METEOROPATOLÓGIAI JELENSÉGEK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VIZSGÁLATÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

A meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál gyakran felmerül a következő probléma: Meghatározott $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ időpontokban bizonyos klimatikai jelenségek (pl. meteorológiai frontok) fordulnak elő. Ugyanakkor megfigyeljük, hogy $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ időpontokban bizonyos biológiai jelenségek (pl. balesetek) is történnek. Tegyük fel, hogy a klimatikai jelenségek adott α ideig éreztetik hatásukat. (A t_n időpontokat az α hosszúságú szakaszok középpontjainak tekintjük.) Megfigyelésünk egy rögzített $(0, T)$ időintervallumra vonatkozik. Kérdés, hogy a biológiai jelenségek a klimatikai jelenségek hatásának tulajdoníthatók-e?

A fent említett vizsgálatot rendszerint H. von Schelling [4] diagrammjának segítségével végzik el. Ebben a diagrammban fel van tüntetve, hogy a biológiai jelenségek előfordulási pontjai miként helyezkednek el az egyes klimatikai jelenségek előfordulási pontjaihoz viszonyítva. Ezen diagrammban szereplő adatok alapján történő kiértékelés matematikai módszereivel a szerző [5] dolgozatában foglalkozik. A gyakorlatban azonban Schellingétől különböző eljárások is használatosak az adatok ábrázolására. Ilyen eljárást alkalmaz Dr. Horváth László Gábor [2] munkájában. Ennél a módszernél minden egyes biológiai jelenség időpontja csak egyszer van feltüntetve, mégpedig a hozzá legközelebb eső klimatikai jelenség időpontjához viszonytott helyzetben. E dolgozat ezen módszer matematikai vizsgálatával foglalkozik.

A szerző köszönetét fejezi ki Dr. Horváth László Gábornak, a *Magyar Államvasutak Pályaalkalmassági Vizsgáló Állomása* igazgatójának azért, hogy erre a problémára szíves volt a figyelmét felhívni.

1. §. Feltevések

Miként korábbi [5] dolgozatunkban, most is kétféle modellt alkalmazunk a klimatikai jelenségek folyamatának leírására.

a) Feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ *eseménysorozat* λ *eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot.*

Ez a feltevés szemléletesen azt jelenti, hogy *bármely időponttól* számítva a korábban előforduló klimatikai jelenségek semmilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező klimatikai jelenségek előfordulási pontjaira, és a klimatikai jelenségek folyamata *bármely időponttól* számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

b) Feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ eseménysorozat rekurrens folyamatot alkot, amelynél a $t_{n+1} - t_n$ időkülönbségek egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelynek szórása véges.

Ez a feltevés szemléletesen azt jelenti, hogy *az egyes klimatikai jelenségek létrejötte után* a megelőző klimatikai jelenségek semmilyen hatást sem gyakorolnak a jövőben keletkező klimatikai jelenségek előfordulási pontjaira és a klimatikai jelenségek folyamata *az egyes klimatikai jelenségek előfordulásától* számítva ugyanazon sztochasztikus törvénynek van alávetve.

Megjegyezzük, hogy az *a)* modell a *b)* modellnek az a speciális esete, midőn $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$.

A vizsgálat egy meghatározott $(0, T)$ időintervallumra vonatkozik. A következőképpen járunk el. Feltesszük, hogy a klimatikai jelenségeknek nincsen hatásuk. Ebben az esetben a biológiai jelenségek előfordulási pontjaira vonatkozóan indokolt a következő feltevés:

c) Az $\{u_n\}$ eseménysorozat μ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot és független a $\{t_n\}$ sorozattól.

Ezután az *a)* és *c)*, illetve a *b)* és *c)* feltevések mellett megállapítjuk, hogy a $\{t_n\}$ pontok α hosszúságú környezetébe hány $\{u_n\}$ sorozathoz tartozó pont esése várható. Ha a ténylegesen észlelt pontok száma ennél jelentősen több, akkor beszélhetünk hatásról, különben pedig nem.

