

## EGY SZERSZÁMGEOMETRIAI PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGOLDÁSA

IEJ. DRAHOS ISTVÁN,<sup>1)</sup> HORNYIK LÁSZLÓ<sup>1)</sup> és HOSSZÚ MIKLÓS<sup>1)</sup>

### Bevezetés

A szerszámkészítő feladatai közé tartozik csavartfelületet (pl. orsó-, csigafúrót, ferde és nyilas fogazású homlokfogaskerekek stb.) előállító maró, illetve köszörülő szerszám készítése.<sup>2)</sup> A maró szerszám (tárcsa vagy ujjmaró) élei forgásfelületen helyezkednek el. Az élek helyzete ezen a forgásfelületen a maró profiljának kialakítása szempontjából közömbös. Ugyancsak forgásfelület a köszörülő felülete is. A szerszámprofil kialakításához elegendő, ha nem a szóban forgó szerszámot, hanem annak tengelye körüli forgásakor súrolt felületet, marófelületet, köszörülőfelületet — vagy mivel a továbbiakban e kettő között különbséget tennünk szükségtelen — a szerszám forgásfelületet adjuk meg. Ezzel nyilván egyenértékű, ha a szerszám és a munkadarab ún. érintkezési vagy megmunkálási vonalát adjuk meg, melynek forgatásával nyerjük a szerszám forgásfelületet. Hasonló módon elegendő a szerszám tengelyére illeszkedő sikkal való metszésvonal, az ún. profilgörbe megadása.

A dolgozat célja általában hengeren képzett állandó emelkedésű adott csavarfelületet érintő forgásfelület meghatározása. Az 1. §-ban általános vonalfelületre oldjuk meg a feladatot, a 2. §-ban a csavarfelületet és ujjmarót mint speciális esetet vizsgáljuk, és egy példán, a lapos csavarfelület esetén megmutatjuk a számítás részletezését is, s végül a 3. §-ban megadjuk a ferde fogazású hengeres fogaskerék készítéséhez szükséges szerszám érintkezési vonalának, illetve profilgörbéjének paraméteres egyenletét.

A probléma a DIMÁVAG-ban vetődött fel. Ferde fogaskerék marásával kapcsolatban a kérdés megoldásával foglalkozott SALÁNKY JÓZSEF, aki diplomatervében egy szerkesztésen alapuló számítást dolgozott ki [4]. Egy közelítő eljárást talált még előzőleg DR. SZENICZEI LAJOS; speciális csavarfelületek esetén foglalkozott a probléma megoldásával [3]. Ujjmaró szerkesztési eljárást lehet találni [2]-ben és [6]-ban.

<sup>1)</sup> Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem, Ábrázoló Geometriai, Gépgyártás Technológiai, illetve Matematikai Tanszék.

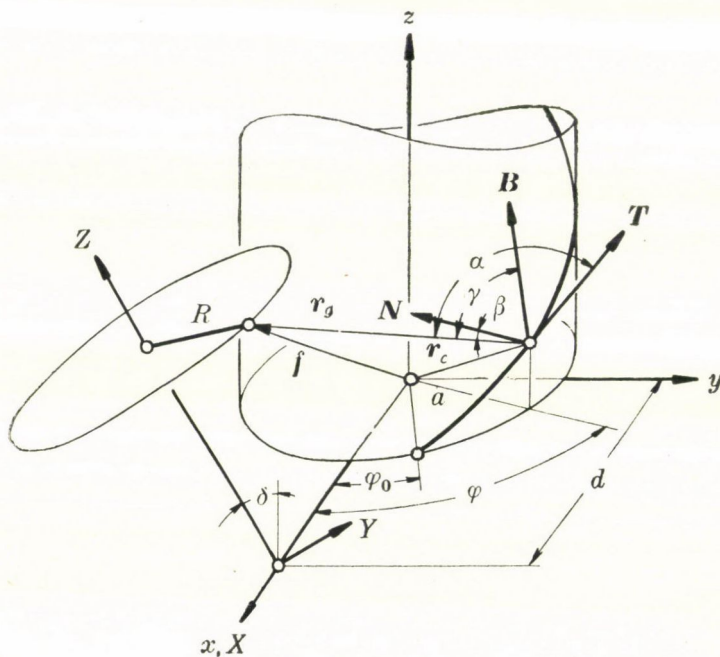
<sup>2)</sup> Ebben a dolgozatban tisztán matematikai tárgyalásra korlátozódunk, a technikai részletek iránt érdeklődő olvasót a [2], [3], [6] alatti dolgozatokra utaljuk. Feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a maró és köszörülő megmunkálás lényegével, ezért ezzel nem is foglalkozunk, csupán azt emeljük ki, ami tárgyalásunk folyamán nélkülözhetetlen.

