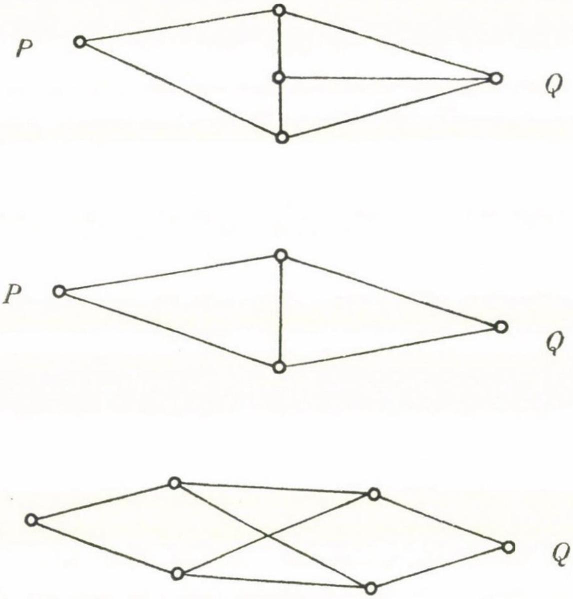
A típusú élnek nevezünk egy élt, ha bármely rajta átmenő pálya elsőfajú. B típusú élnek nevezünk egy élt, amelyen legalább egy elsőfajú és legalább egy másodfajú pálya átmegy. C típusú élnek nevezünk egy nem kettős élt, ha bármely rajta átmenő pálya másodfajú. D típusú éleknek nevezzük a kettős éleket.

Bármely irreducibilis gráf tartalmaz nem kettős élt (pl. a kezdőpontból vagy végpontból kiinduló bármely él). Az eddigiek alapján az irreducibilis gráfoknak a következő hét osztálya lehetséges.

I. osztályú egy gráf, ha A, B, C, D típusú éleket tartalmaz. Ugyanígy egy

II. osztályú gráf A, B, D ;	V. osztályú gráf A, D ;
III. osztályú gráf A, C, D ;	VI. osztályú gráf B, D ;
IV. osztályú gráf B, C, D ;	VII. osztályú gráf C, D

típusú éleket tartalmaz. (Ezeket a definíciókat úgy értjük, hogy pl. VI. osztályúnak nevezünk egy gráfot, ha van B típusú éle, van D típusú éle, nincs A típusú éle és nincs C típusú éle.) Az 1. ábrán példát adunk IV., VI. és VII. osztályú gráfra. Dolgozatunkban (4. és 6. tételek) látni fogjuk, hogy a II., III. és V. gráf-osztályok üresek. Ez a dolgozat elintézetlenül hagyja az egzisztencia-kérdést az I. gráf-osztályra. A dolgozat eredményeinek megbeszélése során Pollák György más eszközökkel bebizonyította hogy nincs olyan sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráf, amely tartalmaz A típusú élt (lásd a következő, [2] dolgozatot); ezzel a 4. és 6. tételekre újabb igazolást, az I. gráf-osztály exisztencia-problémájára tagadó választ nyert.



1. ábra.

Az 1. §-ban értelmezzük az n-pólusú gráfokat, és megállapítunk róluk egy, a továbbiakban szükséges tényt.

A dolgozat lényeges eredményeit tartalmazó 2. §-ban a II. és VI. osztályú gráfok szerkezeti vizsgálatával foglalkozunk. Egy ilyen gráf elemzésének alapgondolata: a D típusú éleket (összefüggésük szerint) osztályokba soroljuk, és azt vizsgáljuk, hogy ezek az osztályok hogyan kapcsolódnak be a nem kettős élek által alkotott gráfba. Eredményeink erre a kérdésre pontos választ adnak, a tárgyalás végén (4. tétel) pedig azt nyerjük, hogy az előálló gráfok mindegyike VI. osztályú. A VI. osztályú gráfok teljes leírásában egyetlen hiányosság marad: a kettős élek által alkotott osztályok belső szerkezetének jellemzése. (Ez a kérdés a kettőnél több pólusú gráfok további vizsgálatával lenne megközelíthető.) A 3. §-ban a III. és V. osztályok ürességét igazoljuk az előző paragrafusok eredményeinek felhasználása nélkül.

Köszönetet mondok Pollák Györgynek számos értékes megjegyzéséért, és jelentékeny részvételéért a dolgozat (különösen a 2c) §) végső formába öntésében.

1. §. n-pólusú gráfok

Egy véges gráfot *n-pólusú gráf*nak (röviden: n-gráfnak, e paragrafuson belül egyszerűen gráfnak) nevezünk, ha ki van tüntetve n számú pontja ($n \geqq 2$), amelyeket pólusoknak nevezünk, és a gráf eleget tesz bizonyos összefüggőségi feltételnek. A gráfnak egy olyan pontját, amely nem pólus, a gráf belső pontjának nevezzük. A gráf egy útját belső útnak nevezzük, ha az út minden belső pontja a gráfnak is belső pontja. Az említett feltétel: megkívánjuk, hogy a gráf bármely élén, továbbá bármely pontján átmenjen olyan belső út, amelynek végpontjai pólusok.

Egy n-gráfot T_3 tulajdonságúnak nevezünk akkor, ha egy élből áll, vagy akkor, ha egynél több éle van, és bármely két pontját összeköti egy belső út, és nincs olyan éle, amely két pólust köt össze.[1]

Segédtétel. Soroljuk egy T_3 tulajdonságú n-gráf összes pólusait két (nem üres) diszjunkt α_1, α_2 osztályba. Ekkor a gráf bármely pontján vagy élén átmegy olyan belső út, amelynek egyik végpontja α_1-be, másik végpontja α_2-be tartozó pólus.

Bizonyítás. Egy élű gráfra nyilvánvaló a tétel. A másik esetben állításunk pontokra és élekre azonos módszerrel igazolható. A k élen menjen át az $a(AB)$ belső út, ahol A és B pólusok. Ha mind A, mind B az α_1 osztályba tartoznak, akkor legyen C az a út tetszőleges belső pontja. C belső pontja a gráfnak. D legyen egy α_2-beli pólus, $b(CD)$ legyen tetszőleges belső út. E legyen b utolsó olyan pontja, amely pontja az a útnak is. Ekkor léteznek az $a[AE] \cdot b[ED]$ és $a^{-1}[BE] \cdot b[ED]$ utak, és egyikük átmegy a k élen.

2. §. II. és VI. osztályú gráfok

a) Elnevezések, jelölések. $\mathfrak{G}$ legyen olyan irreducibilis gráf, amely tartalmaz B típusú élt, de nem tartalmaz C típusút. Jelöljük $\mathfrak{G}'$-vel azt a gráfot amely $\mathfrak{G}$-nek A és B típusú éleiből (továbbá a megfelelő pontokból) áll, $\mathfrak{G}'$ kezdőpontja és végpontja egyezzék meg $\mathfrak{G}$ kezdőpontjával, ill. végpontjával). ($\mathfrak{G}$-nek bármely olyan éle, amely P-hez vagy Q-hoz illeszkedik, nem lehet kettős él, tehát $\mathfrak{G}'$-höz tartozik.) Így kettős él nélküli gráfot kapunk, minthogy egy $\mathfrak{G}'$-beli kettős él $\mathfrak{G}$-nek is kettős éle volna. $\mathfrak{G}'$ egynél több élből áll, és nyilván rendelkezik a T_1 és T_2 tulajdonságokkal, tehát [1] 4. tétele szerint $\mathfrak{G}'$ előállítható soros és párhuzamos kapcsolással a Po——oQ alapelemből.