2. §. Eredmények

Jelölje a továbbiakban ν_T valószínűségi változó a $\{t_n\}$ pontok α hosszúságú környezetébe eső $\{u_n\}$ pontok számát abban az esetben, ha a függetlenség feltevésével élünk. A valóságban észlelt pontok számát pedig jelölje ν_T^*. Ekkor a hipotézisvizsgálat szokásos módszerét követve, a hatás nagyságát a $\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$ valószínűséggel mérjük.

Az *a)* modell esete. A ν_T valószínűségi változó várható értékére fennáll, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T} = M = \mu(1 - e^{-\lambda\alpha}) , \tag{1}$$

szórásnégyzetére pedig

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T} = D^2 = \mu\left\{(1 - e^{-\lambda\alpha}) + \frac{2\mu}{\lambda} e^{-\lambda\alpha}\left[1 - (1+\lambda\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}\right]\right\} . \tag{2}$$

Továbbá érvényes a következő határeloszlástétel:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leq x\right\} = \Phi(x) , \tag{3}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

Ha a vizsgált T időtartam alatt N_1 klimatikai jelenség és N_2 biológiai jelenség fordult elő, akkor az itt szereplő λ és μ ismeretlen paramétereket a következőképpen becsülhetjük meg:

$$\lambda \simeq \frac{N_1}{T} \quad \text{és} \quad \mu \simeq \frac{N_2}{T}.$$

Megjegyezzük, hogy a becslések pontossága T növekedésével együtt nő.

A fentiek alapján a következő kiértékelési módszert követhetjük. Meghatározzuk ν_T^* értékét és megbecsüljük M és D^2 értékét, amelyekre felírható, hogy

$$M \simeq \frac{N_2}{T}\left(1 - e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right) \tag{4}$$

és

$$D^2 \simeq \frac{N_2}{T}\left\{\left(1 - e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right) + \frac{2N_2}{N_1} e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\left[1 - \left(1 + \frac{N_1\alpha}{T}\right) e^{-\frac{N_1\alpha}{T}}\right]\right\}. \tag{5}$$

Ha T értéke ($1/\lambda$-hoz és $1/\mu$-höz képest) nagy, akkor a (3) határeloszlást tekinthetjük közelítő eloszlásnak és ennek alapján számíthatjuk ki a $\mathbf{P}\{\nu_T \leq \nu_T^*\}$ valószínűséget. Eszerint a

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right) \tag{6}$$

valószínűség lesz a hatás nagyságának mértékszáma. Minél közelebb áll ez az érték 1-hez, annál nagyobbnak tekinthetjük a klimatikai hatást.

A szereplő e^{-x} és $\Phi(x)$ függvények értékeit az 1. és 2. táblázat tartalmazza.

1. TÁBLÁZAT

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,1	0,90483742	0,01	0,99004983	0,001	0,99900050
0,2	0,81873075	0,02	0,98019867	0,002	0,99800200
0,3	0,74081822	0,03	0,97044553	0,003	0,99700450
0,4	0,67032005	0,04	0,96078945	0,004	0,99600799
0,5	0,60653066	0,05	0,95122942	0,005	0,99501248
0,6	0,54881164	0,06	0,94176453	0,006	0,99401796
0,7	0,49658530	0,07	0,93239382	0,007	0,99302444
0,8	0,44932896	0,08	0,92311635	0,008	0,99203121
0,9	0,40656966	0,09	0,91393119	0,009	0,99104038
1,0	0,36787944	0,10	0,90483742	0,010	0,99004983

2. TÁBLÁZAT

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,0	0,500000	2,0	0,977250	3,0	0,998650	4,0	0,999968
0,2	0,579260	2,1	0,982136	3,1	0,999032	4,1	0,999979
0,4	0,655422	2,2	0,986097	3,2	0,999313	4,2	0,999987
0,6	0,725747	2,3	0,989276	3,3	0,999517	4,3	0,999991
0,8	0,788145	2,4	0,991802	3,4	0,999663	4,4	0,999995
1,0	0,841345	2,5	0,993790	3,5	0,999767	4,5	0,999997
1,2	0,884930	2,6	0,995339	3,6	0,999841	4,6	0,999998
1,4	0,919243	2,7	0,996533	3,7	0,999892	4,7	0,999999
1,6	0,945201	2,8	0,997445	3,8	0,999928	4,8	0,999999
1,8	0,964070	2,9	0,998134	3,9	0,999952	4,9	1,000000