### 1. §. Vonalfelületet kialakító szerszám érintkezési vonala

**1. Előtolással és forgatással kialakítható felületek.** Vizsgáljuk meg azt a kérdést, milyen felületet lehet köszörüléssel vagy marással kialakítani, ha a hengeres munkadarabot állandó  $z$  tengelye körül állandó  $\omega$  szögsebességgel forgatjuk, s egyidejűleg  $z$  irányában állandó  $c$  sebességgel előtoljuk, miközben a szerszám csupán saját tengelye körül forog. Nyilván csak olyat, mely egy  $a$  sugarú hengerre írt

$$(1) \quad \mathbf{r}_c = \left\{ a \cos \varphi; a \sin \varphi; \frac{c}{\omega} (\varphi - \varphi_0) \right\}, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

csavarvonalon mozgatva önmagába megy át (1. ábra). Az ilyen felületet úgy származtatjuk, hogy a csavarvonal egy pontjához rögzített [1] kísérő három-éllel arányos



1. ábra.

$$(2) \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}_c}{d\varphi} = a \{ -\sin \varphi; \cos \varphi; k \}, \quad k = \frac{c}{a\omega},$$

$$\mathbf{N} = \sqrt{1+k^2} \frac{d\mathbf{T}^0}{d\varphi} = a \{ -\cos \varphi; -\sin \varphi; 0 \},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ka} \mathbf{T} \times \mathbf{N} = a \left\{ \sin \varphi; -\cos \varphi; \frac{1}{k} \right\}$$

vektorok által alkotott koordináta-rendszerben felírjuk egy

$$(3) \quad \mathbf{r}_g(\lambda, \varphi) = p(\lambda) \mathbf{T}(\varphi) + q(\lambda) \mathbf{N}(\varphi) + s(\lambda) \mathbf{B}(\varphi)$$

felületi görbe egyenletét, és azt a csavarvonalhoz rögzítve a  $z$  irányában  $c$  sebességgel mozgatjuk, s körülötte  $\omega$  szögsebességgel forgatjuk. A görbe ekkor az

$$(4) \quad \mathbf{f}(\lambda, \varphi) = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_g$$

felületet sűrölja.

Ha pl.

$$(5) \quad \mathbf{r}_g = \lambda \mathbf{N} \text{ vagy } \lambda \mathbf{T},$$

akkor az

$$(6) \quad \mathbf{f}_c = a \{ (1 - \lambda) \cos \varphi; (1 - \lambda) \sin \varphi; k(\varphi - \varphi_0) \}$$

lapos csavarfelületet, illetve egy ferde fogaskerék egyik fogának

$$(7) \quad \mathbf{f}_c = a \{ \cos \varphi - \lambda \sin \varphi; \sin \varphi + \lambda \cos \varphi; k(\varphi - \varphi_0 + \lambda) \}$$

felületét nyerjük. Az utóbbi a  $z = h$  síkokból az

$$(8) \quad x = a(\cos \varphi - \lambda \sin \varphi),$$

$$y = a(\sin \varphi + \lambda \cos \varphi), \quad \lambda = \varphi_0 - \varphi_1 + \frac{h}{ka}$$

körevolvenseket vágja ki.

## 2. Általános felület tengely körüli forgatása közben burkolt felület.

Helyezzük el a szerszám forgástengelyét úgy, hogy az  $x$  tengely irányában  $d$  távolságra essék a  $z$  tengelytől, s vele  $\delta$  szöget alkosson. Vizsgáljuk azt a kérdést, hogyan kell megválasztani a szerszám forgásfelületének profilgörbéjét, ha előírt felületet kívánunk kialakítani. E célból rögzítsünk a szerszámhoz egy koordináta-rendszert: legyen  $X = x$ ,  $Z$  a szerszám tengelye,  $Y$  pedig velük jobb sodrású, derékszögű koordináta-rendszert alkotó tengely (1. ábra). Az  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  rendszerben pl. a csavarfelület egyenlete:

$$X_f = x - d,$$

$$(9) \quad Y_f = y \cos \delta + z \sin \delta, \quad \mathbf{f} = \{x; y; z\} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_g,$$

$$Z_f = -y \sin \delta + z \cos \delta.$$

A maróhoz rögzített koordináta-rendszerben szemlélve a megmunkálás során fellépő mozgásokat, a csavarfelület az előtolás és  $z$  körüli forgatás alkalmával önmagába megy át, tehát úgy viselkedik, mintha mozdulatlan volna. A szerszám forgása e koordináta-rendszerben a csavarfelület  $Z$  körüli forgásában nyilvánul meg. Válasszunk ki  $f$ -en egy rögzített  $\varphi$ -hez tartozó  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{r}_c(\varphi) + \mathbf{r}_g(\lambda, \varphi)$  görbét, kiküszöbölve a paramétert:

$$(10) \quad \begin{aligned} X &= X_f(\lambda, \varphi), & Y &= Y_f(\lambda, \varphi), & Z &= Z_f(\lambda, \varphi), \\ X &= F(Z, \varphi), & Y &= G(Z, \varphi). \end{aligned}$$