A $\mathfrak{H}$ gráfot a $\mathfrak{G}'$ gráf *alkatrészé*nek nevezzük, ha vannak olyan $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n = \mathfrak{H}$ ($n \geqq 0$) gráfok, melyeknél minden i-re ($1 \leqq i \leqq n$) $\mathfrak{G}_i$ soros vagy párhuzamos komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek.[2]

A $\mathfrak{G}$ gráf D típusú éleit osztályozzuk a következő ekvivalencia-reláció szerint: a k_1 és k_2 élek ekvivalensek, ha létezik olyan út vagy zárt út, amelynek első éle k_1, utolsó éle k_2, és amelynek egyetlen belső pontja sem pontja

---

[1] Az $n = 2$ esetben a T_3 tulajdonság a párhuzamos irreducibilitással ekvivalens. Az egy élű gráf nyilván kétpólusú.

[2] Abba, hogy $\mathfrak{G}_i$ soros komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek, beleértjük, hogy $\mathfrak{G}_i$ sorosan irreducibilis legyen. (Párhuzamos komponensnél párhuzamos irreducibilitást feltételezünk.) Ezért, ha $\mathfrak{G}_i$ soros komponense $\mathfrak{G}_{i-1}$-nek, akkor $\mathfrak{G}_{i+1}$ párhuzamos komponense $\mathfrak{G}_i$-nek (és megfordítva). Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{G}_i$ bármely alkatrészéhez egyetlen ilyen sorozat létezik. Azt, hogy $\mathfrak{H}_2$ ($\neq \mathfrak{H}_1$) tagja a $\mathfrak{H}_1$ alkatrészhez vezető sorozatnak, a $\mathfrak{H}_2 \supset \mathfrak{H}_1$ jelöléssel juttatjuk kifejezésre.

$\mathfrak{G}'$-nek.[3] A D típusú élek így elkülönített sokaságait *híd*aknak fogjuk nevezni. Minden hídhoz hozzászámítjuk az élek végpontjait is. Két hídnak közös pontja csak akkor lehet, ha az $\mathfrak{G}'$-nek is pontja.

A $\mathfrak{D}$ híd *határpont*jainak nevezzük $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{G}'$ közös pontjait. Minden hídnak legalább két határpontja van. Minden híd T_3 tulajdonságú n-gráf (pólusoknak a határpontokat tekintve). Minden $\mathfrak{D}$ hídhoz hozzárendelünk egy $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ alkatrészt a következő módon:

1°. Ha $\mathfrak{D}$-nek két határpontja van, és ezek egy párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}$ alkatrésznek kezdőpontja, illetve végpontja, akkor[4] legyen $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\mathfrak{D})$.

2°. Minden más esetben legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ $\mathfrak{G}'$-nek az a legszűkebb alkatrésze, amely $\mathfrak{D}$ valamennyi határpontját tartalmazza.

Legyen $\mathfrak{H}$ valamely alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Ekkor $\mathfrak{H}^*$ jelentse a $\mathfrak{H}$ éleiből, továbbá az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{H}$ feltételt teljesítő hidak éleiből álló gráfot, és $\mathfrak{H}^{**}$ jelentse a $\mathfrak{H}^*$ éleiből, továbbá az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$ feltételt teljesítő hidak éleiből (és mindkét esetben a megfelelő pontokból) álló gráfot.

Legyen a $\mathfrak{G}'$ gráf $\mathfrak{H}$ alkatrészének kezdőpontja P^*, végpontja Q^*. Ha az $a(P^*Q^*)$ út $\mathfrak{H}^{**}$-hoz tartozó élekből áll, akkor a része $\mathfrak{G}$ egy pályájának, például a $b[PP^*] \cdot a \cdot b[Q^*Q]$ pályának, ahol b $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló, P^*-en (így Q^*-on is) átmenő tetszőleges pálya. Ebből következik, hogy $\mathfrak{H}$ egy él, amely kettős éle a P^* kezdőpontú, Q^* végpontú $\mathfrak{H}^{**}$ gráfnak, a $\mathfrak{G}$ gráfnak is kettős éle.

Ha egy gráf valamely belső pontján a gráf valamennyi pályája átmegy, akkor ezt a pontot a gráf *csomópont*jának nevezzük. Ha egy gráfnak van csomópontja, akkor a gráf sorosan reducibilis, és komponenseit éppen a csomópontok választják szét. (Vö. [1], [9] lábjegyzet.) Ha A és B csomópontok, akkor annak kifejezésére, hogy alkalmas pályán A megelőzi B-t, az $A \prec B$ jelölést használjuk (ekkor A a gráf bármely pályáján megelőzi B-t.) Legyenek $\mathfrak{H}_1$ és $\mathfrak{H}_2$ a $\mathfrak{H}$ sorosan reducibilis gráf komponensei: ha alkalmas pálya (tehát bármely pálya) előbb tartalmaz $\mathfrak{H}_1$-beli, és később $\mathfrak{H}_2$-beli éleket, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{H}_1$ előbbi komponense $\mathfrak{H}$-nak, mint $\mathfrak{H}_2$.

A $\mathfrak{G}$ gráf $\mathfrak{D}_1$ és $\mathfrak{D}_2$ hídjait *ekvivalens hidak*nak nevezzük, ha határpontjaik megegyeznek. (Azaz: $\mathfrak{D}_1$ bármely határpontja határpontja $\mathfrak{D}_2$-nek is, és fordítva.)

Legyen $\mathfrak{H}$ párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek, legyenek $\mathfrak{H}_\alpha$ és $\mathfrak{H}_\beta$ komponensei $\mathfrak{H}$-nak. $\mathfrak{H}_\alpha$-t és $\mathfrak{H}_\beta$-t *összetartozó komponensek*nek nevezzük, ha $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_\beta$, vagy akkor, ha van $\mathfrak{H}$ komponenseinek olyan

$$\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_\beta \qquad (n \geqq 2)$$

sorozata, hogy bármely i számhoz $(2 \leqq i \leqq n)$ van olyan $\mathfrak{D}$ híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, és amelynek két alkalmas határpontja belső pontja $\mathfrak{H}_{i-1}$-nek, illetve $\mathfrak{H}_i$-nek.

b) Főtétel. 1. tétel. *Bármely $\mathfrak{D}$ hídra $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek, és $\mathfrak{D}$ bármely határpontja csomópontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ valamely komponensének.*

---

[3] Az osztályozás ekvivalencia-jellege könnyen igazolható. Ha $a(AB)$ a k_1 és k_2 éleket, $b(CD)$ pedig a k_2 és k_3 éleket összekapcsoló, említett tulajdonságú (esetleg zárt) út, és E a-nak első olyan belső pontja, amely b-nek is pontja, akkor $D \neq E$ esetén az $a[AE] \cdot b\,[ED]$, $D = E$ esetén pedig az $a[AE] \cdot k_3^{-1}$ (esetleg zárt) út létezése biztosítja, hogy k_1 és k_3 relációban állnak.