A *b)* **modell esete.** Jelölje most az $F(x)$ eloszlásfüggvény átlagát τ, szórását pedig σ. A ν_T valószínűségi változó várható értékére fennáll, hogy

$$(7) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T} = M = \frac{\mu}{\tau}\int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx ,$$

szórásnégyzetére pedig $F(\alpha) < 1$ esetén fennáll, hogy

$$(8) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T} = D^2 = \frac{\mu}{\tau}\int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx + \frac{\mu^2}{(a+b)^3}(a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2) ,$$

ahol

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)} , \qquad b = \frac{\int_0^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)}$$

és

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty} x\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 , \quad \sigma_b^2 = \frac{\int_0^{\alpha} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int_0^{\alpha} x\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 .$$

Továbbá ismét fennáll a következő határeloszlástétel

$$(9) \qquad \lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x) .$$

Ha a vizsgált T időtartam alatt N_1 klimatikai jelenség és N_2 biológiai jelenség fordult elő, akkor nagy T értékek esetén jó közelítéssel alkalmazhatjuk a

$$\tau^{-1} \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{és} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T}$$

becsléseket. Ezenkivül a klimatikai jelenségek folyamatából meg kell becsülni a σ^2 szórásnégyzetet és a

$$\int_0^a dF(x), \quad \int_0^a x\,dF(x), \quad \int_0^a x^2 dF(x)$$

integrálokat. Ha mindezen adatokat megbecsültük, akkor ezek segítségével M és D közelítő értéke meghatározható és az *a)* modellhez hasonlóan a hatás nagyságának mérésére ismét a

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right) \tag{10}$$

valószínűséget nyerjük.

3. §. Az állítások bizonyítása

Tekintsük a klimatikai jelenségek előfordulási pontjainak $\{t_n\}$ sorozatát. Fel van téve, hogy minden egyes klimatikai jelenség hatása egy α hosszúságú időintervallumra terjed ki, amely intervallumnak középpontja a klimatikai jelenség. Megállapodunk abban, hogy egy adott időpillanatban B állapotról beszélünk, ha ez az időpont klimatikai jelenség hatáskörébe esik, különben pedig A állapotról. Ezután összeszámláljuk azokat a $(0, T)$ időintervallumban előforduló biológiai jelenségeket, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn B állapot van. Ezek számát jelöli a ν_T valószínűségi változó. Megjegyezzük, hogy ha $F(\alpha) = 1$, akkor csak B állapot van és így minden pont számításba veendő. Ettől a nyilvánvaló esettől eltekintve fel fogjuk tenni, hogy $F(\alpha) < 1$.

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy az egymást követő A és B állapotok időtartamai független valószínűségi változók, mégpedig külön az A és külön a B állapotok időtartamai egyforma eloszlású változók. Ez a megállapítás mindkét modellre vonatkozik. Ezért csak a *b)* modellel fogunk foglalkozni. Az *a)* modell ebből speciális esetként adódik, ha $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$.

Jelölje az „A-szakaszok" hosszának eloszlásfüggvényét $G(x)$, a „B-szakaszok" hosszának eloszlásfüggvényét pedig $H(x)$. Ezek az eloszlásfüggvények könnyen megállapíthatók.

Igy a $G(x)$ eloszlásfüggvényre könnyen láthatóan fennáll, hogy

$$G(x) = \frac{F(x+\alpha) - F(\alpha)}{1 - F(\alpha)}, \quad \text{ha} \quad x \geqq 0. \tag{11}$$

Ennek átlaga

$$a = \frac{\int_\alpha^\infty [1 - F(x)]\,dx}{1 - F(\alpha)} = \frac{\int_\alpha^\infty x\,d\,F(x)}{1 - F(\alpha)} - \alpha,$$

amely véges, ha $\tau < \infty$, szórásnégyzete pedig

$$\sigma_a^2 = \frac{\int\limits_\alpha^\infty x^2 \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int\limits_\alpha^\infty x \, dF(x)^2}{1 - F(\alpha)} \right),$$

amely véges, ha $\sigma^2 < \infty$.

