NÉHÁNY MEGJEGYZÉS LINEÁRIS ALGEBRAI EGYENLETRENDSZEREK EGYÉRTELMŰ MEGOLDHATÓSÁGÁVAL KAPCSOLATBAN

PETHŐ ÁRPÁD[1)]

Bevezetés

A lineáris algebrai egyenletrendszerek elméletében *határozatlannak* nevezett rendszerekkel kapcsolatban felmerülhet az a kérdés, hogy — habár az ismeretlenek *együttesére* nézve egyértelmű megoldásról nem lehet szó — *egyes* ismeretlenekre az egyenletrendszer nem oldható-e fel egyértelműen. Mivel az ismert unicitási kritériumok ezt a kérdést nem érintik, az alábbiakban megadjuk az idevonatkozó egzisztenciatételeket, továbbá utalunk arra, hogy a lineáris egyenletrendszerek fizikai alkalmazásaiban az egyértelműségnek ilyen értelemben való felvetése gyakran indokolt. A szerző az alábbiakban közölt eredményeire éppen egy ilyen fizikai alkalmazás kapcsán jutott [2]. Feladatként tűzte ki a problémát a *Matematikai Lapok*ban, ahol többen meg is oldották. A megoldások közül a lap EGERVÁRY JENŐét közölte [3]. A szerző eredeti megoldása ettől különbözik.

1. §.

Lineáris algebrai egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságával kapcsolatban bebizonyítjuk a következőt:

Tétel. *Az*

$$\text{(1)}\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} ,$$

röviden

$$\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

egyenletrendszer x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *ismeretlenjét akkor és csak akkor határozza meg egyértelműen, ha*

1. A rendszer kompatibilis (nem tartalmaz ellenmondó egyenleteket), azaz az inhomogén és a homogén egyenletrendszer mátrixának rangja egyenlő:

$$\text{(2)}\qquad \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) ;$$

[1)] Budapesti Műszaki Egyetem, Fizikai-Kémiai Tanszék.

2. *A homogén egyenletrendszer mátrixának rangja 1-gyel nagyobb annak a mátrixnak a rangjánál, mely az előbbiből a k-adik oszlop elhagyásával keletkezik:*

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 . \tag{3}$$

Bizonyítás. A kritérium első pontja triviális, így csak a második pontot bizonyítjuk. Elegendő azonban a homogén esetre szorítkoznunk, mivel az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása ennek egy partikuláris megoldásából és a homogén egyenletrendszer általános megoldásából tevődik össze, így a homogén és inhomogén rendszer egyidejűleg határozza meg egy valamely ismeretlen (x_k) értékét egyértelműen. Tehát bizonyítjuk, hogy a második pontban megadott kritérium a homogén egyenletrendszerre vonatkozólag érvényes.

A következő segédtételre van szükségünk: ha a homogén rendszer x_k-t egyértelműen határozza meg, akkor x_k zérussal egyenlő. Valóban: a homogén rendszer (mindig létező) triviális megoldásában x_k bizonyosan zérus, így az általános megoldásban is csak zérus lehet.

A homogén egyenletrendszer megoldása ekvivalens a $\boldsymbol{0}$ vektornak az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ oszlopvektorok lineáris kombinációjaként való előállításával. Minthogy a lineárisan független oszlopvektorok száma egyenlő az oszlopvektorok mátrixának rangszámával, a bizonyítandó rangkritérium ekvivalens azzal, hogy az $\boldsymbol{a}_k$ oszlopvektor akkor és csak akkor nincs a többiek terében, ha x_k egyértelmű. Valóban: ha $\boldsymbol{a}_k$ nincs a többiek terében, $x_k = 0$ egyértelműen (különben előállítható lenne a többiek lineáris kombinációjaként); másrészt, ha x_k egyértelmű, akkor a segédtétel szerint egyértelműen $x_k = 0$, tehát $\boldsymbol{a}_k$ nem lehet a többiek terében. Q. e. d.