Ezt  $Z$  körül forgatva, az

$$(11) \quad X^2 + Y^2 = F^2 + G^2 = R^2$$

forgásfelületet nyerjük, mely azt fejezi ki, hogy forgás közben a  $Z$ -től való  $R$  távolság változatlan. Nyilván ez érvényes csavarfelületnél általánosabb felület esetén is. Különböző paraméterekhez tartozó  $r_c$ -ket és  $r_g$ -ket tekintve forgásfelületek egyparaméteres seregét nyerjük, melynek burkoló felülete éppen a szerszám felülete. A burkoló felületet az

$$(12) \quad X^2 + Y^2 = R^2 = \varrho, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0$$

egyenletrendszer szolgáltatja, amely más szóval azt fejezi ki, hogy egy rögzített  $Z = Z_0$  síkmetszeten a  $Z$ -hez legközelebb eső, tehát  $\varphi$  függvényeként szélsőértéket szolgáltató  $r_g$  pontja írja le  $Z$  körüli forgása közben a szerszám  $Z = Z_0$  magasságú körmetszetét.

Tehát végeredményben, feltéve, hogy létezik egyáltalán a kívánt tulajdonságú szerszám, mikor is az  $R^2$  függvénynek a kialakítandó részhez tartozó szakaszon van szélsőértéke,<sup>3)</sup> és az ott éppen abszolút minimum, a szerszám profilgörbéjének paraméteres egyenlete:

$$(13) \quad X = R(\Phi, \varphi), \quad Z = \Phi(\varphi),$$

ahol  $Z = \Phi(\varphi)$  az

$$(14) \quad F \frac{\partial F}{\partial \varphi} + G \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$$

egyenlet megoldása, és  $R^2 = F^2 + G^2$ , miközben  $F, G$  az (1), (3), (4) alatt megadott felület  $X, Y, Z$  rendszerbeli (9), (10) alatt értelmezett egyenlete.

(10) figyelembevételével rögtön felírhatjuk az érintkezési vonal

$$(15) \quad Z = \Phi(\varphi), \quad X = F(\Phi, \varphi), \quad Y = G(\Phi, \varphi)$$

egyenletét is, melyen a szerszám és a felület érintkezik. (15) nyilván kielégíti a (10<sub>2</sub>) felület egyenletét és a szerszám forgásfelület egyenletét is, hiszen a (13) profilgörbe a (15) érintkezési vonal  $Z$  körüli forgatásával származtatható oly módon, hogy a forgásfelület  $X, Z$  síkmetszetét tekintjük, ami éppen (13). Az érintkezési vonal mutatja meg, hogy a csavarfelület mekkora részét lehet egy adott marótengely elhelyezéssel megmunkálni.

<sup>3)</sup> (12<sub>2</sub>) a lokális szélsőérték létezésének csak szükséges feltétele. Elégséges feltétel (12<sub>2</sub>) és pl.  $\partial^2 \varrho / \partial \varphi^2 \neq 0$  fennállása. A lokális minimum létezése természetesen még nem biztosítja abszolút minimum létezését, vagyis előfordulhat, hogy a maró lokálisan jól alakítja ki a kívánt felületet, másutt viszont elrongálja; így nincs is minden felület és marótengely elhelyezés esetén megoldása a feladatnak. A gyakorlatban előforduló véges felületdarabok megmunkálásának lehetőségét ezen szempontok figyelembevételével kell eldönteni esetenként, alkalmasan megválasztva a marótengely helyzetét. (Lásd pl. a 3. § végén az 1. megjegyzést.)

**3. Specializálás vonalfelületre.** Írjuk fel pl. egy

$$(16) \quad \begin{aligned} X_f &= x_0(\varphi) + \lambda x_1(\varphi) , \\ Y_f &= y_0(\varphi) + \lambda y_1(\varphi) , \\ Z_f &= z_0(\varphi) + \lambda z_1(\varphi) \end{aligned}$$

vonalfelület esetén a (13) megoldást.