A $H(x)$ eloszlásfüggvényre viszont szintén könnyen láthatóan a következő integrálegyenlet írható fel:

$$H(x) = \begin{cases} 0 \,, \text{ ha } & x < \alpha . \\ 1 - F(\alpha) + \int\limits_0^\alpha H(x - y) \, dF(y) \,, \text{ ha } & x \geqq \alpha . \end{cases}$$

Ez megoldható Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával. Ily módon eljárva azt nyerjük, hogy

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx} \, dH(x) = \frac{[1 - F(\alpha)] \, e^{-s\alpha}}{1 - \int\limits_0^\alpha e^{-sy} \, dF(y)} . \tag{12}$$

Ebből adódik, hogy $H(x)$ átlaga

$$b = \frac{\int\limits_0^\alpha [1 - F(x)] \, dx}{1 - F(\alpha)} = \frac{\int\limits_0^\alpha x \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} + \alpha ,$$

szórásnégyzete pedig

$$\sigma_b^2 = \frac{\int\limits_0^\alpha x^2 \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int\limits_0^\alpha x \, dF(x)}{1 - F(\alpha)} \right)^2 ,$$

Jelölje most $\beta(T)$ valószínűségi változó a $(0, T)$ időközben B állapotban töltött időtartamot. A $\beta(T)$ valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére fennáll, hogy

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\mathbf{M}\{\beta(T)\}}{T} = \frac{b}{a + b} \tag{13}$$

és

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\beta(T)\}}{T} = \frac{a^2 \sigma_b^2 + b^2 \sigma_a^2}{(a + b)^3} . \tag{14}$$

(Vö. [6].) Nyilvánvaló, hogy rögzített $\beta(T)$ érték mellett a ν_T valószínűségi változó Poisson-eloszlást követ $\mu\beta(T)$ várható értékkel. Ekkor $\mathbf{M}\{\nu_T \mid \beta(T)\} = \mathbf{D}^2\{\nu_T \mid \beta(T)\} = \mu\beta(T)$. Következőleg a teljes várható érték-tétel alapján felírható, hogy

$$\mathbf{M}\{\nu_T\} = \mu \, \mathbf{M}\{\beta(T)\} ,$$

és innen (13) tekintetbevételével adódik, hogy

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\nu_T\}}{T}=\mu\frac{b}{a+b}\,, \tag{15}$$

ami igazolja az (1) és (7) képleteket. Továbbá felírható az is, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\nu_T\}=\mu\,\mathbf{M}\{\beta(T)\}+\mu^2\,\mathbf{D}^2\{\beta(T)\}\,,$$

és innen (13) és (14) tekintetbe vételével adódik, hogy

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\nu_T\}}{T}=\mu\frac{b}{a+b}+\mu^2\frac{(a^2\sigma_b^2+b^2\sigma_a^2)}{(a+b)^3}\,, \tag{16}$$

ami igazolja a (2) és (8) képleteket.

A (3), illetve (9) határértéktételek bizonyításához hivatkozunk [6] dolgozatunkra, amelyben kimutattuk, hogy fennáll a következő határeloszlástétel:

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta(T)-\dfrac{b}{a+b}T}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2\sigma_b^2+b^2\sigma_b^2}{(a+b)^3}\right)T}}\leqq x\right\}=\Phi(x)\,. \tag{17}$$

Viszont a ν_T változó rögzített $\beta(T)$ mellett Poisson-eloszlású $\beta(T)\mu$ várható értékkel és így, mint ismeretes, fennáll, hogy

$$\lim_{\beta(T)\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T-\beta(T)\mu}{\sqrt{\beta(T)\mu}}\leqq x\right\}=\Phi(x)\,. \tag{18}$$

Tekintetbe véve, hogy a ν_T valószínűségi változó csupán a $\beta(T)$ függvénye, a (17) és (18) képletek alapján R. L. Dobrusin [1] tételének felhasználásával arra jutunk, hogy

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T-\dfrac{b\mu T}{a+b}}{\sqrt{\left(\mu\dfrac{b}{a+b}+\mu^2\dfrac{(a^2\sigma_b^2+b^2\sigma_a^2)}{(a+b)^3}\right)T}}\leqq x\right\}=\Phi(x)\,,$$

ami igazolja a (3) és (9) határeloszlástételt (vö. még [7]).