[4] A későbbi eredmények azt fogják kimutatni, hogy ez az eset nem fordulhat elő, pillanatnyilag azonban számolnunk kell ezzel a lehetőséggel is.

Kiegészítés. *$\mathfrak{G}'$ párhuzamosan reducibilis, és $\mathfrak{G}'$ bármely két komponense összetartozó.*

A tétel és a kiegészítés bizonyítása a következő öt állítás igazolására fog tagolódni:

1°. Van olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}'$.

2°. $\mathfrak{H}$ legyen sorosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. Ekkor $\mathfrak{D}$ bármely határpontja kezdőpontja, végpontja, vagy csomópontja $\mathfrak{H}$-nak.

3°. $\mathfrak{H}$ legyen sorosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Feltételezzük, hogy, az 1. tétel állításai igazak minden olyan hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \supset \mathfrak{H}$.[5] Ekkor nincs olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$.

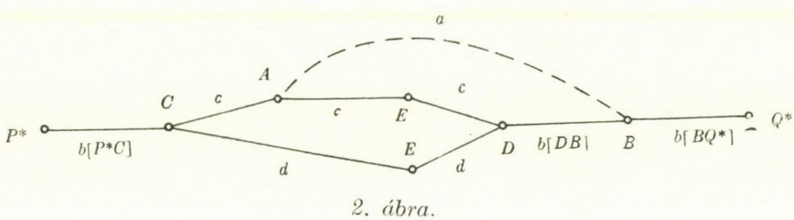
4°. $\mathfrak{H}$ legyen párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}$-nek. Feltételezzük, hogy az 1. tétel állításai igazak minden olyan hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) \supset \mathfrak{H}$.[5] Ekkor minden olyan $\mathfrak{D}$ hídra, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ bármely határpontja csomópontja $\mathfrak{H}$ valamely komponensének.

5°. $\mathfrak{G}'$ bármely két komponense összetartozó.

Rátérünk a **bizonyítás** végrehajtására.

1°. $\mathfrak{G}'$ felbontható a soros és párhuzamos kapcsolások egyikével. Ha nem volna olyan híd, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}'$, akkor $\mathfrak{G}$ is felbontható lenne $\mathfrak{G}'$-vel megegyező módon. ($\mathfrak{G}$ komponensei a $\mathfrak{G}_i'^{**}$ gráfok volnának, ahol $\mathfrak{G}_i'$ végigfut $\mathfrak{G}'$ komponensein.)

2°. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$ kezdőpontja P^*, végpontja Q^*. $\mathfrak{D}$-nek A legyen olyan határpontja, amely sem kezdőpontja, sem végpontja, sem csomópontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-nek. A tehát belső pontja $\mathfrak{H}$ valamely $\mathfrak{H}_i$ komponensének. B legyen $\mathfrak{D}$-nek olyan határpontja, amely nincs $\mathfrak{H}_i$-ben. $a(AB)$ legyen $\mathfrak{D}$-nek belső útja. Szimmetria-okokból feltételezhetjük, hogy $\mathfrak{H}_i$ előbbi komponens, mint a B-t tartalmazó komponens(ek). $\mathfrak{H}_i$ kezdőpontja legyen C, végpontja D;



2. *ábra.*

$b(P^*Q^*)$ legyen $\mathfrak{H}$-beli élekből álló, B-n átmenő út. Legyenek $c(CD)$ és $d(CD)$ $\mathfrak{H}_i$ -beli élekből álló utak, c menjen át A-n, d ne menjen át A-n. E legyen $c[AD]$ első olyan pontja, amely pontja d-nek is. Ekkor léteznek a

$$b[P^*C] \cdot d[CE] \cdot c^{-1}[EA] \cdot a \cdot b[BQ^*]$$

és a

$$b[P^*C] \cdot c \cdot b[DQ^*]$$

utak, tehát $c[AE]$ kettős út, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{G}'$-beli élekből áll (2. ábra).

3°. A bizonyítás előző szakasza, továbbá az indukciós feltevés értelmében ha egy $\mathfrak{G}$-beli út két szomszédos éle közül pontosan az egyik $\mathfrak{H}^*$-beli él, akkor az útnak a két él közé eső pontja $\mathfrak{H}^*$-nak kezdőpontja vagy végpontja vagy egyik

[5] A feltételt érvényesnek tekintjük akkor is, ha nincs. ilyen híd

csomópontja ; azaz $\mathfrak{H}$ bármely $\mathfrak{H}_i$ komponensének belsejét csak $\mathfrak{H}_i$ kezdőpontján vagy végpontján át lehet elhagyni.

Jelöljük A_0-lal $\mathfrak{H}$ kezdőpontját, A_1-gyel, A_2-vel, ..., A_{n-1}-gyel $\mathfrak{H}$ csomópontjait (az $\prec$ rendezési reláció szerinti sorrendben), A_n-nel $\mathfrak{H}$ végpontját. A bizonyításnak ebben a szakaszában kivételesen A_0-t és A_n-et is csomópontoknak nevezzük.

Tekintsük $\mathfrak{H}$ első olyan A_{i_0} csomópontját $(0 \leqq i_0 \leqq n-1)$, amely határpontja egy olyan $\mathfrak{D}$ hídnak, amelyre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. $k(A_{i_0}B)$ legyen $\mathfrak{D}$-beli él. Mivel k kettős éle $\mathfrak{G}$-nek, van olyan a pálya, amelynek k^{-1} része (azaz: amely a k élen ,,A_{i_0} felé" halad át). Az a pályán $\mathfrak{H}$ valamely A_{k_0} csomópontja megelőzi A_{i_0}-t és $k_0 < i_0$. Tekintsük az összes olyan (i, k) $(1 \leqq i,\ k \leqq n-1)$ számpárokat, amelyekre az a pályán A_k előbb fordul elő, mint A_i, és $i < k$. Ezek között a párok között van olyan, amelyre a $k-i$ különbség minimális. Legyen (i', k') egy ilyen pár. Ekkor az a pálya nem megy át $\mathfrak{H}$-nak egy olyan A_j csomópontján sem, amelyre[6] $A_{i'} \prec A_j \prec A_{k'}$, és ennek következtében az $A_{i'}$ és $A_{k'}$ közötti komponensek egyetlen belső pontján sem. Így létezik az

$$a[PA_{k'}] \cdot b^{-1}[A_{k'}A_{i'}] \cdot a[A_{i'}Q]$$

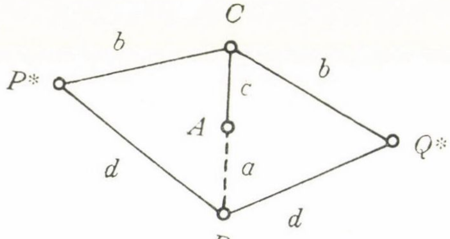
pálya — ahol $b(A_0A_n)$ $\mathfrak{H}$-beli élekből álló tetszőleges út — ezek szerint $b[A_{i'}A_{k'}]$ kettős út, értelmezésével ellentétben.