Megjegyzés. Az egyértelmű megoldhatóság eldöntése lehetséges a homogén rendszer együtthatómátrixának bázisfaktorokra bontása alapján is. Egerváry Jenő egyik dolgozatában [1] az együtthatómátrixnak bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárást ad meg tetszőleges együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer általános megoldásának explicit előállítására. Eszerint, *ha*

$$\mathbf{A}_n^m = \mathbf{U}_r^m \mathbf{V}_n^{r*}$$

$$\left(\varrho(\mathbf{A}_n^m) = \varrho(\mathbf{U}_r^m) = \varrho(\mathbf{V}_n^{r*}) = r\right)$$

az együtthatómátrix ún. bázistényezőkre bontott alakja, akkor az

$$\mathbf{A}_n^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1'}$$

inhomogén egyenletrendszer kompatibilis, hacsak

$$\mathbf{A}\mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \ , \tag{2'}$$

és általános megoldása:

$$\boldsymbol{x} = \{\mathbf{E} - \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\}\boldsymbol{t} + \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}^*\boldsymbol{b} \ , \tag{3'}$$

ahol $\boldsymbol{t}$ *tetszőleges elemű paramétervektor.*

(3')-ből rögtön kiolvasható, hogy az x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) ismeretlenre (2') teljesülése esetén akkor és csak akkor egyértelmű (1') megoldása, ha a $\{\ldots\}$ mátrix k-adik sora csupa 0-ból áll, ha tehát

$$\mathbf{A}_m^{n(-1)} \equiv \mathbf{V}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}^* = [a_{ij}^{(-1)}]$$

ún. általánosított inverz k-adik sorvektora és az

$$\mathbf{A}_n^m = [a_{ij}]$$

együtthatómátrix oszlopvektorai között fennállnak a következő relációk:

$$[a_{k1}^{(-1)}, a_{k2}^{(-1)}, \dots, a_{km}^{(-1)}] \begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ml} \end{bmatrix} = \delta_{kl} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

2. §.

Az alábbiakban a lineáris algebrai egyenletrendszerek néhány oly alkalmazását mutatjuk meg, amelyekben az ismeretlenekre adódó megoldások általában nem lesznek egyértelműek.

1. A merev testek sztatikájában fellépő probléma: adott erőnek adott irányú összetevőkre való bontása, lineáris egyenletrendszer megoldására vezet. Tárgyaljuk mindjárt az általános esetet: az $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontban hat az $\boldsymbol{e}_0(u_0, v_0, w_0)$ irányú $\boldsymbol{F}_0$ erő, mely felbontandó az $\boldsymbol{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ pontokban ható $\boldsymbol{e}_i(u_i, v_i, w_i)$ irányú $\boldsymbol{F}_i$ komponensekre ($\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_i$ egységvektorok, $i = 1,2, \dots, n$). A mechanikából ismeretes, hogy az $\boldsymbol{F}_0$ erő az $\boldsymbol{F}_i$ erőrendszerrel akkor és csak akkor ekvivalens, ha egyidejűleg

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

és

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \, .$$

Bevezetve a

$$D_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & y_j & z_j \\ u_j & v_j & w_j \end{vmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

determináns első sorához tartozó $D_j^{(11)}$, $D_j^{(12)}$, $D_j^{(13)}$ aldeterminánsokat, a következő egyenletrendszer áll fenn az $\boldsymbol{F}_i$ erők ismeretlen F_i nagyságaira ($\boldsymbol{F}_i = F_i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{F}_0 = F_0 \boldsymbol{e}_0$):

$$\text{(4)} \qquad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ D_1^{(11)} & D_2^{(11)} & \dots & D_n^{(11)} \\ D_1^{(12)} & D_2^{(12)} & \dots & D_n^{(12)} \\ D_1^{(13)} & D_2^{(13)} & \dots & D_n^{(13)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} = F_0 \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ D_0^{(11)} \\ D_0^{(12)} \\ D_0^{(13)} \end{bmatrix}$$

Amennyiben az erőfelbontás egyáltalán lehetséges, (2) teljesül. Hogy az $\boldsymbol{r}_i$ pontban ható erőkomponens egyértelmű-e, (3) alapján dönthető el.

2. Kémiai reakciók termodinamikájában alapvető kérdés, hogy egy bizonyos körülmények között lefutó reakcióban valamely állapotfüggvénynek milyen megváltozása lép fel [2]. Példaként említhetjük a reakcióban az energia (illetve entalpia) megváltozását, az ún. reakcióhőt. Tekintsük különböző kémiai reakcióknak bizonyos rendszerét, amelyben nem minden reakciónak ismeretes a reakcióhője. Felvetjük a kérdést, mi a feltétele annak, hogy az ismeretlen reakcióhők kiszámíthatók legyenek. Az alábbi gondolatmenet szerint a határozatlan egyenletrendszerek problémájával állunk szemben. Jelentsenek ugyanis az egyes reakcióegyenletekben fellépő kémiai jelek (kémiai komponensenként változó) energiaértékeket, vagyis az egyes reakcióegyenleteket a továbbiakban tekintsük ne csak anyag-, hanem energiamérlegeknek is: ekkor a keletkező és reagáló anyagok energiaértékeinek különbsége, vagyis a reakcióhő egy tagot szolgáltat ebben az energiamérlegben. Most már az ismert és ismeretlen reakcióhőjű reakcióegyenleteket együttesen olyan lineáris egyenletrendszernek tekintjük, melyben az egyes energiaértékek is mint ismeretlenek szerepelnek. (Mivel az energia csak additív állandó erejéig definiált, egyértelmű megoldhatóságot csak az ismeretlen reakcióhőkre várhatunk.)

A fenti típusú kémiai egyenletrendszerek általános alakja a következő:

$$(5)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{l+1} \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$$

ahol $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+l}$ az ismeretlen reakcióhőket, $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_m$ az ismerteket, $x_1, x_2, \dots, x_n$ a kémiai komponensek energiaértékeit, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ pedig az ún. sztöchiometriai számokat jelentik.

Az egyértelműségi kritériumnak (5)-re való alkalmazása egy gyakran használt kémiai-termodinamikai tételnek matematikai analízisét nyújtja ([2]).

3. Fizikai mennyiségek között fennálló ismeretlen függvénykapcsolatok megállapítására ismeretes egy tisztán formális, dimenzionális meggondolásokon nyugvó módszer: a *dimenzionál-analízis*. E módszer szerint, ha a P fizikai mennyiség és a $P_1, P_2, \dots, P_n$ fizikai mennyiségek között valamilyen $P = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ összefüggés áll fenn, akkor a bal- és jobboldalak dimenzióinak szükségszerű megegyezése miatt a jobboldal csak a $P_1, P_2, \dots, P_n$ mennyiségek hatványainak a baloldal dimenzióját adó szorzataiból, pontosabban ezen szorzatok lineáris kombinációjából állhat. A lehetséges f függvénykapcsolatok megállapítására tehát megkeressük a $P_1, P_2, \dots, P_n$ mennyiségek hatványainak mindazon szorzatait, amelyek P dimenzióját adják és vesszük ezen szorzatok összes (általában végtelen sok tagú) lineáris kombinációit. A valóságos függvénykapcsolat a fenti végtelen sor valamilyen speciális összegezésével adódik.

Legyenek az alapdimenziók $U_1, U_2, \ldots, U_m$ [speciálisan U_1: hosszúság (L), U_2: tömeg (M), U_3: idő (T)].

Legyen

$$P_i = U_1^{a_{1i}} U_2^{a_{2i}} \ldots U_m^{a_{mi}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

és

$$P = U_1^{b_1} U_2^{b_2} \ldots U_m^{b_m} . \tag{7}$$

Az említett szorzatkombináció a következő alakú:

$$P = P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_n^{x_n} , \tag{8}$$

ahol a kitevők ismeretlenek.

Behelyettesítve (8)-ba a (6) egyenleteket, (7)-tel való összehasonlítás mutatja, hogy az ismeretlen kitevők az alábbi egyenletrendszert elégítik ki:

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \ldots + a_{jn} x_n = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Ha mármost ennek az egyenletrendszernek van bizonyos ismeretlenre egyértelmű megoldása, az annyit jelent, hogy P valamennyi szorzatelőállításából közös faktor emelhető ki, ami a keresett f kapcsolatnak a dimenzionálanalízis által determinált részét fogja alkotni, míg a megmaradó szorzatkombinációk lineáris kombinációja a keresett f kapcsolatnak nemdeterminált részét képezi.

Pl. súrlódásmentes és inkompresszibilis folyadék felületén kialakuló vízhullámok v fázissebességét kívánjuk meghatározni, mint a folyadék h magasságának, a g nehézségi gyorsulásnak, a λ hullámhossznak és a folyadék ϱ sűrűségének a függvényét [4].

Most $U_1 = L$, $U_2 = M$, $U_3 = T$ és

$$P = v\ (LT^{-1})$$
$$P_1 = g\ (LT^{-2})$$
$$P_2 = \varrho\ (ML^{-3})$$
$$P_3 = \lambda\ (L)$$
$$P_4 = h\ (L)$$

Keressük v-t a következő alakban:

$$v = g^{x_1} \varrho^{x_2} \lambda^{x_3} h^{x_4} .$$

A dimenziók összehasonlításából adódó (9)-nek megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{array}{c} (L) \\ (M) \\ (T) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

A (10) egyenletrendszer kompatibilitását fizikai okok biztosítják, megoldása az x_1 és x_2 ismeretlenekre egyértelmű, ugyanis (3) szerint:

$$\varrho\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varrho\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 = \varrho\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \, .$$

(10) megoldása:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2} - t, \quad x_4 \equiv t \, ,$$

tehát a keresett összefüggés a

$$\sqrt{g} \, \frac{h^t}{\lambda^{t-\frac{1}{2}}}$$

alakú kifejezések lineáris kombinációja:

$$v = \sqrt{g} \sum_t C_t \frac{h^t}{\lambda^{t-\frac{1}{2}}} \, ,$$

C_t: dimenziónélküli állandó, ahol az összegezés további részleteiről a dimenzionál-analízis semmit sem mond. A mechanikából ismerjük a pontos összefüggést, amely szerint

$$v = \sqrt{g} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2} .$$

Mindenesetre a dimenzionál-analízis nyújtotta összefüggés a fázissebességének a függetlenségét ϱ-tól és az arányosságát $\sqrt{g}$-vel determinálja.

(Beérkezett: 1958. III. 31.)

IRODALOM

[1] EGERVÁRY J.: „Az inverz mátrix általánosítása". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 315—324.
[2] PETHEŐ, Á.—SCHAY, G.: „Mathematische Diskussion der Anwendung des Hess'schen Satzes". *Acta Chimica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1954) 21—35.
[3] *Matematikai Lapok* (Feladatrovat) **6** (1955) 352.
[4] DUNCAN, W. J.: *Physical similarity and dimensional analysis.* Edward Arnold Co., New York, 1953.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ В СВЯЗИ С ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТЬЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Á. PETHŐ

Резюме

Рассматриваются не такие системы линейных алгебраических уравнений, для которых разрешимость нужно исследовать обычным образом: существует ли для каждого неизвестного системы уравнений решение, такие, для которых решения для некоторых неизвестных вообще не однозначны.

Даются критерии позволяющие установить для каких неизвестных таких, вообще неопределенных систем уравнений, всё же существует единственное решение. Доказывается следующая теорема:

Для неизвестного x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{коротко}: \quad \mathbf{A}_{1,2\ldots,n+1}\, \boldsymbol{x} = 0)$$

единственное решение существует тогда и только тогда, если

1. Система совместнима (не содержит противоречащих уравнений), т. е. ранг матрици однородной и неоднородной системы совпадает:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) \;;$$

2. Ранг матрици однородной системы уравнений на единицу больше ранга матрици, отличающейся от неё тем, что не содержит k-ого столбца:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 \;.$$

Применение этих критериев демонстрируется на примерах, взятых из разных областей физики: по одному простому случаю рассматривается из статики твердых тел, термодинамики химических реакций и димензионального анализа.

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR EINDEUTIGEN LÖSBARKEIT VON LINEAREN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGSSYSTEMEN

von

Á. PETHŐ

Auszug

Lineare algebraische Gleichungssysteme werden diskutiert, in denen die Lösbarkeit nicht wie gewöhnlich zu untersuchen ist: d. h. nicht ob die eindeutige Lösung inbezug auf jede Unbekannte existiere oder nicht, sondern die Fälle, in welchen die Lösungen inbezug auf die einzelnen Unbekannten im allgemeinen nicht eindeutig sind. Wir geben die Kriterien zur Entscheidung der Frage an für welche Unbekannten derartiger unbestimmten Gleichungssysteme die eindeutige Lösung existiert. Es wird folgender Satz bewiesen: Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_{m,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{kürzer}: \quad \mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}\, \boldsymbol{x} = 0)$$

besitzt eine eindeutige Lösung inbezug auf die Unbekannte x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) dann und nur dann, wenn

1. Das System keine widersprechenden Gleichungen enthält, d. h. der Rang der Matrix des inhomogenen Gleichungssystems mit demselben der Matrix des homogenen Gleichungssystems übereinstimmt:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n+1}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) \ .$$

2. Der Rang der Matrix des homogenen Gleichungssystems um eins grösser ist als der Rang derjenigen Matrix, die aus der Ursprünglichen durch Weglassen der k-ten Spalte entsteht, d. h.:

$$\varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,n}) = \varrho(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}) + 1 \ .$$

Die Anwendung dieser Kriterien wird an Beispielen aus verschiedenen Gebieten der Physik gezeigt: je ein einfacher Fall wird aus der Statik der starren Körper, aus der Thermodynamik chemischer Reaktionen und aus der Dimensionstheorie untersucht.