4. §. Megjegyzés

Az eddigiekben pontszerű klimatikai jelenségeket tekintettünk. Feltételeztük, hogy mindegyik jelenségnek bizonyos hatóköre van és módszert adtunk annak eldöntésére, hogy beszélhetünk-e klimatikai hatásról vagy sem. Előfordulhat azonban, hogy ehelyett bizonyos klimatikai jelenség hatásának az intenzitása időről időre van megadva, azaz ismerünk bizonyos $\lambda(t)$ intenzitásfüggvényt ($0\leqq t\leqq T$) és el akarjuk dönteni, hogy az u_1, u_2, $\ldots$, u_n, $\ldots$ időpontokban előforduló biológiai jelenségek úgy tekinthetők-e, mint az említett klimatikai hatás következményei.

Ebben az esetben feltételezzük, hogy a biológiai jelenségek $\lambda(t)$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat eseményeivel egyeznek meg. Megállapítjuk, hogy ezen feltevés mellett milyen lesz a várható észlelés. Ha a tényleges észlelés ettől jelentéktelen eltérést mutat, akkor beszélhetünk hatásról, különben nem.

Képezzük a következő kifejezéseket: Legyen

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du, \qquad (0 \leq t \leq T)$$

és $\Lambda(T) = \Lambda$. Továbbá jelölje a $(0, t)$ időközben előforduló biológiai hatások számát $N(t)$, és legyen $N(T) = N$ a $(0, T)$ időközben előforduló összes biológiai hatások száma. Tekintsük továbbá az

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)x) - \Phi((2k-1)x)] \qquad (x \geq 0)$$

eloszlásfüggvényt, amelynek értékeit a 3. táblázat tünteti fel.

3. TÁBLÁZAT

x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)
0,30	0,000001	0,50	0,009157	0,70	0,102674	1,4	0,677027
0,32	0,000007	0,52	0,013287	0,75	0,142035	1,5	0,732785
0,34	0,000030	0,54	0,018514	0,80	0,185242	1,6	0,780806
0,36	0,000093	0,56	0,024911	0,85	0,230852	1,7	0,821739
0,38	0,000248	0,58	0,032523	0,90	0,277614	1,8	0,856279
0,40	0,000570	0,60	0,041362	0,95	0,324515	1,9	0,885134
0,42	0,001168	0,62	0,051414	1,00	0,370777	2,0	0,908999
0,44	0,002175	0,64	0,062637	1,10	0,459269	2,5	0,975161
0,46	0,003740	0,66	0,074973	1,20	0,540358	3,0	0,994600
0,48	0,006018	0,68	0,088348	1,30	0,612990	3,5	0,999069

A konfidencia-intervallumok szokásos eljárását követve a következőképpen járhatunk el. Kiszámítjuk a

$$\gamma_T = \sqrt{N} \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|\Lambda(t) - N(t)|}{\Lambda}$$

értéket és a hatás nagyságának mérésére az

$$1 - L(\gamma_T)$$

valószínűséget fogadjuk el.

A fenti módszer bizonyítására M. Kac [3] tételét használjuk fel. Eszerint, ha $R(x)$ egy tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény és véletlen elemszámú mintát tekintünk, ahol a minta elemeinek a száma Poisson-eloszlást követ ϱ várható értékkel és $R_\varrho(x)$ jelöli a minta x-nél kisebb elemei számának és ϱ-nak a hányadosát, akkor fennáll, hogy

$$\lim_{\varrho \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \max_{-\infty < y < \infty} |R(y) - R_\varrho(y)| < \frac{x}{\sqrt{\varrho}} \right\} = L(x) \qquad (x \geq 0) .$$

Most esetünkben a biológiai jelenségek előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mint az $R(x) = \Lambda(x)/\Lambda$ $(0 \leqq x \leqq T)$ folytonos eloszlásfüggvényű sokaságból vett véletlen számú minta elemei, ahol az elemek száma Poisson-eloszlást mutat. A Poisson-eloszlású változó várható értékének a becslésére pedig az N számot használhatjuk fel.

