EGY EGYDIMENZIÓS VÉLETLEN TÉRKITÖLTÉSI PROBLÉMÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

Néhány évvel ezelőtt J. BERNAL hívta fel a figyelmemet a következő problémára, amelynek megoldása a folyadékok kinetikus elmélete szempontjából bírna jelentőséggel:

Az origó körüli R sugarú gömbben (ahol R nagy szám) találomra elhelyezünk N számú egységnyi sugarú gömböt (amelyeket tömörnek tekintünk, tehát egymásba nem hatolhatnak), oly módon, hogy az első gömb középpontja egyenletes eloszlású az origó körüli $R - 1$ sugarú gömbben, és általában, miután már k gömböt elhelyeztünk ($k = 1, 2, \ldots, N - 1$), a $(k + 1)$-edik gömb középpontját oly módon helyezzük el véletlenszerűen, hogy az egyenletes eloszlású azon pontok halmazában, amelyek köré egy egységnyi sugarú gömböt helyezve annak nincs közös pontja a már elhelyezett k gömb egyikével sem.

A feladat az így létrejövő véletlen gömbelhelyezkedés statisztikai jellemzése, például a gömbök közti távolságok eloszlásának kiszámítása stb.

Nemrégiben W. SCHMETTERER egy az említett problémával rokon problémát említett meg. Ez a BERNAL-féle problémától csak abban különbözik, hogy a gömbök számát nem rögzítjük le előre, hanem addig folytatjuk a gömbök elhelyezését a megadott eljárással, amíg ez egyáltalán lehetséges, vagyis amíg az R-sugarú gömb telítve lesz az egységsugarú gömbökkel úgy, hogy több már nem is fér el. Ez esetben a kérdés az, hogy ily módon átlagban az R-sugarú gömb hányadrészét fogják a belehelyezett egységsugarú gömbök kitölteni, illetve, hogy mennyi lesz az elhelyezhető gömbök számának várható értéke. (A két kérdés nyilván ekvivalens.)

BERNAL és SCHMETTERER fenti kérdéseinek egzakt megválaszolása igen nehéz problémának látszik. Ismeretes több más hasonló típusú probléma is, amelyek szintén megoldatlanok. Így például ez idő szerint nincsen kielégítő elmélet, amely egzakt választ adna arra a kérdésre, hogy ha ismert szemcsenagyság és szemcsealak szerinti megoszlású szilárd anyagot (pl. kőzúzalék, szén stb.) egy adott alakú tartályba (pl. vasúti kocsiba) öntünk, akkor a rendelkezésre álló térnek kb. hányadrészét tölti ki a szóban forgó anyag. E kérdés gyakorlati jelentősége szállítási és raktározási problémáknál nyilvánvaló.

Az említett problémákat ,,véletlen térkitöltési problémák'' néven lehet összefoglalni. Ilyen jellegű feladatok más területen is felmerülnek, és megoldásuk a valószínűségszámítás egyik soronlevő feladata. E problémák egzakt tárgyalásának nehézsége onnan adódik, hogy a véletlen térkitöltési problémáknál az egyes térkitöltő elemek (gömbök, szemcsék stb.) elhelyezkedése nem független egymástól. Ilyen módon e problémák egy átfogóbb valószínűségszámítási problémakör részét alkotják, amelyet a következőképpen lehet jellemezni: a valószínűségszámítás független valószínűségi változókra vonatkozó tételeinek kiterjesztése nem teljesen független valószínűségi változók esetére, legalábbis a gyakorlati alkalmazások során legtöbbször előforduló függőségi típusokra. Mint ismeretes, ez irányban még nagyon sok a megoldatlan probléma.

Jelen dolgozatban egy, a véletlen térkitöltés problémakörébe tartozó egyszerű egydimenziós feladatot oldunk meg, mégpedig az említett SCHMETTERER-féle feladat egydimenziós analogonját. E feladat természetesen sokkal egyszerűbb, mint a megfelelő 3-, vagy akár csak az analóg 2-dimenziós feladat, ugyanis a geometriai nehézségek, amelyek már a síkbeli esetben és még inkább a térbeli esetben fellépnek, itt egyáltalán nem jelentkeznek.

Más szóval a következő feladatot vizsgáljuk: a $(0, x)$ intervallumra találomra ráhelyezünk egységnyi intervallumokat, úgy, hogy azoknak ne legyen egymással közös pontjuk. Meghatározandó az ilyen módon elhelyezhető intervallumok várható száma. A feladat megoldása — úgy hisszük — bizonyos érdekességgel bír mint egy kezdeti lépés az említett, jórészt még feltáratlan területen. Az egydimenziós feladat az alábbiakban adott megoldásának mintájára megoldható például a következő általánosabb feladat is:

A k-dimenziós tér ($k = 2, 3, \ldots$,) egy T tengelyparallel helyzetű téglájában találomra sorjában elhelyezünk adott méretű egybevágó tengelyparallel téglákat oly módon, hogy egy téglának se legyen közös pontja a már előzőleg elhelyezett téglákkal. Az eljárást addig folytatjuk, amíg ez egyáltalán lehetséges; meghatározandó az elhelyezett téglák várható száma, illetve az, hogy e téglák a T téglának hányadrészét töltik ki. A következőkben az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós esettel foglalkozunk, azonban az olvasó, ha a gondolatmenetet figyelemmel kíséri, látni fogja, hogy az tetszőleges dimenziószám esetében alkalmazható, bár az analitikus apparátus a többdimenziós esetben természetesen bonyolultabb és bizonyos geometria nehézségek is fellépnek.