4°. $\mathfrak{H}$ legyen párhuzamosan reducibilis alkatrésze $\mathfrak{G}'$-nek. Az indukciós feltevés szerint ha egy $\mathfrak{G}$-beli út két szomszédos éle közül pontosan az egyik $\mathfrak{H}^{**}$-beli él, akkor az útnak e két él közötti pontja $\mathfrak{H}$-nak P^* kezdőpontja vagy Q^* végpontja.

Legközelebbi célunk kimutatni, hogy ha $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, akkor a $\mathfrak{D}$ hídnak sem P^*, sem Q^* nem határpontja. Ha $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}'$, akkor ez nyilvánvaló, az ellenkező esetben legyen P^* $(\neq P)$ határpontja $\mathfrak{D}$-nek. $k(P^*A)$ legyen $\mathfrak{D}$-beli él, a legyen $\mathfrak{G}$ olyan pályája, amelynek k^{-1} része. Ekkor az a pályán Q^* megelőzi P^*-ot (tehát $Q^* \neq Q$). Legyen $b(P^*Q^*)$ a $\mathfrak{H}$ gráf egy pályája. Az a pályán pontosan az $a[Q^*P^*]$ út élei $\mathfrak{H}^{**}$-beli élek, tehát létezik $\mathfrak{G}$-nek az

$$a[PQ^*] \cdot b^{-1} \cdot a[P^*Q]$$

pályája, ellentmondásban b értelmezésével. Ha Q^* lép fel a $\mathfrak{D}$ híd határpontjaként, akkor szimmetrikus módon jutunk ellentmondáshoz.



3. ábra.

A $\mathfrak{D}$ hídnak tehát bármely határpontja belső pontja $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$-nak. További feladatunk igazolni, hogy bármely határpont $\mathfrak{H}$ valamely komponensének csomópontja. A bizonyításnak ebben a részében is indirekt módon következtetünk. Legyen A olyan belső pontja $\mathfrak{H}$ valamely $\mathfrak{H}_1$ párhuzamos komponensének, amely nem csomópontja $\mathfrak{H}_1$-nek, és határpontja $\mathfrak{D}$-nek. Legyen $\mathfrak{D}$-nek a B határpontja $\mathfrak{H}$-nak $\mathfrak{H}_2$ komponensén $(\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2)$. $a(AB)$ legyen

[6] Ugyanis az a pályán tekintett A_j, $A_{k'}$, $A_{i'}$ vagy az $A_{k'}$, A_j, A_i előfordulási sorrend esetén a $j - i' < k' - i'$ egyenlőtlenség, az $A_{k'}$, $A_{i'}$, A_j sorrend esetén pedig a $k' - j < k' - i'$ egyenlőtlenség ellentmond (i', k') értelmezésének.

belső útja $\mathfrak{D}$-nek. b legyen $\mathfrak{H}_1$-nek A-n át nem menő pályája. $c(AC)$ legyen $\mathfrak{H}_1$-beli élekből álló olyan út, amelynek C $(\neq P^*, Q^*)$ az egyetlen közös pontja b-vel. (Ilyen út $\mathfrak{H}_1$ párhuzamos irreducibilitása miatt létezik.) Legyen d $\mathfrak{H}_2$-nek egy B-n átmenő pályája.

Ekkor léteznek $\mathfrak{H}$-nak a

$$d[P^*B] \cdot a^{-1} \cdot c \cdot b[CQ^*]$$

és a

$$b[P^*C] \cdot c^{-1} \cdot a \cdot d[BQ^*]$$

pályái (3. ábra), tehát c kettős út, ellentmondásban azzal, hogy $\mathfrak{H}_1$-beli élekből áll.

5°. Az összetartozás relációja ekvivalencia-reláció $\mathfrak{G}'$ komponenseire. Ha egynél több osztályra bontja ez a reláció a komponenseket, akkor $\mathfrak{G}$ ugyanannyi párhuzamos komponensre esik szét. ($\mathfrak{G}$ egy komponenséhez a következő élek tartoznak: $\mathfrak{G}'$ komponensei egy osztályának élei, továbbá azoknak a hidaknak élei, amelyeknek határpontjai a szóban forgó komponensekben vannak.)

c) További elemzés. Legyen $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{G}'$-nek valamely párhuzamosan reducibilis alkatrésze. Komponensen mindig $\mathfrak{H}$ valamely komponensét fogjuk érteni. Tekintsük mindazon hidakat, amelyekre $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$. (Ha $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}'$, akkor előfordulhat, hogy nincs ilyen híd.) E pontban csupán ilyen hidakkal foglalkozunk. $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ és $\mathfrak{H}_3$ jelentsék $\mathfrak{H}$ három különböző komponensét[7]. A $\mathfrak{H}_i$ komponens $(i = 1, 2, 3)$ k-adik csomópontját $A_k^{(i)}$-val fogjuk jelölni. Ha ugyanazon $\mathfrak{H}_i$ komponensnek több $A_k^{(i)}$, $A_l^{(i)}$, $A_m^{(i)}$, $A_n^{(i)}$ csomópontjáról beszélünk, akkor megállapodunk az $A_k^{(i)} \prec A_l^{(i)} \prec A_m^{(i)} \prec A_n^{(i)}$ rendezésben.

Következő tételünk négy esetre tagolódik: négy különböző feltétel mindegyike ugyanazt a következményt vonja maga után.

2. tétel. *Legyenek $f(AB)$ és $g(CD)$ a (nem feltétlenül különböző) $\mathfrak{D}_\alpha$, illetve $\mathfrak{D}_\beta$ hidak belső útjai.*

1. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_n^{(2)}$, $C = A_m^{(2)}$ és $D = A_l^{(1)}$
2. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(1)}$, $C = A_l^{(1)}$ és $D = A_n^{(1)}$
3. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(1)}$, $C = A_l^{(1)}$ és $D = A_n^{(2)}$
4. feltétel. Legyen $A = A_k^{(1)}$, $B = A_m^{(2)}$, $C = A_l^{(1)}$ és $D = A_n^{(3)}$

Ha e négy feltétel valamelyike teljesül, akkor f és g nem idegenek egymástól (tehát $\mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{D}_\beta$).