(Beérkezett: 1957. VIII. 31.)

IRODALOM

[1] Добрушин, Р. Л.: „Лемма о пределе сложной случайной функции". *Успехи Математических Наук СССР* **10**: 2 (1955) 157—159.
[2] Horváth, L.G.: „Az időjárás változások és az ipari balesetek". *Időjárás* **60** (1956) 88—96.
[3] Kac, M.: „On deviation between theoretical and empirical distribution". *Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A.* **35** (1949) 252—257.
[4] Schelling, H. von: „Die Bedeutung der statistischen Methodik für die Biologie". *Ergebnisse der Hygiene, Bakteriologie, Immunitätsforschung und Experimentelle Therapie* **24** (1941) 87—149.
[5] Takács L.: „Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása bizonyos meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál". *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 301—320.
[6] Takács, L.: „On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 169—191.
[7] Takács, L.: „On a generalization of the renewal theory". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 91—103.

О ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ ИССЛЕДОВАНИИ МЕТЕОРО-ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

L. TAKÁCS

Резюме

При исследовании метеоропатологических явлений часто встречается следующая задача: В определённых моментах времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ происходят некоторые климатические явления (например, метеорологические фронты). В то же время в моменты $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ происходят и некоторые биологические явления. Предположим, что климатические явления дают себя чувствовать в течении α времени. (Моменты t_n считаются серединами отрезков длины α.) Наблюдения относятся к определённому отрезку времени $(0, T)$. Спрашивается, с какой вероятностью можно утверждать, что биологические явления возникают под влиянием климатических явлений.

Автор в работе [5] изложил математический метод, основанный на диаграмме Schelling-а. Настоящая работа занимается математическим исследованием более просто осуществимого метода.

Предполагается, что для последовательности климатических явлений $\{t_n\}$ разности $t_{n+1} - t_n$ суть независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. После этого предполагается, что климатические явления не имеют последствий. Тогда можно предположить, что последовательность биологических явлений $\{u_n\}$ есть процесс

Poisson-a с плотностью событий μ, который не зависит от последовательности $\{t_n\}$. Пусть при таких обстоятельствах случайная величина ν_T обозначает число биологических явлений из интервалла (0, T), располагающихся в окрестности радиуса α климатических явлений. А фактически наблюдаемое число есть ν_T^*. Согласно привычному методу исследования гипотезы примем вероятность

$$\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$$

как меры влияния.

Доказывается, что имеет место

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

далее

$$M = \mu \frac{b}{a+b}$$

и

$$D^2 = \mu \frac{b}{a+b} + \mu^2 \frac{a^2 \sigma_b^2 + b^2 \sigma_a^2}{(a+b)^3} ,$$

где

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)} , \qquad b = \frac{\int_{0}^{\alpha} [1 - F(x)]\, dx}{1 - F(\alpha)}$$

и

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} x^2\, d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty} x d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 , \qquad \sigma_b^2 = \frac{\int_{0}^{\alpha} x^2 d\, F(x)}{1 - F(\alpha)} + \left(\frac{\int_{0}^{\alpha} x d\, F(x)}{1 - F(\alpha)}\right)^2 .$$

Найденное предельное распределение для больших значений T может быть принято в качестве приближённого распределения и тогда

$$\Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right)$$

является мерой того, что климатические явления оказывают влияние на моменты, в которых случаются биологические события.

Если, в частности, $\{t_n\}$ ест процесс Poisson-а с плотностью событий λ, т. е. если $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$, то

$$M = \mu (1 - e^{-\lambda \alpha})$$

и

$$D^2 = \mu \left\{ (1 - e^{-\lambda \alpha}) + \frac{2\mu}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} [1 - (1 + \lambda \alpha) e^{-\lambda \alpha}] \right\} .$$

Если за время T происходит N_1 климатических и N_2 биологических явлений, то параметры λ и μ могут быть оценены следующим образом

$$\lambda \cong \frac{N_1}{T} \quad \text{и} \quad \mu \cong \frac{N_2}{T} .$$

Работа, в заключение, исследует, могут ли биологические явления считаться следствиями кламатического явления, непрерывно протекающего с интенсивностью $\lambda(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$.