Az egydimenziós feladat egy retardált differenciálegyenletre vezet, mégpedig ha $M(x)$ jelöli a $(0, x)$ intervallumon elhelyezett egységnyi intervallumok várható számát, akkor $M(x)$ eleget tesz a

$$(x-1)\,M'(x) + M(x) = 2\,M(x-1) + 1 \qquad (x \geqq 1) \tag{0.1}$$

retardált differenciálegyenletnek, $M(x) = 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ kezdeti feltétel mellett. Az (0.1) retardált differenciálegyenlet a

$$w(x)\,y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)\,y(x-1) + r(x) \tag{0.2}$$

típusú egyenletek osztályába tartozik. A (0.2) típusú egyenletekkel foglalkozik pl. N. G. DE BRUIJN [1] és [2] dolgozata. Különösen sokat vizsgálták a szintén a (0.2) típusba tartozó

$$xy'(x) + y(x) = y(x-1) \tag{0.3}$$

egyenletet, amely egy számelméleti probléma megoldását szolgáltatja. Ha ugyanis $\Phi(N, M)$ jelöli azon $n \leqq N$ természetes számok számát, amelyeknek nincs M-nél kisebb törzstényezője, akkor, mint A. BUCHSTAB [3] kimutatta,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\Phi(M^x, M)\log M}{M^x} = y(x) , \tag{0.4}$$

ahol $y(x)$ eleget tesz a (0.3) egyenletnek és az $y(x) = 1/x\,(1 \leqq x \leqq 2)$ kezdeti feltételeknek. DE BRUIJN [2], [4] kimutatta, hogy a szóban forgó $y(x)$ BUCHSTAB-féle függvénynek létezik a határértéke, ha $x \to +\infty$ és

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = e^{-\gamma} , \tag{0.5}$$

ahol γ az Euler-féle állandó. A (0.4) egyenlettel foglalkozott L. K. HUA is [5], aki a Laplace-transzformáció módszerét alkalmazta és így bizonyította be (0.5) fennállását, továbbá a maradéktagra is igen éles becslést adott meg.

Jelen dolgozatban, ugyanúgy, mint HUA, a szóban forgó (1) retardált differenciálegyenletet úgy oldjuk meg, hogy bevezetjük $M(x)$ Laplace-transzformáltját, vagyis a

$$\varphi(s) = \int_0^\infty M(x)\, e^{-sx}\, dx \qquad (s = \sigma + it\, , \ \ \sigma > 0) \tag{0.6}$$

függvényt és kimutatjuk, hogy $\varphi(s)$ a

$$\frac{d}{ds}\left(se^s\, \varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s} \tag{0.7}$$

közönséges differenciálegyenletnek tesz eleget, továbbá kielégíti a

$$\lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = 0 \tag{0.8}$$

határfeltételt. (0.7) megoldása explicit alakban előállítható:

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt\ . \tag{0.9}$$

$\varphi(s)$ explicit alakjából Tauber-típusú meggondolások alapján következtethetünk $M(x)$ aszimptotikus viselkedésére, ha $x \to +\infty$.

Az 1. § a probléma valószínűségszámítási megfogalmazásával, a várható értékre vonatkozó retardált differenciálegyenlet felállításával foglalkozik. A 2. §-ban a Laplace-transzformáció segítségével megoldjuk a keresett függvény Laplace-transzformáltjára nyert közönséges differenciálegyenletet. A 3. és 4. §-ban a Laplace-transzformált viselkedéséből következtetünk a keresett függvény (az x hosszúságú intervallumon elhelyezkedő egységnyi intervallumok várható számának) aszimptotikus viselkedésére. Kimutatjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = C \,, \tag{0.10}$$

ahol

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt = 0{,}748\ldots \,, \tag{0.11}$$

illetve ezen túlmenően kimutatjuk, hogy $M(x)$-re a következő aszimptotikus előállítás érvényes:

$$M(x) = Cx - (1-C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \,, \tag{0.12}$$

ahol n tetszőleges nagy szám, és C a (0.11) alatti állandó.[1] Az 5. §-ban a szóban forgó intervallum-szám szórását becsüljük meg, és e becslés segítségével kimutatjuk, hogy az x hosszúságú intervallum lefedett részének viszonya a teljes intervallumhoz sztochasztikusan konvergál a C határértékhez. A 6. §-ban a kérdés teljesebb tárgyalásának lehetőségére mutatunk rá, amennyiben vázoljuk az eloszlásfüggvény pontos meghatározásához követendő eljárást.

A szóban forgó feladat megoldásának egy érdekes gyakorlati alkalmazására N. G. DE BRUIJN volt szíves figyelmemet felhívni. Egy L méter hosszúságú járda mentén autók parkolhatnak. Az újonnan érkező autók találomra helyezkednek el a még el nem foglalt részszakaszokban (nem igyekeznek szorosan egymáshoz zárkózni). Kérdés, hány autó fog tudni parkolni, ha egy-egy autónak l méter szabad járdamenti szakaszra van szüksége a parkoláshoz. A válasz az, hogy nagy valószínűséggel körülbelül 0,748 L/l számú autó fog tudni parkolni a szóban forgó parkírozó helyen.