Bizonyítás. $a(P^*Q^*)$, $b(P^*Q^*)$ és $c(P^*Q^*)$ legyenek rendre $\mathfrak{H}_1$-beli $\mathfrak{H}_2$-beli, illetve $\mathfrak{H}_3$-beli élekből álló utak (P^* a $\mathfrak{H}$ gráf kezdőpontja, Q^* pedig $\mathfrak{H}$ végpontja). Ha f és g idegenek volnának, akkor az a út valamely (nem elfajult) része kettős útnak bizonyulna. Létezne ugyanis az 1. feltétel érvényessége esetén a

$$b[P^*A_m^{(2)}] \cdot g \cdot a^{-1}[A_l^{(1)}A_k^{(1)}] \cdot f \cdot b[A_n^{(2)}Q^*] \quad ,$$

a 2. feltétel érvényessége esetén az

$$a[P^*A_k^{(1)}] \cdot f \cdot a^{-1}[A_m^{(1)}A_l^{(1)}] \cdot g \cdot a[A_n^{(1)}Q^*] \quad ,$$

[7] A tétel némely esetében csak egy vagy két komponensre van szükségünk, ilyenkor kettőnél több komponens létezését nem követeljük meg.

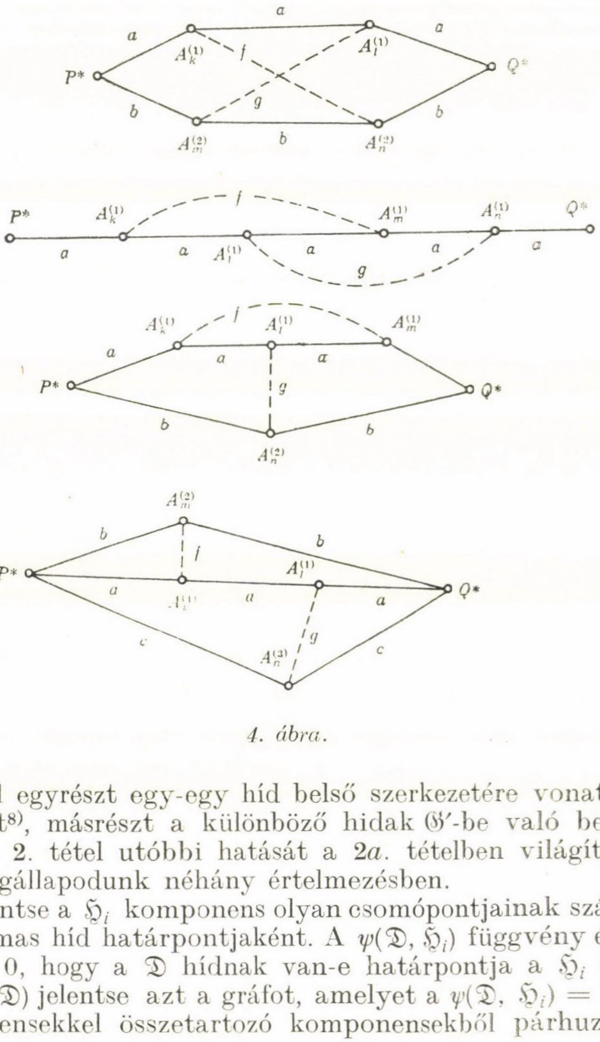
a 3. feltétel érvényessége esetén az

$$a[P^*A_k^{(1)}]\cdot f\cdot a^{-1}[A_m^{(1)}A_l^{(1)}]\cdot g\cdot b[A_n^{(2)}Q^*]\,,$$

a 4. feltétel érvényessége esetén pedig a

$$c[P^*A_n^{(3)}]\cdot g^{-1}\cdot a^{-1}[A_l^{(1)}A_k^{(1)}]\cdot f\cdot b[A_m^{(2)}Q^*]$$

út (4. ábra).



4. ábra.

A 2. tétel egyrészt egy-egy híd belső szerkezetére vonatkozóan jelent megszorításokat[8], másrészt a különböző hidak $\mathfrak{G}'$-be való bekapcsolódását szabályozza. A 2. tétel utóbbi hatását a 2*a*. tételben világítjuk meg. Ezt megelőzően megállapodunk néhány értelmezésben.

$\varphi(\mathfrak{H}_i)$ jelentse a $\mathfrak{H}_i$ komponens olyan csomópontjainak számát, amelyek fellépnek alkalmas híd határpontjaként. A $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_i)$ függvény értéke aszerint legyen 1 vagy 0, hogy a $\mathfrak{D}$ hídnak van-e határpontja a $\mathfrak{H}_i$ komponensen, vagy sem. $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ jelentse azt a gráfot, amelyet a $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_i) = 1$ feltételt teljesítő komponensekkel összetartozó komponensekből párhuzamos kapcsolással kapunk.

---

[8] Azonban a T_3 tulajdonságú legáltalánosabb n-gráfok is felléphetnek hidakként. Ha $\mathfrak{D}$ határpontjai páronként $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ különböző komponenseihez tartoznak, akkor ugyanis a 2. tétel nem jelent korlátozást $\mathfrak{D}$ szerkezetére.

Abban az esetben, mikor $\mathfrak{D}_\alpha \neq \mathfrak{D}_\beta$, a 2. tétel azt mondja ki, hogy két f és g út az ott felsorolt módok egyikén sem helyezkedhet el. A 2. tételnek ezt az esetét a következőkben α) állításnak fogjuk nevezni. A 2a. tételben az α) állításnak két ekvivalens átfogalmazását fogjuk adni.

2a. tétel. *Az* α) *állítás ekvivalens a következő* β) és γ) *állításokkal* :

β) *Legyen* A_α *határpontja a* $\mathfrak{D}_\alpha$ *hídnak, és* A_β *határpontja a* $\mathfrak{D}_\beta$ *hídnak. Legyenek* A_α *és* A_β *csomópontjai a* $\mathfrak{H}_1$ *komponensnek, legyen érvényes* $A_\alpha \prec A_\beta$. A'_α *legyen a* $\mathfrak{D}_\alpha$ *hídnak valamely határpontja a* $\mathfrak{H}_2 (\neq \mathfrak{H}_1)$ *komponensen. Ekkor* $\mathfrak{D}_\beta$ *bármely* A'_β *határpontjára igaz az* $A_\alpha \preceq A'_\beta$ *és* $A'_\alpha \preceq A'_\beta$ *megelőzések egyike. Érvényes az az állítás, amely* β) *eddigi részéből a* $\preceq$ *és* $\prec$ *jelek megfordításával kapható.*

γ) *Azok a hidak, amelyekre* $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ *ugyanaz, teljesítik a következő három állítást* :

(1) *Ha* $\mathfrak{D}_\alpha$ *és* $\mathfrak{D}_\beta$ *ekvivalens hidak, és határpontjaik száma legalább* 4, *akkor ezek a határpontok páronként különböző komponenseken vannak.*

(2) *Teljesüljön a* $\mathfrak{D}_\alpha$ *és* $\mathfrak{D}_\beta$ *nem ekvivalens hidak két alkalmas* A_α *és* A_β *határpontjára* $A_\alpha \prec A_\beta$. *Ha* A°_α *és* A°_β *határpontjai* $\mathfrak{D}_\alpha$*-nak, illetve* $\mathfrak{D}_\beta$*-nak és ugyanazon komponensen helyezkednek el, akkor* $A^\circ_\alpha \preceq A^\circ_\beta$.