Most a  $(10_2)$ -ben szereplő függvények:

$$(17) \quad \begin{aligned} F(Z, \varphi) &= \frac{Zx_1}{z_1} + x_0 - \frac{z_0x_1}{z_1} = ZA_1 + B_1 , \\ G(Z, \varphi) &= \frac{Zy_1}{z_1} + y_0 - \frac{z_0y_1}{z_1} = ZA_2 + B_2 , \end{aligned}$$

tehát (14) a következő másodfokú egyenletre vezet:

$$(18) \quad (ZA_1 + B_1)(Z\dot{A}_1 + \dot{B}_1) + (ZA_2 + B_2)(Z\dot{A}_2 + \dot{B}_2) = 0 ,$$

melyből  $(-z_1^3)$ -nal való szorzás után

$$(19) \quad UZ^2 + VZ + W = 0 ,$$

ahol

$$(20) \quad \begin{aligned} U &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} , \\ V &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_0 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & \dot{x}_0 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} , \\ W &= \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_0 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_0 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Erről egyszerű számolással meggyőződhetünk, ha pl. az utolsó determinánst az első két oszlop szerint kifejtjük LAPLACE tételének felhasználásával [5], s figyelembe vesszük, hogy

$$z_1 B_1 z_1^2 \dot{B}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & x_1 \\ \dot{z}_0 & z_1 \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & x_1 \\ \dot{z}_1 & z_1 \end{vmatrix} \right)$$

stb. Tehát most a (13) megoldás (19)-ből:

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{F^2 + G^2}, \\ Z &= \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}, \end{aligned}$$

ahol  $F, G$  a (17) alatt van megadva,  $U, V, W$  a (20) alatti, míg  $x_i, y_i, z_i$  a (16) vonalfelület egyenletében szereplő függvények.

(21<sub>2</sub>)-ben a négyzetgyököt olyan előjellel kell venni, amely  $\varrho(Z, \varphi)$ -re minimumot ad, vagyis amelyikre fennáll

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} > 0.$$

(21) helyett sok esetben hasznosabb a (21)-et különben következményként tartalmazó

$$(22) \quad \begin{aligned} Z &= \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U} = \Phi(\varphi), \\ X &= F(\Phi, \varphi) = \frac{\Phi x_1}{z_1} + x_0 - \frac{z_0 x_1}{z_1}, \\ Y &= G(\Phi, \varphi) = \frac{\Phi y_1}{z_1} + y_0 - \frac{z_0 y_1}{z_1} \end{aligned}$$

érintkezési vonal egyenlete, melyen a megmunkálás történik, s melynek  $Z$  körüli forgatása adja a szerszám forgásfelületet, s e forgásfelület  $X, Z$ , síkmetszete éppen a (21) alatti profilgörbe.

## 2. §. A számítás menete csavarfelület, illetve ujjmaró esetén

**1. A képletekben szereplő kifejezések felírása csavarfelület és speciálisan lapos csavarfelület esetén.** Legyen speciálisan  $r_g$  egy egyenes, amely illeszkedik a csavarvonalra, és  $(T, N, B)$ -vel állandó  $\alpha, \beta$ , illetve  $\gamma$  szöget zár be (1. ábra):

$$(23) \quad \begin{aligned} r_g &= \lambda pT + \lambda qN + \lambda sB, \\ p &= \cos \alpha, \quad q = \cos \beta, \quad s = \cos \gamma, \end{aligned}$$

akkor a (9) felület:

$$(24) \quad \begin{aligned} X_f &= a \cos \varphi - d + \lambda a [-(p-s) \sin \varphi - q \cos \varphi], \\ Y_f &= a \sin \varphi \cos \delta + ak(\varphi - \varphi_0) \sin \delta + \\ &\quad + \lambda a \{[(p-s) \cos \varphi - q \sin \varphi] \cos \delta + \left(pk + \frac{s}{k}\right) \sin \delta\}, \\ Z_f &= -a \sin \varphi \sin \delta + ak(\varphi - \varphi_0) \cos \delta + \\ &\quad + \lambda a \{[-(p-s) \cos \varphi + q \sin \varphi] \sin \delta + \left(pk + \frac{s}{k}\right) \cos \delta\}, \end{aligned}$$

tehát a (16) vonalfelületet jellemző függvények :

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & x_0 = a \cos \varphi - d , \\
 & x_1 = - a c_1 \cos (\varphi - \varepsilon) , \\
 & y_0 = a [\cos \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \sin \delta] , \\
 & y_1 = a [- c_1 \cos \delta \sin (\varphi - \varepsilon) + c_2 \sin \delta] , \\
 & z_0 = a [- \sin \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \cos \delta] , \\
 & z_1 = a [c_1 \sin \delta \sin (\varphi - \varepsilon) + c_2 \cos \delta] ,
 \end{aligned}$$

ahol

$$(26) \quad c_1 = \sqrt{1 - 2ps} , \quad c_2 = pk + \frac{s}{k} , \quad \cos \varepsilon = \frac{a}{c_1} .$$

Ha pl. speciálisan lapos csavarfelületet kívánunk kialakítani, akkor

$$(27) \quad p = s = 0 , \quad q = 1 ,$$

tehát

$$(28) \quad c_1 = 1 , \quad c_2 = 0 , \quad \cos \varepsilon = 1 , \quad \varepsilon = 0 .$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & x_0 = a \cos \varphi - d , \\
 & x_1 = - a \cos \varphi , \\
 & y_0 = a [\cos \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \sin \delta] , \\
 & y_1 = - a \cos \delta \sin \varphi , \\
 & z_0 = - a [\sin \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \cos \delta] , \\
 & z_1 = a \sin \delta \sin \varphi ,
 \end{aligned}$$

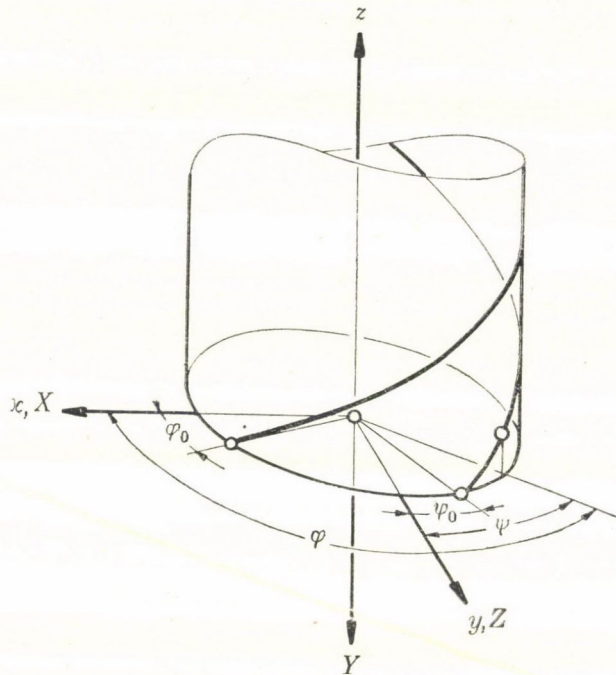
és

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \dot{x}_0 = - a \sin \varphi , \\
 & \dot{x}_1 = a \sin \varphi , \\
 & \dot{y}_0 = a [\cos \delta \cos \varphi + k \sin \delta] , \\
 & \dot{y}_1 = - a \cos \delta \cos \varphi , \\
 & \dot{z}_0 = a [- \sin \delta \cos \varphi + k \cos \delta] , \\
 & \dot{z}_1 = a \sin \delta \cos \varphi
 \end{aligned}$$

stb.

**2. Speciálizálás ujjmaróra. Lapos csavarfelületet kialakító ujjmaró profilkörbájének paraméteres egyenlete.** Az ujjmarót (2. ábra) úgy tárgyalhatjuk, mint a tárcsamaró speciális esetét, midőn

$$(31) \quad d = 0 , \quad \delta = - \frac{\pi}{2} , \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 , \quad \varphi = \psi + \frac{\pi}{2} .$$



2. ábra.

Ekkor a lapos csavar esetén a (29)—(30) alatti képleteink a következő módon alakulnak :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -a \sin \psi \\
 x_1 &= a \sin \psi \\
 y_0 &= ak(\psi - \psi_0) \\
 y_1 &= 0 \\
 z_0 &= a \cos \psi \\
 z_1 &= -a \cos \psi
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

tehát (17) szerint

$$\begin{aligned}
 F &= -Z \operatorname{tg} \psi, \\
 G &= -ak(\psi - \psi_0),
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

melyekkel megalkothatjuk a (12) szerinti

$$\varrho(Z, \psi) = R^2 = F^2 + G^2 = (Z \operatorname{tg} \psi)^2 + a^2 k^2 (\psi - \psi_0)^2
 \tag{34}$$

függvényt. Ennek szélsőértékét ez esetben egyszerűbb közvetlenül kiszámolni, s nem az általában levezetett (20) alatti determinánsok kifejtésével. Egyéb



példákban természetesen általában nem kapunk ilyen egyszerű képletet, ezért a további számítást más esetben érdemesebb úgy végezni, hogy konkrét  $\psi$  számértéket helyettesítünk, s így számítjuk a profilgörbe néhány pontjának koordinátáit. Ebben az egyszerű speciális esetben azonban kényelmesebb, ha  $\psi$  értékével általában számolunk, s nem adott helyettesítési érték mellett.

A szélsőérték létezéséhez szükséges

$$(35) \quad \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = 2 Z \operatorname{tg} \psi \frac{Z}{\cos \psi} + 2 a^2 k^2 (\psi - \psi_0) = 0$$

fennállása, melyből  $Z$  meghatározására a

$$(36) \quad Z^2 + (\psi - \psi_0) a^2 k^2 \cos^2 \psi \operatorname{cotg} \psi = 0$$

egyenletet nyerjük, vagyis egyszerű számolás után a profilgörbe paraméteres egyenlete az  $R, Z$  koordináta-rendszerben:

$$(37) \quad \begin{aligned} Z &= ak \cos \psi \sqrt{(\psi_0 - \psi) \operatorname{ctg} \psi} , \\ R &= ak \sqrt{(\psi_0 - \psi) (\psi_0 - \psi + \sin \psi \cos \psi)} . \end{aligned}$$

A (37) képletből leolvasható, hogy más hengersugarat választva, az alkalmas felület kialakító szerszám profilgörbéje a  $Z, R$  koordináta-rendszerben arányosan változik.

### 3. §. Ferde fogazású hengeres fogaskerék szerszámprofilja

Mint (5), (7) alatt említettük, az  $\mathbf{r}_g = \lambda \mathbf{T}$  választással nyerjük a ferde fogazású fogaskerék felületet, azaz ez esetben

$$(38) \quad p = 1 , \quad q = s = 0 ,$$

tehát (26) szerint

$$(39) \quad c_1 = 1, \quad c_2 = k, \quad \varepsilon = \pi/2 ,$$

s következőleg (25)-ből kifolyólag

$$(40) \quad \begin{aligned} x_0 &= a \cos \varphi - d , & \dot{x}_0 &= - a \sin \varphi , \\ x_1 &= - a \sin \varphi , & \dot{x}_1 &= - a \cos \varphi , \\ y_0 &= a [\cos \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \sin \delta] , & \dot{y}_0 &= a(\cos \delta \cos \varphi + k \sin \delta) , \\ y_1 &= a(\cos \delta \cos \varphi + k \sin \delta) , & \dot{y}_1 &= - a \cos \delta \sin \varphi , \\ z_0 &= a [- \sin \delta \sin \varphi + k(\varphi - \varphi_0) \cos \delta] , & \dot{z}_0 &= a(- \sin \delta \cos \varphi + k \cos \delta) , \\ z_1 &= a(- \sin \delta \cos \varphi + k \cos \delta) , & \dot{z}_1 &= a \sin \delta \sin \varphi . \end{aligned}$$

Megfigyelhetjük itt az

$$(41) \quad \dot{x}_0 = x_1, \quad \dot{y}_0 = y_1, \quad \dot{z}_0 = z_1$$

összefüggéseket, melyek, mint látni fogjuk, döntő jelentőségűek, és nagymértékben jellemzik is a ferde fogazású fogfelületeket.<sup>4)</sup> A (41) felhasználásával igen egyszerűen számítható a (20) alatti  $V$ ,  $W$ :

$$(42) \quad V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_1 & x_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & z_1 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} = -z_0 U - \Delta,$$

$$W = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & z_1 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & 0 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & 0 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 & \dot{z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 & -z_1 \end{vmatrix} = z_0 \Delta,$$

tehát a (21) megoldásban szereplő diszkrimináns:

$$(43) \quad V^2 - 4UW = z_0^2 U^2 + 2z_0 U\Delta + \Delta^2 - 4z_0 U\Delta = (z_0 U - \Delta)^2 = (z_1 D)^2,$$

ahol

$$(44) \quad D = \begin{vmatrix} x_0 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}.$$

Ugyanis az első sor szerint kifejtve a  $\Delta$ -t értelmező (42) alatti determinánst,

$$(45) \quad \Delta = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & -y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} = z_0 U - z_1 D.$$

Ennek felhasználásával a (21<sub>2</sub>) megoldás:

$$(46) \quad Z = \frac{z_0 U + \Delta \pm (z_0 U - \Delta)}{2U} = \begin{cases} z_0, \\ z_0 - \frac{D}{U} z_1. \end{cases}$$

<sup>4)</sup> Olyannyira, hogy (41)-ből már következik is  $\varepsilon = \pi/2$ , továbbá  $q = s = 0$ , vagy  $p = q = 0$   $s = k^2$ .

Érdemes felírni (22) alapján az érintkezési vonal egyenletét, melyen a szerszám és a csavarfelület érintkezik. A (46) alapján számítottak szerint ez

$$(47) \quad \begin{aligned} Z &= z_0 + \lambda z_1, \\ X &= x_0 + \lambda x_1, \\ V &= y_0 + \lambda y_1, \end{aligned}$$

ahol<sup>5)</sup>

$$(48) \quad \lambda = \lambda(\varphi) = -\frac{D}{U}, \quad \text{vagy } 0.$$

(20) és (44) alapján könnyen ki tudjuk számítani  $\lambda$ -t, ha figyelembe vesszük (40)-et:

$$(49) \quad \lambda(\varphi) = \frac{1}{1+k^2} \left[ (1+k d/a \operatorname{ctg} \delta) \operatorname{ctg} \varphi - k^2(\varphi - \varphi_0) - \frac{d/a + k \operatorname{ctg} \delta}{\sin \varphi} \right].$$

A (21) szerint rögtön képezhetjük a szerszám profilgörbéjének paraméteres egyenletét is:

$$(50) \quad Z = z_0 + \lambda z_1, \quad R = \sqrt{(x_0 + \lambda x_1)^2 + (y_0 + \lambda y_1)^2}.$$

Tehát végeredményben az érintkezési vonal egyenlete (47), míg a profilgörbéé (50), ahol  $\lambda$  (49) alatt van megadva, és  $x_i, y_i, z_i$  a (40<sub>1</sub>) alatti.

Az érintkezési vonal egyenletét vektorosan összefoglalva röviden így írhatjuk:

$$(51) \quad \mathbf{r}(\varphi) = \{X, V, Z\} = \mathbf{C} \mathbf{f}_e - \{d; 0; 0\},$$

ahol

$$(52) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

a  $\delta$  szöggel való forgatás mátrixa, míg (9<sub>2</sub>) és (5<sub>2</sub>) szerint (7)-hez hasonlóan

$$(53) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_g = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{T} = \\ &= a \{ \cos \varphi - \lambda \sin \varphi; \sin \varphi + \lambda \cos \varphi; k(\varphi - \varphi_0 + \lambda) \}, \end{aligned}$$

és itt  $\lambda$  a (49) alatti érték.

Ha a szerszámhoz rögzített koordináta-rendszerről visszatérünk a csavarfelülethez rögzített  $x, y, z$  rendszerre, akkor látjuk, hogy az érintkezési vonal egyenlete maga az (53) alatti  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_e$ , ahol  $\lambda$  a (49) alatt megadott függvénye  $\varphi$ -nek.

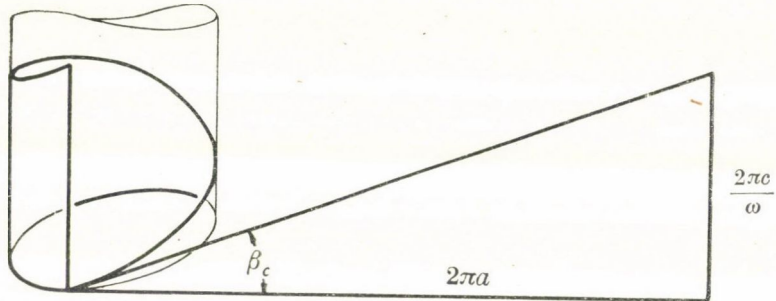
<sup>5)</sup>  $\lambda = 0$  nem jöhet számításba, mert akkor (47) a csavarvonal egyenletévé fajul.

### Megjegyzések

1. A (49) alatt kiszámított  $\lambda$  különösen könnyen számítható, ha  $\delta$ -t úgy választjuk, hogy

$$(54) \quad \operatorname{tg} \delta = k = \operatorname{tg} \beta_c$$

legyen. Minthogy (2) szerint  $k = c/(a\omega)$  a csavarvonal  $\beta_c$  emelkedési szögének tangense (3. ábra), ez akkor fog bekövetkezni, ha  $\delta$ -t a csavarvonal emelkedési szögével egyenlőnek választjuk. Ekkor (49) így alakul:



3. ábra.

$$(55) \quad \begin{aligned} \lambda(\varphi) &= \cos^2 \beta_c [(1 + d/a) (\operatorname{ctg} \varphi - 1/\sin \varphi) - (\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg}^2 \beta_c] = \\ &= \cos^2 \beta_c [(1 + d/a) (\operatorname{csc} \varphi - 1)/\sin \varphi - (\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg}^2 \beta_c] = \\ &= -\cos^2 \beta_c \left[ (1 + d/a) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + (\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg}^2 \beta_c \right]. \end{aligned}$$

Ez még tovább egyszerűsödik, ha a következőt írjuk:

$$(56) \quad 1 + \frac{d}{a} = \gamma_c \operatorname{tg}^2 \beta_c.$$

Ekkor

$$(57) \quad \lambda(\varphi) = -\sin^2 \beta_c \left( \gamma_c \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \varphi - \varphi_0 \right).$$