1. §. A probléma valószínűségszámítási megfogalmazása

Helyezzünk el találomra a $(0, x)$ intervallumon egy egységnyi hosszúságú I_1-szakaszt. Ezen azt értjük, hogy az I_1 szakasz ξ kezdőpontja a $(0, x-1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ezután helyezzünk el az I_1 szakasz helyzetétől függetlenül találomra (az előbbi értelemben) egy másik egységnyi szakaszt a $(0, x)$-intervallumon. Ha a második szakasznak I_1-gyel nincs közös pontja, a második szakaszt megtartjuk és I_2-vel jelöljük; ha van közös pontja, akkor e szakaszt elhagyjuk és egy újabb szakaszt választunk. Ha már az $I_1, I_2, \ldots, I_k$ (egymástól idegen) szakaszokat megválasztottuk, a következő találomra választott szakaszt csak akkor tartjuk meg, ha az $I_1, I_2, \ldots, I_k$ szakaszok egyikével sincs közös pontja. Ez esetben e szakaszt I_{k+1}-gyel jelöljük. Az eljárást addig folytatjuk, ameddig még van egyáltalán lehetőség a további szakaszok elhelyezésére, vagyis addig, amíg olyan helyzet nem áll elő, hogy két szomszédos szakasz, illetve a két szélső szakasz és a $(0, x)$ intervallum megfelelő végpontjai közti távolságok között nem marad

[1] N. G. DE BRUIJN felhívta a figyelmemet arra, hogy az ő módszerével a maradéktag becslése (0.12)-ben még tovább élesíthető.

egyetlen 1-nél hosszabb sem. Tegyük fel, hogy ez a helyzet az I_{ν_x} intervallum elhelyezése után következik be. A feladat a ν_x valószínűségi változó $M(x) = \mathbf{M}\{\nu_x\}$várható értékének meghatározása, illetve a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = C$$

határérték kiszámítása. Nyilvánvaló, hogy $M(x) = 0$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $M(x)=1$, ha $1 < x \leq 2$. (Nem teljesen evidens, hogy $M(x)$ monoton növekvő, bár ez valóban így van, és a későbbiekből adódni fog.) Nyilvánvaló, hogy $0 \leq M(x) \leq x$. A fenti határérték létezése sem magától értetődő, de ez is ki fog adódni, és egyben C értéket is meg fogjuk határozni. (C értéke közelítőleg 0,748.)

Először kimutatjuk, hogy $M(x)$ eleget tesz az

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1 \qquad (x > 0) \tag{1.1}$$

integrálegyenletnek. Az (1.1) egyenletre a következő meggondolással jutunk: ha a $(0, x+1)$ intervallumon egy egységnyi intervallumot már elhelyeztünk, mégpedig ez a $(t, t+1)$ intervallum $(0 \leq t \leq x)$, akkor az ettől balra elhelyezkedő intervallumok átlagos száma nyilván $M(t)$, az ettől jobbra elhelyezkedő intervallumok átlagos száma $M(x-t)$ és így (mivel t egyenletes eloszlású $(0, x)$-ben)

$$M(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(M(t) + M(x-t)\big)\,dt + 1 = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1\,.$$

(1.1)-et x-szel beszorozva és mindkét oldalt x szerint differenciálva kapjuk, hogy $M(x)$ az

$$x\,M'(x+1) + M(x+1) = 2\,M(x) + 1 \qquad (x > 0) \tag{1.2}$$

„retardált differenciálegyenletnek" tesz eleget.

2. §. A retardált differenciálegyenlet megoldása a Laplace-transzformáció segítségével

Legyen

$$\varphi(s) = \int_0^\infty M(x)\,e^{-xs}\,dx \qquad (s = \sigma + it\,,\ \sigma > 0)\,. \tag{2.1}$$

ahol $M(x)$ az

$$x\,M'(x+1) + M(x+1) = 2\,M(x) + 1 \qquad (x > 0) \tag{2.2}$$

retardált differenciálegyenletnek és az

$$M(x) = 0 \qquad \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2.3}$$

kezdeti feltételnek eleget tevő függvény.

A (2.3) Laplace-transzformált létezése a $0 \leqq M(x) \leqq x$ egyenlőtlenségből következik. (2.2) mindkét oldalát e^{-xs}-sel szorozva és x szerint integrálva nyerjük, hogy

$$\text{(2.4)} \qquad \int_0^\infty x\,M'(x+1)\,e^{-xs}\,dx + \int_0^\infty M(x+1)\,e^{-xs}\,dx = 2\,\varphi(s) + \frac{1}{s}\,.$$

Mivel $M(x) = 0$, ha $0 \leqq x \leqq 1$,

$$\text{(2.5)} \qquad \int_0^\infty M(x+1)\,e^{-xs}\,dx = e^s \int_1^\infty M(t)\,e^{-ts}\,dt = e^s\,\varphi(s)$$

és

$$\text{(2.6)} \qquad \int_0^\infty x\,M'(x+1)\,e^{-xs}\,dx = -\frac{d}{ds}\left(e^s \int_0^\infty M'(t)e^{-ts}\,dt\right).$$

Parciális integrálással nyerjük, hogy

$$\text{(2.7)} \qquad \int_0^\infty M'(t)\,e^{-ts}\,dt = s\,\varphi(s)\,.$$

A (2.4)—(2.7) összefüggésekből adódik, hogy $\varphi(s)$ a

$$\text{(2.8)} \qquad \frac{d}{ds}\big(se^s\,\varphi(s)\big) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

Bevezetve a $w(s) = e^s\,\varphi(s)$ jelölést, $w(s)$ az

$$\text{(2.9)} \qquad sw'(s) = -2\,w(s)\,e^{-s} - \frac{1}{s}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.

A (2.9)-nek megfelelő homogén egyenletet megoldva, a határozatlan együttható módszerét alkalmazva és figyelembe véve, hogy $0 \leqq M(x) \leqq x$ miatt pozitív s esetén

$$0 \leqq w(s) \leqq e^s \int_1^\infty xe^{-sx}\,dx$$

és így

$$\text{(2.10)} \qquad \lim_{s\to+\infty} w(s) = 0\,,$$

kapjuk, hogy

$$w(s) = \frac{1}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt\,, \tag{2.11}$$

tehát

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt\,. \tag{2.12}$$

A (2.12) formulából

$$\lim_{s\to+0} s^2 \varphi(s) = C\,, \tag{2.13}$$

ahol

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt\,, \tag{2.14}$$

A C állandó számértékre 3 tizedesjegy pontossággal $C = 0{,}748$ adódik. A numerikus számítás céljából a C állandót definiáló integrált célszerű gyorsabban konvergáló integrállá alakítani. BÉKÉSSY ANDRÁS vette észre, hogy ez a következőképpen végezhető el: parciális integrálással adódik, hogy

$$C = 2\int_0^\infty (1-e^{-t}) \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt =$$

$$= 2C - 2\int_0^\infty \exp\left(-t - 2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt$$

tehát

$$C = 2\int_0^\infty \exp\left(-t - 2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) dt\,. \tag{2.15}$$

A (2.15) képlet alapján a numerikus számolást SIMON SÁNDOR végezte el.

3. §. Egy Tauber-típusú tétel alkalmazása $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M(x)}{x} = C$ bebizonyítására

Először kimutatjuk, hogy létezik a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x}$$

határérték és egyenlő a (2.14) alatt szereplő C konstanssal. E célból alkalmazni fogjuk a következő jól ismert Tauber-típusú tételt: *Ha* $\alpha(x)$ *monoton növekvő függvény* $(0 < x < +\infty)$, $\beta > 0$ *és*

$$\lim_{s\to+0} s^\beta \int_0^\infty e^{-sx}\, d\alpha(x) = C\ ,$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\beta} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}$$

(lásd: [7], 108. tétel).

Mivel az

$$\alpha(x) = \int_0^x M(t)\, dt \tag{3.1}$$

függvény monoton növekvő és

$$s^2 \int_0^\infty e^{-sx}\, d\,\alpha(x) = s^2 \varphi(s)\ ,$$

az említett tételből ($\beta = 2$ esetén) azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x M(t)\, dt = \frac{C}{2}\ . \tag{3.2}$$

Osszuk most el (1.1) mindkét oldalát $(x+1)$-gyel és végezzük el az $x \to +\infty$ határátmenetet. (3.2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x+1)}{x+1} = C\ . \tag{3.3}$$

Így tehát bebizonyítottuk állításunkat, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = C\ , \tag{3.4}$$

ahol C a (2.14) alatti állandó. (3.4)-ből és (2.2)-ből az is következik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} M'(x) = C\ . \tag{3.5}$$

(3.5)-ből már látható, hogy $M(x)$ elég nagy x-re monoton növekvő. Most kimutatjuk, hogy $M(x)$ már $x > 2$-re monoton növekvő. Ehhez elegendő megmutatni, hogy

$$2\,M(x-1) + 1 - M(x) > 0\ , \quad \text{ha} \quad x > 2\ . \tag{3.6}$$

Az $1 < x \leqq 2$ intervallumban nyilván $2\,M(x-1) + 1 - M(x) = 0$. Ha megmutatjuk, hogy abból, hogy $2\,M(t-1) + 1 - M(t) \geqq 0$, ha $1 < t \leqq x$

valamilyen $x > 1$-re, következik, hogy $2M(x) + 1 - M(x+1) > 0$, akkor ebből (3.6) következik. Ez azonban azonnal belátható, hiszen (1.1) szerint

$$2M(x) + 1 - M(x+1) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{4}{x(x-1)} \int_0^{x-1} M(t)\,dt + \frac{2}{x-1} \int_1^{x-1} \big(2M(t) + 1 - M(t+1)\big)\,dt$$

Tehát $M(x)$ valóban monoton növekvő.[2] Mivel (3.2)-ből következik, hogy

$$xM''(x+1) = 2\big(M'(x) - M'(x+1)\big), \tag{3.8}$$

(3.5)-ből az is következik, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} x M''(x) = 0. \tag{3.9}$$

Ily módon határértékben az $y = M(x)$ görbe erősen hozzásimul az $y = Cx$ egyeneshez.

Eredményünket a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Tétel. *A* $(0, x)$ *intervallumot kitöltve találomra elhelyezett közös pont nélküli egységnyi hosszúságú intervallumokkal, ezek nagy* x *esetén a* $(0, x)$ *intervallumnak átlagban 74,8%-át fedik le.*

Az $M(x) - Cx$ eltérést a következő paragrafusban közelebbről is megvizsgáljuk.

4. §. $M(x)$ pontosabb aszimptotikájának meghatározása

Vegyük észre, hogy a

$$\mu(x) = Cx - (1 - C) \tag{4.1}$$

függvény kielégíti az (1.1) egyenletet, bármi is a C állandó értéke. Ennek

---

[2] Miután kimutattuk, hogy $M(x)$ monoton növekvő, a fentebb

$$\alpha(x) = \int_0^x M(t)\,dt$$

függvényre alkalmazott Tauber-tételt közvetlenül alkalmazhatjuk $M(x)$-re is ($\beta = 1$ mellett), mivel

$$\int_0^\infty e^{-xs}\,dM(x) = \int_0^\infty M'(x)\,e^{-xs}\,dx = s\,\varphi(s).$$

Így egy újabb bizonyítást nyerünk arra, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = C.$$

alapján már sejteni lehet, hogy ha C a (2.21) alatti állandó, akkor létezik $M(x) - Cx$ határértéke, ha $x \to +\infty$, mégpedig

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl(M(x) - Cx\bigr) = -(1 - C) \tag{4.2}$$

E paragrafusban ki fogjuk mutatni, hogy ez valóban így van. E célból kiindulunk abból, hogy $M(x)$ Laplace-transzformáltja, $\varphi(s)$, (2.12) szerint a következő alakra hozható:

$$\varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{s^2}. \tag{4.3}$$

Itt $\Phi(s)$ a következő alakban írható fel:

$$\Phi(s) = e^{-s}\left(C - \int_0^s e^{2\int_t^s \frac{1-e^{-u}}{u}\,du}\,dt\right). \tag{4.4}$$

Mivel $(1 - e^{-z})/z$ egész függvény, könnyen belátható, hogy $\Phi(s)$ is egész függvény. Ebből következik, hogy

$$\varphi(s) = \frac{C}{s^2} + \frac{\Phi'(0)}{s} + \psi(s), \tag{4.5}$$

ahol

$$\psi(s) = \frac{\Phi(s) - C - \Phi'(0)\,s}{s^2} \tag{4.6}$$

szintén egész függvény. $\Phi'(0)$ értékét kiszámítva

$$\Phi'(0) = C - 1 \tag{4.7}$$

adódik, tehát

$$\varphi(s) = \frac{C}{s^2} - \frac{1-C}{s} + \psi(s), \tag{4.8}$$

ahol $\psi(s)$ egész függvény.

Mármost a Laplace-transzformáció jól ismert inverziós képlete szerint

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs}\,\varphi(s)\,ds \qquad (\sigma > 0), \tag{4.9}$$

és így

$$M(x) = Cx - (1 - C) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs}\,\psi(s)\,ds \qquad (\sigma > 0). \tag{4.10}$$

Mivel $\psi(s)$ egész függvény, (4.10)-ben $\sigma = 0$ is vehető, tehát

$$M(x) = Cx - (1 - C) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \psi(it)\, dt \,, \tag{4.11}$$

Könnyen belátható, hogy ha $s = it$ (t valós), a $\varphi(s)$-et definiáló

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} e^{2\int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u} du} \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt \tag{4.12}$$

képletben szereplő

$$\int_s^\infty \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt$$

integrálban integrációs útként választható az imaginárius tengely is. Ehhez ugyanis csak azt kell kimutatni, hogy ha K_R jelöli a $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ negyedkört, akkor

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{K_R} \exp\left(-2 \int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| = 0 \,. \tag{4.13}$$

(4.13) a következőképpen látható be:

$$\left| \int_{K_R} \exp\left(-2 \int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| \leqq R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-2 \int_1^R \frac{1-e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{r} dr\right) d\varphi \,.$$

Mármost, ha $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$, akkor

$$\int_1^R \frac{e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{r} dr \leqq \int_1^\infty e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} dr \leqq 3 \;;$$

ha pedig $\pi/4 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, akkor, mivel $(e^{-r\cos\varphi})/r$ monoton csökkenő függvény,

$$\int_1^R \frac{e^{-r\cos\varphi}}{r} \cos(r\sin\varphi)\, dr \leqq \int_1^{\frac{\pi}{2\sin\varphi}} \frac{e^{-r\cos\varphi}}{r} \cos(r\sin\varphi)\, dr \leqq \frac{\pi}{2\sin\varphi} \leqq 3 \,.$$

Tehát

$$\left| \int_{K_R} \exp\left(-2 \int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dz \right| \leqq \frac{e^6 \pi}{2R}$$

és így (4.13) valóban fennáll.

Ha tehát t pozitív, $\varphi(it)$ a

$$(4.14)\qquad \varphi(it) = -\frac{e^{-it}}{t^2} e^{2\int_0^t \frac{1-e^{-iu}}{u} du} \int_t^{\infty} \exp\left(-2\int_0^u \frac{1-e^{-iv}}{v} dv\right) du$$

alakra hozható. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(-it) = \varphi(it)$, ezért $\varphi(it)$, illetve $\psi(it)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatánál szorítkozhatunk t pozitív értékeire. (4.14)-ből, figyelembe véve, hogy az

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-iu}}{u} du$$

integrál létezik, leolvasható, hogy

$$(4.15)\qquad \varphi(it) = O\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \text{ha} \quad t \to +\infty,$$

és így

$$(4.16)\qquad \psi(it) = O\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \text{ha} \quad t \to +\infty.$$

Ily módon (4.11)-ből parciális integrálással következik, hogy

$$(4.17)\qquad M(x) - Cx + (1-c) = -\frac{1}{2\pi i(x-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-1)} \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) dt.$$

Mivel

$$(4.18)\qquad \psi(it) = \varphi(it) + \frac{C}{t^2} - \frac{i(1-C)}{t},$$

tehát

$$(4.19)\qquad \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{it}\varphi(it)\right) + \frac{(1-C)e^{it}}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

(4.14)-ből (vagy a (2.9) egyenletből) látható, hogy

$$(4.20)\qquad \frac{d}{dt}\left(e^{it}\psi(it)\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Figyelembe véve még, hogy

$$\left|\int_1^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt\right| \leq K \quad \text{és} \quad \left|\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{ixt}}{t} dt\right| \leq K, \quad \text{ha} \quad x \geq 1,$$

ahol K nem függ x-től, következik, hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.21}$$

A $w(s)$-re vonatkozó (2.9) differenciálegyenletből következik teljes indukcióval, hogy

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{it}\varphi(it)\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \tag{4.22}$$

tehát a fenti meggondolást megismételve, ismételt parciális integrálással következik,[3] hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.23}$$

N. G. DE BRUIJN volt szíves közölni velem, hogy [2] dolgozatának általános eredményei felhasználásával még élesebb becslés adható (4.23) jobboldalára, mégpedig kimutatható, hogy

$$M(x) - Cx + (1 - C) = O\left((2e)^x x^{-x+D}\right) \tag{4.24}$$

ahol D állandó. Ugyanis bevezetve az

$$f(x) = \frac{M(x+1) + 1}{x + 2}$$

függvényt, $f(x)$-re az

$$\frac{x(x+2)}{2(x+1)} f'(x) + f(x) - f(x-1) = 0 \quad (x \geqq 0)$$

retardált differenciálegyenlet adódik, és erre már [2] egy általános tétele alkalmazható.

5. §. A szórás kiszámítása és a nagy számok törvényének alkalmazása

Jelölje ν_x a $(0, x)$ intervallumban elhelyezett egységnyi intervallumok számát. Célunk e paragrafusban a ν_x valószínűségi változó szórásának meghatározása. E célból vezessük be az

$$M_2(x) = \mathbf{M}\{\nu_x^2\} \tag{5.1}$$

jelölést. Ugyanazt a meggondolást alkalmazzuk, amelyet az $M(x)$-re vonatkozó függvényegyenlet felállításánál követtünk. E gondolatmenetet röviden abban foglalhatjuk össze, hogy azon feltevés mellett, hogy az $(0, x+1)$ intervallumban választott első intervallum a $(t, t+1)$ intervallum $(0 \leqq t \leqq x)$,

[3] Megjegyzendő, hogy (4.23) levezethető HAAR ALFRÉD egy tételéből is ([6], 85. oldal), azonban e tétel feltételei teljesülésének verifikálása nem könnyebb, mint a fent adott közvetlen bizonyítás.

ν_{x+1} előállítható a $\nu_{x+1} = \nu_t + \nu_{x-t} + 1$ alakban, ahol ν_t és ν_{x-t} függetlenek; így

$$\mathbf{M}\{\nu_{x+1}^2\} =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 + \mathbf{M}\{\nu_t^2\} + \mathbf{M}\{\nu_{x-t}^2\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_t\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_{x-t}\} + 2\,\mathbf{M}\{\nu_t\}\,\mathbf{M}\{\nu_{x-t}\}\right) dt\ .$$

tehát

$$M_2(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M_2(t)\,dt + \frac{4}{x}\int_0^x M(t)\,dt + \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,M(x-t)\,dt + 1\ . \tag{5.2}$$

Bevezetve a ν_x változó szórásnégyzetére a

$$D^2(x) = \mathbf{D}^2\{\nu_x\} = \mathbf{M}\{\nu_x^2\} - \mathbf{M}^2\{\nu_x\} \tag{5.3}$$

jelölést, következik

$$\begin{aligned} D^2(x+1) &= \frac{2}{x}\int_0^x D^2(t)\,dt + \\ &+ \frac{2}{x}\int_0^x \left[M^2(t) + M(t)\,M(x-t) + 1 - \frac{M^2(x+1)}{2}\right] dt\ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Mivel (4.23) szerint az (5.4) jobboldalán álló függvény korlátos, következik, hogy van olyan $K > 0$ állandó, hogy

$$D^2(x+1) \leqq \frac{2}{x}\int_0^x D^2(t)\,dt + K\ . \tag{5.5}$$

Mivel $\delta(x) = KM(x)$ eleget tesz a

$$\delta(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \delta(t)\,dt + K \tag{5.6}$$

egyenletnek, és a $(0, 1)$ intervallumban $D(x) = \delta(x) = 0$, (5.5) szerint minden x-re

$$D^2(x) \leqq \delta(x) = KM(x)\ , \tag{5.7}$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy $D^2(x) = O(x)$ és így, hogy

$$D(x) = O\left(\sqrt{x}\right)\ . \tag{5.8}$$

Alkalmazzuk most a Csebisev-féle egyenlőtlenséget ν_x-re. Azt kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_x}{M(x)} - 1\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D^2(x)}{\varepsilon^2 M^2(x)} . \tag{5.9}$$

Mivel (5.9) jobboldala (5.8) szerint 0-hoz tart, ha $x \to +\infty$ következik, hogy $\nu_x/M(x)$ sztochasztikusan konvergál 1-hez. Az eredményt a következőképpen is kifejezhetjük: ν_x/x sztochasztikusan konvergál a (2.14) alatti C állandóhoz. *Ha tehát x igen nagy, gyakorlatilag bizonyosak lehetünk abban, hogy $\nu_x \approx Cx$, vagyis a $(0, x)$ intervallum lefedett részének aránya az egész intervallumhoz igen közel lesz a $C \approx 0{,}748$ értékhez.*

6. §. Az eloszlásfüggvény meghatározása

Eddig csak ν_x első két momentumával foglalkoztunk. Felmerül a kérdés: nem lehetséges-e ν_x eloszlását meghatározni. E paragrafusban ezzel a foglalkozunk.

Jelölje $P_k(x)$ annak a valószínűségét, hogy ν_x a k értéket veszi fel $(k = 0,1,2, \ldots)$. Akkor

$$P_0(x) = 1 \quad \text{és} \quad P_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6.1}$$

ha $0 \leqq x \leqq 1$, és az eddigiekben már többször alkalmazott gondolatmenet segítségével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} &P_0(x+1) = 0 \\ &P_k(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{j=1}^{k-1} P_j(t)\, P_{k-j-1}(x-t)\right) dt \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{6.2}$$

ha $x > 0$.

A (6.1)—(6.2) egyenletek segítségével a $P_k(x)$ függvények szukcesszíve meghatározhatók. E célból bevezetjük a $P_k(x)$ függvény $\varphi_k(x)$ Laplace-transzformáltját:

$$\varphi_k(s) = \int_0^\infty e^{-xs} P_k(x)\, dx \qquad (s = \sigma + it\ ,\ \sigma > 0) . \tag{6.3}$$

(6.2)-ből könnyen adódik, hogy

$$-\, e^s\left(\varphi_k(s) + \varphi_k'(s)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j(s)\, \varphi_{k-1-j}(s) \qquad (k=1, 2, \ldots) . \tag{6.4}$$

Mivel

$$\varphi_0(s) = \int_0^1 e^{-xs}\, dx = \frac{1 - e^{-s}}{s} ,$$

(6.4)-et $k = 1$-re felírva és a $\varphi_0(s)$-re kapott kifejezést behelyettesítve, $\varphi_1(s)$-re egy közönséges differenciálegyenletet nyerünk. Ezt megoldva, és a kapott eredményt (6.4)-be $k = 2$ mellett behelyettesítve, egy közönséges differenciálegyenletet kapunk $\varphi_2(s)$-re. Ily módon az összes $\varphi_k(s)$ függvények egymás után meghatározhatók. A (6.4) végtelen differenciálegyenletrendszert egyetlen egyenletbe foglalhatjuk össze, ha bevezetjük az

$$Y(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s)\, z^k \tag{6.5}$$

függvényt. Y-ra (6.4)-ből az

$$Y' = \frac{(s-1)+e^{-s}}{s^2} - ze^{-s}\, Y^2 - Y \tag{6.6}$$

közönséges, nem-lineáris differenciálegyenlet adódik.

Egy másik út a $P_k(x)$ függvények meghatározásra a következő: Bevezetjük a $\{P_k(x)\}$ valószínűségeloszlás generátorfüggvényét, vagyis a

$$G(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, z^k \tag{6.7}$$

függvényt. (6.1)-ből és (6.2)-ből $G(z, x)$-re a

$$G(z, x+1) = 1 + \frac{z}{x} \int_0^x G(z, t)\, G(z, x-t)\, dt \tag{6.8}$$

integrálegyenlet adódik.

Ha (6.8) mindkét oldalát z szerint differenciáljuk és figyelembe vesszük, hogy

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=1} = M(x)$$

és $G(1, x) = 1$, visszakapjuk $M(x)$-re az

$$M(x+1) = 1 + \frac{2}{x} \int_0^x M(t)\, dt$$

egyenletet. Hasonlóképpen (6.8)-ba z helyett $e^{-\zeta}$-t helyettesítve és ζ szerint kétszer differenciálva adódik az $M_2(x)$-re vonatkozó (5.2) egyenlet. Továbbá k-szoros differenciálás útján egy függvényegyenletet nyerünk a k-adrendű $M_k(x) = \mathbf{M}\{\nu_x^k\}$ momentumra.

(Beérkezett: 1958. V. 27.)

IRODALOM

[1] De Bruijn, N. G.: „The asymptotically periodic behaviour of the solutions of some linear functional equations". *American Journal of Mathematics* **71** (1949) 313—330.

[2] De Bruijn, N. G.: „On some linear functional equations". *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950) 129—134.

[3] Бухштаб, А. А.: „Асимптотическая оценка одной общей теоретико-числовой функции". *Математический Сборник* **2** (1937) 1239—1246.