PROBABILISTIC TREATMENT OF METEOROPATHOLOGICAL PHENOMENA

by

L. TAKÁCS

Abstract

The following problem arises frequently in connection with the investigation of meteoropathological phenomena. Certain climatic phenomena (e. g. meteorological frontal passages) occur at the instants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ and certain biological phenomena occur at the instants $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Let us suppose that every meteorological front gives rise to an effect extended over an interval with length α. (Choose the instants t_n as the centres of the corresponding intervals.) The instants of the phenomena occurring in the time interval $(0, T)$ are given and it is to be decided in what degree the biological phenomena can be considered as an effect of the meteorological fronts.

Earlier the author [5] communicated a mathematical method based on the diagram of SCHELLING. Now an other mathematical method will be investigated which is based on a simpler procedure as that of SCHELLING.

We restrict ourselves to the case when the time differences $t_{n+1} - t_n$ are identically distributed independent, positive random variables with distribution function $F(x)$.

We suppose that the climatic phenomena have no effect. In this case it is reasonable to suppose that the sequence of the biological phenomena $\{u_n\}$ formsa Poisson process with density μ and $\{u_n\}$ is independent of the sequence $\{t_n\}$. Under these conditions denote by ν_T the number of those biological phenomena occurring in the time interval $(0, T)$ which are falling into the intervals corresponding to the meteorological phenomena. Further denote by ν_T^* the actually observed number of the mentioned biological phenomena. The probability $\mathbf{P}\{\nu_T \leqq \nu_T^*\}$ will be considered as a measure of the effect of the meteorological phenomena.

It is shown that

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_T - MT}{DT^{2/1}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,,$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,,$$

further

$$M = \mu\frac{b}{a+b}$$

and

$$D^2 = \mu\frac{b}{a+b} + \mu^2\frac{a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2}{(a+b)^3}\,.$$

with the notation

$$a = \frac{\int_{\alpha}^{\infty}[1-F(x)]\,dx}{1-F(\alpha)}\,,\qquad b = \frac{\int_{0}^{\alpha}[1-F(x)]\,dx}{1-F(\alpha)}$$

and

$$\sigma_a^2 = \frac{\int_{\alpha}^{\infty}x^2d\,F(x)}{1-F(\alpha)} - \left(\frac{\int_{\alpha}^{\infty}xd\,F(x)}{1-F(\alpha)}\right)^2,\qquad \sigma_b^2 = \frac{\int_{0}^{\alpha}x^2d\,F(x)}{1-F(\alpha)} + \left(\frac{\int_{0}^{\alpha}xd\,F(x)}{1-F(\alpha)}\right)^2.$$

If T is large enough, then the limiting distribution of ν_T can be considered as an approximative distribution of ν_T and in this case it can be written with good approximation:

$$\mathbf{P}\{\nu_T \leq \nu_T^*\} \simeq \Phi\left(\frac{\nu_T^* - MT}{DT^{1/2}}\right)$$

i. e. the right side of the above relation will be approximatively the measure of the effect of the meteorological phenomena.

If, particularly, $\{t_n\}$ forms a Poisson process with density λ, i. e. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$, then

$$M = \mu(1 - e^{-\lambda\alpha})$$

and

$$D^2 = \mu\left\{(1 - e^{-\lambda\alpha}) + \frac{2\mu}{\lambda}e^{-\lambda\alpha}\left[1 - (1 + \lambda\alpha)\,e^{-\lambda\alpha}\right]\right\}.$$

When N_1 climatic phenomena and N_2 biological phenomena occurred in the time interval $(0, T)$, then the parameters λ and μ can be estimated as follows:

$$\lambda \simeq \frac{N_1}{T} \quad\text{and}\quad \mu \simeq \frac{N_2}{T}\,.$$

Finally the problem is treated whether the biological phenomena can be considered as an effect of some climatical phenomena acting concontinuously with intensity $\lambda(t)$ $(0 \leq t \leq T)$.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllősy Károly
A kézirat beérkezett: 1958. VII. 10. — Példányszám: 1100. — Terjedelem: 11½ (A/5) ív
46203/58 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernáth György