A KUBOKTAÉDER GÖMBI HÁLÓZATÁNAK EGY SZÉLSŐÉRTÉK-TULAJDONSÁGA

HEPPES ALADÁR

A gömbfelületet n főkör legfeljebb $n(n-1)+2$ részre osztja fel. Tekintsünk ugyanis $n-1$ főkört, majd írjunk a gömbre egy n-ediket. Ennek az előzőkkel legfeljebb $2(n-1)$ metszéspontja van, más szóval az első $n-1$ főkör által meghatározott tartományok közül legfeljebb $2(n-1)$-et szel ketté. Egy főkör két részre, n főkör tehát legfeljebb $2+2(1+2+\ldots+n-1)=$ $=n(n-1)+2$ részre osztja a gömböt. Látható, hogy a fenti érték pontos minden olyan esetben, ha nincs három, közös ponttal rendelkező főkör. Mondhatjuk, hogy a keletkező részek száma mindig $n(n-1)+2$, megengedve, hogy ezek között 0 területűek is előforduljanak.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ hívta fel figyelmemet annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy miként kell n számú főkört a gömbön úgy elhelyezni, hogy ezek a felszínt a lehető „legegyenletesebben" osszák $n(n-1)+2$ részre. Az $n=1, 2, 3$ esetekben egy főkör, két merőleges, illetve három páronként egymásra merőleges főkör egybevágó részekre való, tehát teljesen egyenletes felosztást eredményez. Általában azonban nem osztható fel a gömb felszíne $n(n-1)+2$ egyenlő területű részre. Az „egyenletesség" általánosabban érvényes definiálása természetesen többféleképp lehetséges. Talán a két legkézenfekvőbb út azt a felosztást nevezni legegyenletesebbnek, amelynél a területre nézve legkisebb rész területe a lehető legnagyobb, illetve amelynél a legnagyobb területű rész területe a lehető legkisebb. Négy főkör esetére megadjuk az előbbi értelemben legegyenletesebb felosztást, továbbá kimutatjuk, hogy az utóbbi értelemben legegyenletesebb felosztás ettől különböző

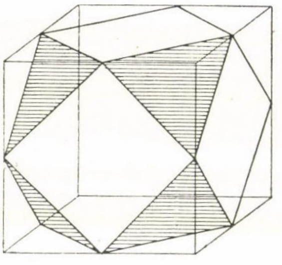
Tétel. *Egy gömbre írt 4 főkör által meghatározott 14 tartomány közül a legkisebb területű tartomány területe akkor a legnagyobb, ha a főkörök egy kuboktaéder*[1] *hálózatát alkotják.*

Bizonyítás. Legyen a vizsgált gömb egységsugarú. A legegyenletesebb felosztás keresésénél nyilván szorítkozhatunk olyan elrendezések vizsgálatára amelyeknél nincs három, közös ponttal rendelkező főkör, mert ekkor van 0 területű rész is. Minthogy bármelyik főkör által meghatározott mindkét félgömbön a másik három kör páronként metszi egymást (2. ábra), a gömb felosztása mindig ugyanolyan jellegű: mindig 8 gömbháromszög és 6 gömb-

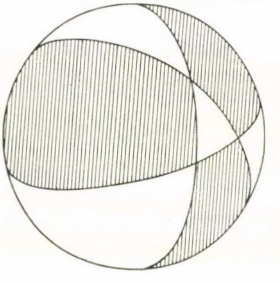
[1] A kuboktaéder a kocka (illetve az oktaéder) élközéppontjainak konvex burka (1. ábra).

négyszög keletkezik, mégpedig úgy, hogy háromszögnek csak négyszög, négyszögnek csak háromszög szomszédja van. A 8 gömbháromszög kerületösszege megegyezik tehát a 6 gömbnégyszögével s egyben a főkörök összhosszával 8π-vel.

A vizsgált feladat helyett foglalkozzunk először azzal a kérdéssel, hogy milyen elrendezés mellett lesz a legkisebb területű *gömbháromszög* területe a legnagyobb.

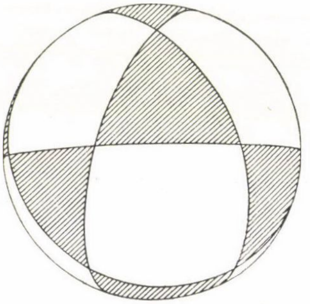


1. ábra.

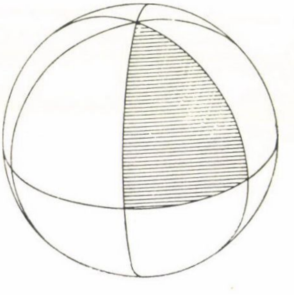


2. ábra.

A legkisebb kerületű gömbháromszög kerülete nem lehet nagyobb, mint π, azonos kerületű gömbháromszögek közül pedig a szabályosnak legnagyobb a területe, így a legkisebb területű gömbháromszög nem lehet nagyobb, mint a π kerületű szabályos. Ekkora is csak abban az esetben, ha valamennyi háromszög π kerületű szabályos gömbháromszög. Ilyen felosztás létezik is, és ezt a kuboktaéder hálózata szolgáltatja, amelyet úgy nyerünk, hogy a gömb középpontjából a gömbbe írt kuboktaéder éleit a gömbre vetítjük (3. ábra). Ennél a felosztásnál a többi tartomány (a négyszögek) területe a háromszögekénél nagyobb — hiszen azok nagyobb-kerületű, többoldalú szabályos gömbsokszögek — tehát a terület szempontjából legkisebb gömbháromszög egyben a legkisebb tartomány is, s így e felosztás a tételben szereplő problémának is megoldását szolgáltatja. Ezzel a tétel igazolást nyert.



3. ábra.



4. ábra.

A kuboktaéder gömbi hálózata az említett másik értelemben már nem a legegyenletesebben osztja fel a gömb felszínét. Van ugyanis olyan felosztás, amelynél a legnagyobb területű rész területe kisebb, mint a kuboktaéderes hálózat egy gömbnégyszögének területe. Tekintsünk ugyanis három főkört, amelyek a gömböt hat $\pi/3$ szögű kétszögre osztják s egy ezekre merőleges negyediket (4. ábra). E felosztásnál 12 egybevágó, $4\pi/3$ kerületű (és két 0 területű) gömbháromszög keletkezik. A maximális területű tartomány tehát egy $4\pi/3$ kerületű gömbháromszög, míg a kuboktaéderes hálózat esetében egy ugyanekkora kerületű, s ennélfogva valóban nagyobb területű szabályos négyszög.

(Beérkezett: 1958. VI. 3.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СЕТКИ КУБОКТАЭДРА

А. HEPPES

Резюме

Рассмотрим 14 области поверхности шара определённые 4 большими кругами. Доказанная в статье теорема утверждает, что площадь области, которая имеет наименьшую площадь, в том случае является наибольшей, если большие круги образуют сетку одного кубоктаэдра. (Фиг. 1.)

Утверждение теоремы неверно, если заменить в теореме слова «наименьший» и «наибольший».

AN EXTREMAL PROPERTY OF THE SPHERICAL NET OF THE CUBOCTAHEDRON

by

A. HEPPES

Abstract

Theorem. Let us consider four great circles of a sphere dividing its surface into 14 domains. The surface of the domain having the smallest area is the greatest if the four great circles form the spherical net of a cuboctahedron. (Fig. 1.)

The statement becomes false if we invert the words "smallest" and "greatest".