[4] De Bruijn, N. G.: „On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes". *Indagationes Mathematicae* **12** (1950) 803—812.
[5] Loo-Keng-Hua : „Estimation of an integral". *Chinese Mathematical Society* **11** (1951) 393—402 (kínaiul, angol kivonattal).
[6] Haar, A.: „Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen". *Mathematische Annalen* **96** (1926) 69—107.
[7] Hardy, G. H.: *Divergent series*. Oxford University Press, 1949.

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАЛАЧЕ О СЛУЧАЙНОМ ЗАПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВА

A. RÉNYI

Резюме

В работе решается следующая проблема: расположим случайно единичный отрезок на отрезке $(0, x)$; это понимается так, что центр интервалла — случайная точка, имеющая равномерное распределение на отрезке $(^1/_2\,, x - {}^1/_2)$. Расположим случайным образом (в таком же смысле) второй единичный отрезок независимо от первого на отрезке $(0, x)$. Если второй отрезок имеет общую часть с первым, то он не принимается во внимание и выбор продолжается пока два отрезка не будет пересекаться. Процесс продолжается таким образом, т. е. если k (непересекающийся) отрезок уже расположен на отрезке $(0, x)$ случайным образом выбирается новый, но он сохраняется лишь если он не пересекается ни с одним из предыдущих, в противном случае выбор повторяется и т. д. Процесс заканчивается, если больше не остается возможности расположить единичный отрезок так, чтобы он не пересекался ни с одним из уже расположенных отрезков. Пусть ν_x обозначает число расположенных таким образом на отрезке $(0, x)$ единичных отрезков. Очевидно, ν_x — случайная величина. Пусть $M(x)$ обозначает ее математическое ожидание. В работе доказывается, что $M(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1 \tag{1}$$

и начальному условию $M(x) = 0$ при $0 \leqq x \leqq 1$. Значения $M(x)$ с помощью (1) последовательно могут быть вычислены для отрезков $n \leqq x < n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В настоящей работе исследуется ассимптотическое поведение $M(x)$. Введя преобразованную Laplace-а

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)\,dx \tag{2}$$

доказывается, что $\varphi(s)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(se^s\varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) dt \; . \tag{4}$$

Из (4) с помощью хорошо известной теоремы типа Tauber-а следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = C \; , \tag{5}$$

где

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du\right) \approx 0{,}748 \; . \tag{6}$$

С помощью более глубокого изучения обратной формулы преобразования Laplace-а можно доказать,[1)] что

$$M(x) = Cx - (1-C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{7}$$

для всех n. Далее доказывается также, что ν_x/x стохастически стремится к C при $x \to \infty$. Наконец, даются рекурсивные соотношения, из которых распределение от ν_x также может быть определено. Автор хочет заниматься с решением аналогичных проблем в случае большего числа измерении в другом работе.

ON A ONE-DIMENSIONAL PROBLEM CONCERNING RANDOM SPACE FILLING

by

A. RÉNYI

Abstract

In the paper the following problem is solved: Let us place at random a unit interval on the interval $(0, x)$ (by this we mean that the centrum of the unit interval is a random point uniformly distributed in the interval $(^1/_2, x - ^1/_2)$. Let us place a second unit interval at random (in the same sense) independently from the first, on the interval $(0, x)$. If the second interval intersects the first, it is discarded, and the choice repeated until the two intervals do not intersect each other. The process is repeated in the same way, i. e. if already k (disjoint) unit intervals have been placed on the interval $(0, x)$, we choose at random an other interval, but retain it only if it does not intersect any of the previous intervals, otherwise the choice is repeated, etc. The process is finished, when there is no further possibility of placing still one unit interval so that it should not intersect any of the previously placed intervals. The number of unit intervals which can be thus placed

1) N. G. DE BRRUIJN указал на то что применяя её метод оценок остаточного члена в (7) может быть ешё улушен.

on the interval $(0, x)$, shall be denoted by ν_x · ν_x is clearly a random variable. Let us denote by $M(x)$ the mean value of ν_x. It is shown in the paper that $M(x)$ satisfies the functional equation

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt + 1 \tag{1}$$

and the initial condition $M(x) = 0$ for $0 \leqq x \leqq 1$. The values of $M(x)$ can be successively determined for the intervals $n \leqq x < n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ by means of (1). In the present paper the asymptotic behavour of $M(x)$ is investigated. Introducing the Laplace-transform

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)\,dx \ , \tag{2}$$

it is shown that $\varphi(s)$ is a solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d}{ds}\left(se^s \varphi(s)\right) = \varphi(s)\,(e^s - 2) - \frac{1}{s} \ . \tag{3}$$

It follows that

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}\int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) dt \ . \tag{4}$$

From (4) by a well-known Tauberian theorem it follows that

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = C \tag{5}$$

where

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\right) dt \sim 0{,}748 \ . \tag{6}$$

By a more thorough investigation of the inversion formula for Laplace-transforms it can be shown that[1)]

$$M(x) = Cx - (1 - C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{for all } n \ . \tag{7}$$

Moreover, it is also shown that ν_x/x tends stochastically to C for $x \to +\infty$. Finally recursive relations are given from which the probability distribution of ν_x may be also determined. The auther hopes to return to the analogous problem for any number of dimensions in an other paper.

[1)] N. G. DE BRUIJN pointed out that using his method the estimation of the remainder term in (7) can be made still sharper.