(3) *Ha* $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$ *legalább három komponensből áll, továbbá a* $\mathfrak{H}_1$ *komponensére és a különböző* $\mathfrak{D}_\alpha$, $\mathfrak{D}_\beta$ *hidakra*

$$\psi(\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{H}_1) = 1\,, \quad \psi(\mathfrak{D}_\beta, \mathfrak{H}_1) = 1\,, \quad \text{és} \quad \varphi(\mathfrak{H}_1) > 1$$

teljesülnek, akkor a $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_1) = 1$ *feltételt kielégítő hidaknak* $\mathfrak{H}_1$*-en kívüli határpontjai egyetlen* $\mathfrak{H}_2$ *komponensen vannak, és* $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$.

Bizonyítás. $\alpha) \to \beta)$. Ha A'_β $\mathfrak{H}_1$-től és $\mathfrak{H}_2$-től különböző komponensnek volna csomópontja, akkor ellentmondásba jutnánk a 2. tétel 4. feltételével (összekötve A_α-t és A'_α-t $\mathfrak{D}_\alpha$ egy belső útjával, A_β-t és A'_β-t pedig $\mathfrak{D}_\beta$ egy belső útjával). Ha $A'_\beta \prec A_\alpha$ vagy $A'_\beta \prec A'_\alpha$ volna igaz, akkor hasonló módon ellentmondást nyernénk a 2. tétel 3., illetve 1. feltételével.

$\beta) \to \gamma)$. Legyenek A, B és C $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ határpontjai, teljesüljön $A \prec B$, C legyen más komponensen, mint A. Feltételezhetjük, hogy az $A \prec X \prec B$ feltételt kielégítő X pontok egyike sem határpontja $\mathfrak{D}_\alpha$-nak és $\mathfrak{D}_\beta$-nak. D legyen $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ tetszőleges határpontja. Az $A = A_\alpha$, $B = A_\beta$, $C = A'_\alpha$, $D = A'_\beta$ „szereposztással" $C \preceq D$ vagy $A \preceq D$ adódik. Az $A = A_\beta$, $B = A_\alpha$, $C = A'_\alpha$, $D = A'_\beta$ szereposztás szerint (β) második részét felhasználva) pedig $D \preceq C$ és $D \preceq B$ egyike igaz. D tehát megegyezik A, B és C egyikével, azaz (1)-et igazoltuk.

Teljesüljön (2) feltétele, továbbá az $A_\alpha \prec X \prec A_\beta$ formulát teljesítő X pontok egyike se lépjen fel $\mathfrak{D}_\alpha$ vagy $\mathfrak{D}_\beta$ határpontjaként. Ha az A_α-t és A°_α-t tartalmazó komponensek különbözőek, akkor β) nyilván magában foglalja (2)-t. Hátra van még az az eset, mikor A_α, A_β, A°_α és A°_β ugyanazon $\mathfrak{H}_1$ komponens csomópontjai. Tételezzük fel, hogy $A^\circ_\beta \prec A^\circ_\alpha$. Célunk kimutatni, hogy $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ ekvivalens hidak. A β)-val való ellentmondás elkerülésére egy lehetőségünk van : igaz $A^\circ_\beta = A_\alpha \prec A_\beta = A^\circ_\alpha$, és sem $\mathfrak{D}_\alpha$-nak, sem $\mathfrak{D}_\beta$-nak nincs más határpontja a $\mathfrak{H}_1$ komponensen. Legyenek A^*_α és A^*_β $\mathfrak{H}_1$-en kívüli tetszőleges határpontjai $\mathfrak{D}_\alpha$-nak, illetve $\mathfrak{D}_\beta$-nak. Alkalmas szereposztással β) mind az $A^*_\alpha \preceq A^*_\beta$, mind az $A^*_\beta \preceq A^*_\alpha$ megelőzést biztosítja, tehát $A^*_\alpha = A^*_\beta$.

Teljesüljön (3) feltétele ; ekkor találhatóak olyan $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ hidak, hogy $\mathfrak{H}_1$-en elhelyezkedő alkalmas A_α, illetve A_β határpontjaik különböznek. Legyen $\mathfrak{D}_\alpha$-nak egy határpontja a $\mathfrak{H}_2$ komponensen, ekkor β) következtében $\mathfrak{D}_\beta$-nak minden $\mathfrak{H}_1$-en kívüli határpontja $\mathfrak{H}_2$-n helyezkedik el. Hasonló meggondolásokkal adódik, hogy $\mathfrak{D}_\alpha$-nak sincs $\mathfrak{H}_1$-en és $\mathfrak{H}_2$-n kívül határpontja. Eredményünk a $\mathfrak{H}_1$-hez csatlakozó bármely $\mathfrak{D}_\gamma$ hídra igaz, hiszen a fenti következtetés végigvihető $\mathfrak{D}_\gamma$-ra, valamint $\mathfrak{D}_\alpha$ és $\mathfrak{D}_\beta$ egyikére. Igazolnunk kell még, hogy $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$. A $\psi(\mathfrak{D}, \mathfrak{H}_2) = 1$ feltételt kielégítő hidak bármelyikének vagy összes $\mathfrak{H}_2$-n kívüli határpontjai $\mathfrak{H}_1$-en vannak, vagy pedig nincs határpontj a $\mathfrak{H}_1$-en; az $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{D})$-re tett kikötés miatt létezik az utóbbi tulajdonsággal rendelkező híd. Ha mindkét típusból kiválasztunk egy-egy hidat, akkor β) miatt ezeknek összesen egy határpontjuk van $\mathfrak{H}_2$-n. A kiválasztás tetszőlegesen történhetett, ezért $\varphi(\mathfrak{H}_2) = 1$.

$\gamma) \to \alpha)$. Ugyanis ($\mathfrak{D}_\alpha \neq \mathfrak{D}_\beta$ esetén) a 2. tétel 1., 2. és 3. esetei a γ) állítás (1) és (2) része miatt igazak, a 4. esetet pedig a (3) rész vonja maga után.

d) Általános áttekintés. A következő tételben a $\mathfrak{G}$ gráftól csupán annyit kívánunk meg, hogy bármely pontjából induljon ki él. (A T_1 és T_2 tulajdonságokat[9] és az irreducibilitást nem feltételezzük.)