Az (57) képlet azt mutatja, hogy a  $\gamma_c = \pm 2$  esetben számíthatunk legegyszerűbb képletekre, vagyis (56) szerint akkor, ha

$$(58) \quad d = -a(1 \pm 2 \operatorname{tg}^2 \beta_c).$$

Ez természetesen technikailag nem minden  $\beta$  esetén valósítható meg

2. Hasonlóan igen egyszerűsödik a képlet ujjmaró esetén, midőn  $d = 0, \delta = -\pi/2, \varphi_0 = \varphi_0 + \pi/2$ :

$$(59) \quad \lambda(\varphi) = \cos^2 \beta_c \left[ \operatorname{ctg} \varphi - \left( \varphi - \varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \beta_c \right].$$

Ekkor (47) szerint az érintkezési vonal egyenletére egyszerű számolás után a

$$Z = \frac{a}{\sin \varphi} - A \sin \beta_c \cos \varphi, \quad A = a \sin \beta_c \left[ \operatorname{inv} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \psi_0 \right],$$

$$(60) \quad X = A \sin \beta_c \sin \varphi,$$

$$V = -A \cos \beta_c, \quad (\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha)$$

eredmény adódik, tehát a profilgörbe egyenlete:

$$(61) \quad Z = \frac{a}{\sin \varphi} - A \cos \tau, \quad A = a \sin \beta_c \left[ \operatorname{inv} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \psi_0 \right],$$

$$R = A \sin \tau, \quad \cos \tau = \sin \beta_c \cos \varphi.$$

A (61) képlet alapján egyszerű grafikus szerkesztési eljárást lehet adni a megoldáshoz.

A képletekből leolvasható, hogy  $a$ -val arányosan nő a maró.

(Beérkezett: 1958. II. 25.)

IRODALOM

[1] BERMANT, A. F.: *Matematikai analízis*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.  
 [2] Ifj. DRANOS I.—HORNYIK L.—HOSSZU M.: „Profílozó szerszámok szerkesztése“. *Gép* (sajtó alatt).  
 [3] ГРУДИН, А. Н.—ЛИХЦИЕР, М. Б.—ПОЛОЦКИЙ, М. С.: *Зуборезный инструмент, II*. Матгиз, Москва, 1946.  
 [4] SALÁNKY J.: *Diplomaterv*. Miskolc, 1957.  
 [5] SZELE T.: *Bevezetés az algebrába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.  
 [6] SZÓKE B.: „A fogaskerék profilmaróinak gépi előállításá“. *A Magyar Mérnök-és Építész-Egylet Közlönyének Havi Füzetek* 4 (1927) 124—139.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

млш. I. DRANOS, L. HORNYIK и M. HOSSZU

Резюме

Рассматриваем спиральную поверхность (24), которую одна линия генерирует. Цель работы: определение профильной кривой одной дисковой фрезы, т. е. определение  $X, Z$  плоскостного разреза, который оформляет одну конечную часть (ленту (24)). Решение (21), (17), где  $U, V, W$  и  $x_i, y_i, z_i$  даны в (20), (23) — (26).

Пальцевая фреза описывается во втором параграфе, как частный случай (31). (См. фиг. 2.) В случае одной плоской спиральной поверхности т. е. при исполнении (27), (28) решение дается (37).

Третий параграф занимается дисковой фрезой косозубого зубчатого колеса. В этом случае результатом будет (50), где  $\lambda$  имеет форму (49), и  $x_i$ ,

$y_i, z_i$  даны в (40).  $\delta$  и также  $a$  и  $d$  выбирая так как в (54), (49) вычисление  $\lambda$  упрощается в (57).

В завершение рассматривается частный случай пальцевой фрезы, тогда получим профильную кривую (61).

## SOLUTION OF A TOOL GEOMETRICAL PROBLEM

by

JR. I. DRAHOS, L. HORNYIK and M. HOSSZÚ

### Abstract

Let us consider the helicoidal surface (24) generated by a straight line (See Fig. 1.) The object of the present paper is to determine the profile curve, i. e., the  $X, Z$  plane cut of a circular cutter which mills a finite part (a band) of the surface (24). The solution is (21), (17), where  $U, V, W$ , and  $x_i, y_i, z_i$  are given by (20), (23)—(26).

The shank cutter is treated in §2 as the special case (31). (See Fig. 2.) Then the solution is (37) for a square-treaded screw surface (right helicoid) where we have (27), (28).

§3 deals with the circular cutter of helicoid gears. Then we get (50), where  $\lambda$  is of the form (49) and  $x_i, y_i, z_i$  are given by (40). By choosing  $\delta$  resp.  $a$  and  $d$  as in (54), the calculation (49) of  $\lambda$  is simplified into (57). Finally, the special case of shank cutter is examined, then we obtain the profile curve (61).