3. tétel. *Legyen adva egy $\mathfrak{G}$ gráf. $\mathfrak{G}'$ legyen olyan részgráfja $\mathfrak{G}$-nek, melynél $\mathfrak{G}'$ kezdőpontja és végpontja megegyezik $\mathfrak{G}$ kezdőpontjával, illetve végpontjával, továbbá $\mathfrak{G}'$ felépíthető a P○——○Q alapelemből soros és párhuzamos kapcsolásokkal. $\mathfrak{G}$-nek $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó éleit osztályozzuk H-osztályokba ugyanazzal az eljárással, amellyel e paragrafus a) részében a hidakat értelmeztük. Legyenek ezek a H-osztályok T_3 tulajdonságú n-gráfok. Ha az 1. és 2. tételek, valamint az 1. tétel kiegészítése érvényben maradnak, akkor $\mathfrak{G}$ vagy II. vagy VI. osztályú irreducibilis gráf, amelynek pontosan a $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó élei kettős élek.*

Bizonyítás. $\mathfrak{G}$ irreducibilitását az 1. tétel kiegészítése biztosítja. $\mathfrak{G}$-nek bármely, $\mathfrak{G}'$-be nem tartozó k éle benne van egy $\mathfrak{D}$ H-osztálynak két határpontot összekötő belső útjában, tehát az 1. §-ban igazolt segédtétel értelmében egy olyan $a(AB)$ belső útban is, amely $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ két különböző komponenséhez tartozó határpontokat köt össze. Legyen $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ kezdőpontja P^*, végpontja Q^*; $b(P^*Q^*)$ és $c(P^*Q^*)$ legyenek A-n, illetve B-n átmenő, $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-beli élekből álló utak. Léteznek a $b[P^*A] \cdot a \cdot c[BQ^*]$ és $c[P^*B] \cdot a^{-1} \cdot b[AQ^*]$ utak, tehát k kettős él.

A $\mathfrak{G}'$-re tett kikötésünk szerint $\mathfrak{G}'$ bármely éle egyértelmű irányítást nyer, ha a rajta átmenő, csak $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló pályákat tekintjük. $\mathfrak{G}'$ éleit mindig ilyen irányításban fogjuk jelölni. Bizonyítani akarjuk, hogy $\mathfrak{G}'$ egyik k éléhez sincs $\mathfrak{G}$-nek olyan pályája, amely ezen az élen ,,visszafelé'' megy át (azaz: amelynek k^{-1} része). Az ellenkező esetben legyen az a pályán k az első $\mathfrak{G}'$-beli él, amelyen a visszafelé megy át. k_1 legyen az a pályán k^{-1}-et közvetlenül megelőző él.

1. eset: k_1 $\mathfrak{G}'$-beli él. $\mathfrak{G}'$-nek van egy (egyértelműen meghatározott) legszűkebb párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}$ alkatrésze, amelynek Q^* végpontja k-nek is, k_1-nek is végpontja. Másrészt, az 1. tétel következtében a $\mathfrak{H}^{**}$-beli élek közvetlenül egymás után lépnek fel az a úton (mert $\mathfrak{H}^{**}$ csupán kezdőpontjánál és végpontjánál függ össze $\mathfrak{G}$ többi éleivel). Ezért bármely pálya vagy $\mathfrak{H}$-nak P^* kezdőpontjánál lép be $\mathfrak{H}$-ba és Q^*-nál lép ki onnan, vagy fordítva. a azonban egyik pályatípushoz sem tartozhat, minthogy mind Q^*-ba befutó k_1 éle, mind Q^*-ból tovább induló k^{-1} éle $\mathfrak{H}$-beli él. Ellentmondás.

[9] Lásd : [1], 1. §., 213. oldal.

2. eset: k_1 valamely $\mathfrak{D}$ H-osztály éle. A bizonyításnak ebben a részében ponton mindig az a pálya valamely oly pontját fogjuk érteni, amely $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ egy komponensének csomópontja. Az összes ilyen pontok halmaza legyen α, az α halmaz elemeinek az a úton való sorrend szerinti rendezését a $\prec$ jellel jelöljük. (Meggondolásainkban szerep fog jutni a már ismert $\prec$ rendezésnek is.)

Az 1. tétel szerint k_1-nek (és k-nek) A végpontja eleme α-nak. Először azt igazoljuk, hogy az a pálya $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-nek P^* kezdőpontjánál lép be $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-be, és Q^* végpontjánál lép ki onnan. Az ellenkező esetben ugyanis Q^*-t közvetlenül követően a visszafelé haladna át egy $\mathfrak{F}(\mathfrak{D})$-beli élen, ami k értelmezésének ellentmond.

Az $a[P^* Q^*]$ út egy rész-utját a *szakaszá*nak nevezzük, ha a rész-utnak pontosan kezdőpontja és végpontja α-beli pontok. Ha egy szakasz kezdőpontja és végpontja nem szomszédos csomópontok a $\prec$ rendezés értelmében, akkor a szakasz belső utja egy H-osztálynak. Tekintsük $a[P^*Q^*]$ első olyan $C(\in\alpha)$ pontját, melynél $a[CQ^*]$-nak alkalmas $D(\in\alpha)$ pontjára $D \prec C$. (Ilyen C pont van: tekintsük pl. a k élt tartalmazó szakasz kezdőpontját és végpontát.) Válasszuk D gyanánt a $\prec$ rendezésben utolsó ilyen pontot. Az a utnak C-t megelőző és D-t követő szakaszai minden lehetséges esetben a 2. tételnek ellentmondó módon helyezkednek el. Ezzel a 3. tételt teljesen igazoltuk.

A következő tételben gráfon ismét a T_1 és T_2 tulajdonságokkal rendelkező irreducibilis gráfot értünk.

4. tétel. *A II. gráf-osztály üres.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{G}$ C típusú él nélküli, B típusú élt tartalmazó gráf. Célunk kimutatni, hogy $\mathfrak{G}$ nem tartalmaz A típusú élt. k legyen $\mathfrak{G}'$ tetszőleges éle. Az 1. tétel kiegészítése szerint k benne van $\mathfrak{G}'$-nek valamely $\mathfrak{G}_1'$ párhuzamos komponensében. Van olyan $a(AB)$ út, amely belső útja egy $\mathfrak{D}$ hídnak, továbbá A csomópontja $\mathfrak{G}_1'$-nek és B csomópontja a ($\mathfrak{G}_1'$-től különböző) $\mathfrak{G}_2'$ komponensnek. b és c legyenek $\mathfrak{G}'$-beli élekből álló olyan pályák, melyeknél b átmegy B-n, és c átmegy k-n (tehát A-n is). A $c[PA] \cdot a \cdot b[BQ]$ és $b[PB] \cdot a^{-1} \cdot c[AQ]$ pályák másodfajúak, egyikük átmegy a k élen, tehát k B típusú él. Ezzel a 4. tételt igazoltuk.

A 3. tétel bizonyos értelemben teljessé teszi a VI. osztályú gráfoknak e paragrafus **a)**, **b)** és **c)** részeiben kifejtett elemzését. *Eredményeink összefoglalva a következő módon interpretálhatók:* pontosan a VI. osztályú gráfok jönnek akkor létre, ha a következőképpen módosítjuk azt az eljárást, amellyel a kettős él nélküli gráfok a P $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ Q alapelemből előállíthatók. Tekintsük e szintézisnek tetszőleges olyan lépését, amelyben párhuzamosan reducibilis $\mathfrak{H}_i$ gráfokat kapcsolunk sorosan. Mielőtt ezt a lépést elvégeznénk, jogunkban áll bármely $\mathfrak{H}_i$-be T_3 tulajdonságú n-gráfokat kapcsolni úgy, hogy az n-gráfok minden pólusát azonosítjuk $\mathfrak{H}_i$ valamely komponensének egy csomópontjával; megkívánva, hogy az $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}_i$ egyenlőség és az 1. és 2. tételek érvényesek legyenek a (bekapcsolással hidakká váló) n-gráfokra. A szintézis legutolsó mozzanata: legalább egy n-gráf bekapcsolása egy párhuzamosan reducibilis gráfba úgy, hogy az eddigi követelményeken túlmenően az 1. tétel kiegészítése is teljesedjék. Eljárásunk egyértelműen szolgáltatja a VI. osztályú gráfokat, eltekintve a soros kapcsolás asszociatívitásától, a párhuzamos kapcsolás kommutatívitásától és asszociatívitásától.

3. §. Üres gráf-osztályok

A 4. tételben láttuk, hogy a II. gráf-osztály üres. E §-ban célunk további két osztály ürességét kimutatni. Először a következő állítást igazoljuk:

5. tétel. *Egy irreducibilis $\mathfrak{G}$ gráf összes éleit soroljuk két (idegen, nem üres) $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ osztályba. Ekkor van a gráfnak olyan pályája, amely $\varkappa_1$-beli és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy bármely pálya vagy csak $\varkappa_1$-beli éleket vagy csak $\varkappa_2$-beli éleket tartalmaz. (Ennek megfelelően $\varkappa_1$-pályákról és $\varkappa_2$-pályákról fogunk beszélni.) Ez a feltevés minden lehetséges esetben ellentmondásra vezet.

1. eset. Nincs $\mathfrak{G}$-nek olyan belső pontja, amelyen $\varkappa_1$-pálya és $\varkappa_2$-pálya is átmegy. $\mathfrak{G}$ ekkor két párhuzamosan kapcsolt részgráfra bomlik, amelyek egyike a $\varkappa_1$-pályák éleit és pontjait, másika a $\varkappa_2$-pályák éleit és pontjait tartalmazza. Ez ellentmond $\mathfrak{G}$ irreducibilitásának.

2. eset. Van olyan belső pont, amelyen $\varkappa_1$-pálya és $\varkappa_2$-pálya is átmegy. Legyen A ily tulajdonságú olyan pont, amely $\mathfrak{G}$ kezdőpontjából alkalmas pályán a lehető legkevesebb él érintésével elérhető. Szimmetria-okból elég azt az esetet vizsgálnunk, mikor egy ilyen alkalmas a pálya élei $\varkappa_1$-beliek. Legyen b A-n átmenő $\varkappa_2$-pálya. Ekkor létezik az $a[PA]\cdot b[AQ]$ pálya (ha $a[PA]$-nak és $b[AQ]$-nak közös pontja volna, akkor A értelmezésével ellentmondásra jutnánk), amely feltevésünkkel ellentétben $\varkappa_1$-beli élt és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz.

6. tétel. *A III. és V. gráf-osztályok üresek.*

Bizonyítás. Egy III. vagy V. osztályú gráfban (az értelmezés szerint) nincs olyan él, amelyen elsőfajú és másodfajú pálya is átmegy. Legyen a $\mathfrak{G}$ III. vagy V. osztályú gráf elsőfajú pályái éleinek halmaza $\varkappa_1$, $\mathfrak{G}$ másodfajú pályái éleinek halmaza pedig $\varkappa_2$. Az 5. tétel biztosítja olyan pálya létezését, amely $\varkappa_1$-beli és $\varkappa_2$-beli élt is tartalmaz. Ezt a pályát akár elsőfajúnak, akár másodfajúnak feltételezzük, ellentmondáshoz jutunk.

A tétel második állítása egyszerűbben is bizonyítható. Legyen a egy másodfajú pályája egy V. osztályú gráfnak. a első éle nem lehet kettős él, tehát B vagy C típusú él, ellentmondásban az V. gráf-osztály értelmezésével.

(Beérkezett: 1958. V. 5.)

IRODALOM

[1] ÁDÁM A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 211—218.

[2] POLLÁK GY.: „Megjegyzés Ádám András »Kétpólusú elektromos hálózatokról, II.« című dolgozatához". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 81—82 (a következő dolgozat).

О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, II.

A. ÁDÁM

Резюме

Работа занимается в первую очередь одним классом параллельно и последовательно неприводимых графов. Рассматриваемый класс может быть охарактеризован следующим свойством: если ребро k графа $\mathfrak{G}$ простое (т. е. не является двойным), то существует цепь, проходящая через k и не содержащая двойных ребер. Это предположение обеспечивает, чтобы простые ребра графа $\mathfrak{G}$ образовали двухполюсный граф $\mathfrak{G}'$. Множество всех двойных ребер разбиваем в классы (называемые «мостами»); эта классификация может быть введена путем транзитивного распространения следующей реляции: реляция имеет силу для двух (двойных) ребер, если они сходятся в некоторой точке, не являющейся точкой графа $\mathfrak{G}'$. Результаты параграфов 2/b-c-d дают описание этого класса двухполюсных графов; неразобранным остается только внутренняя структура мостов.

Теорема 5. *Разобьем множество ребер (параллельно и последовательно) неприводимого графа $\mathfrak{G}$ в два непересекающихся непустых подмножества $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Тогда в $\mathfrak{G}$ существует цепь, содержащая ребра из обоих подмножеств.*

ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, II.

von

A. ÁDÁM

Auszug

Die Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit einer Klasse derjenigen zweipoligen Graphen, die für die Reihen- und Parallelschaltung irreduzibel sind. Die betrachtete Klasse kann folgenderweise charakterisiert werden: es gibt eine Bahn für jede nicht doppelte Kante k des Graphen $\mathfrak{G}$, die k durchläuft, und keine doppelte Kante enthält. Diese Voraussetzung versichert, dass die nicht doppelten Kanten von $\mathfrak{G}$ einen zweipoligen Graphen $\mathfrak{G}'$ bilden. Wir sondern die doppelten Kanten in Klassen (die »Brücken« genannt werden) aus; ihre Klassifikation kann wie die transitive Ausdehnung der folgenden Relation eingeführt werden: für zwei (doppelte) Kanten gilt die Relation, wenn sie einen solchen gemeinsamen Endpunkt haben, der kein Punkt von $\mathfrak{G}'$ ist. Die Resultaten der Paragraphen 2/b-c-d geben eine Beschreibung dieser Klasse der zweipoligen Graphen, nur die innere Struktur der Brücken bleibt ein unerforschtes Problem.

Satz 5. *Werden die Kanten des (durch die Reihen- und Parallelschaltung) irreduziblen Graphen $\mathfrak{G}$ in zwei fremde, nicht leere Teilmengen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zerteilt, dann hat $\mathfrak{G}$ eine Bahn, die mindestens eine Kante von $\varkappa_1$ und mindesten eine Kante von $\varkappa_2$ enthält.*