REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, II.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

§ 1. Introduction

Dans l'article présent nous allons continuer l'examen de certaines relations qui lient entre elles les séries de Taylor des deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ régulières dans le cercle-unité et qu'on obtient l'une de l'autre par la transformation suivante

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right), \tag{1.1}$$

où $\zeta_0 \neq 0$ est un point intérieur du cercle $|z| < 1$. La relation (1.1) transforme la série de Taylor de

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.2}$$

en

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu . \tag{1.3}$$

Le problème qui nous occupe peut être formulé d'une manière générale comme suit : Si l'on connaît le comportement de la série (1.2) au point $z = 1$, quelle conclusion peut-on en tirer sur l'allure de la série (1.3) au point

$$z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0},$$

solution de l'équation

$$\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = 1\,?$$

Or, abstraction faite d'une déformation «modérée», les valeurs de la fonction $f_1(z)$ au voisinage du point $z = 1$ sont sensiblement les mêmes que celles de $f_2(z)$ prises au voisinage du point

$$z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0};$$

de plus le fait analogue subsiste quant à l'allure des valeurs de $f_1(z)$ et de

$f_2(z)$ pour chaque couple de points correspondants z_1 et z_2 situés sur la frontière du cercle $|z| \leqq 1$, à savoir tels que

$$z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} .$$

Supposons maintenant la série de Taylor de $f_1(z)$ convergente au point $z = 1$, donc $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$. Par conséquent, en évoquant le théorème de localisation de Riemann, on pourrait croire que la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

entraîne celle de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu .$$

Par contre, M. P. TURÁN a obtenu à ce sujet les résultats suivants [1] :

1. On peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que malgré la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu , \tag{1.4}$$

la série correspondante

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu \tag{1.5}$$

soit divergente.

2. Si la série (1.2) *est sommable au sens d'Abel au point $z = 1$, la série* (1.3) *possède la même propriété au point*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} ,$$

quelle que soit la fonction $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$.

Cette propriété particulière des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ nous a amené à continuer l'étude de ces questions, et en généralisant le résultat de M. TURÁN, nous avons démontré [2] le théorème suivant :

3. Pour chaque k entier positif on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que malgré la sommabilité (C,k) de la série (1.4), *la série* (1.5) *ne soit pas sommable (C,k).*

Le but de ces recherches précédentes était d'établir des relations entre des procédés de sommation d'un même type et du même ordre : c'est ainsi qu'on a trouvé des relations entre convergence et convergence, sommabilité Abel et sommabilité Abel, sommabilité (C, k) et sommabilité (C, k). Par la suite nous voudrions répondre à des questions qui concernent des procédés de sommation d'ordres différents. Notamment, nous nous proposons de décider si la convergence de la série (1.4) assure la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1.5), ou plus généralement si la sommabilité (C, k) de la série (1.4) entraîne la sommabilité $(C, k+1)$ de la série (1.5) pour des $k \geqq 0$ entiers. La réponse est affirmative.

Théorème : *Soient k un entier non négatif, $\zeta_0 \neq 0$ un point intérieur du cercle-unité, et*

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$, ayant encore la propriété que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

est sommable (C, k) au point $z = 1$. Alors la série déterminée par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$$

est sommable $(C, k+1)$ au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

et en outre la somme (C, k) de la première série est égale à la somme $(C, k+1)$ de la seconde.

Pour $k = 0$ nous obtenons un cas particulier important de ce théorème : *La convergence de la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

implique toujours la sommabilité $(C, 1)$ de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu,$$

et la somme de la première série est égale à la somme $(C, 1)$ de la seconde.

Dans la suite nous allons garder les notations employées dans la partie I de cet article (voir [2]). On désignera donc par $\alpha_n^{(k)}$ la n-ième moyenne (C, k) de la série (1.4) et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.5). Soient en outre, si ces deux limites existent,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)} = \alpha^{(k)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} = \beta^{(k)}. \tag{1.6}$$

Avec ces notations le théorème que nous venons d'énoncer s'exprime ainsi : l'existence de $\alpha^{(k)}$ entraîne toujours l'existence de $\beta^{(k+1)}$ et

$$\alpha^{(k)} = \beta^{(k+1)}. \tag{1.7}$$

L'idée de la démonstration est d'établir entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les $\beta_n^{(k+1)}$ une relation de la forme

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)}, \tag{1.8}$$

où $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ ne dépend pas du choix particulier de la fonction $f_1(z)$, mais seulement des quantités k, n, ν et ζ_0. La relation (1.8) définit un procédé de sommation à matrice $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ et nous vérifierons qu'elle satisfait aux conditions de la régularité de TOEPLITZ—SCHUR, donc $\beta^{(k+1)}$ existent et l'égalité (1.7) est vérifiée.

§ 2. Détermination du procédé de sommation

Dans la partie I (voir [2]) nous avons établi entre $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ la relation suivante :

$$\binom{n+k}{k}\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\,\alpha_\nu^{(k)}\ , \tag{2.1}$$

où

$$p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\right)^n \int\limits_{|\omega|=\varrho} \omega^\nu \left(\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}(1+\bar\zeta_0\,\omega)^{k-1}d\omega\ , \tag{2.2}$$

et ϱ est une constante, telle que $|\zeta_0| < \varrho < 1$ (voir [2], (2.14) et (2.15)).

D'autre part, selon la définition de $\beta_n^{(k+1)}$, on a

$$\begin{aligned}\beta_n^{(k+1)} &= \frac{\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{m+k}{k}\beta_m^{(k)}}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k}\alpha_\nu^{(k)}\left[\sum_{m=0}^{n} p_{m\nu}^{(k)}(\zeta_0)\right] = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\,\alpha_\nu^{(k)}\ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

En posant l'expression (2.2) de $p_{m\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ dans (2.3) et en faisant la somme de la série géometrique finie qui y figure, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\,\frac{1+\bar\zeta_0}{\binom{n+k+1}{k+1}}\times \\ &\times\int\limits_{|\omega|=\varrho}\binom{\nu+k}{k}\omega^\nu\frac{(1+\bar\zeta_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left[\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\,\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}-1\right]d\omega\end{aligned} \tag{2.4}$$

qui peut prendre aussi la forme

$$\begin{aligned}\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0}\right)^n\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\times \\ &\times\int\limits_{|\omega|=\varrho}\binom{\nu+k}{k}\omega^\nu\frac{(1+\bar\zeta_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left(\frac{1+\bar\zeta_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1}d\omega\ ,\end{aligned} \tag{2.5}$$

puisque la fonction

$$\omega^\nu \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}$$

est holomorphe dans le cercle $|\omega| = \varrho$.

La détermination de la matrice $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ est donc achevée. Nous avons trouvé deux formules différentes pour $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$: les expressions (2.4) et (2.5). Nous profiterons de toutes les deux. La formule (2.5) a l'avantage que la fonction qui y figure sous le signe d'intégrale n'a pas de pôle sur la frontière du cercle-unité, cette dernière peut donc être prise comme contour d'intégration au lieu du cercle $|\omega| = \varrho$.

Pour simplifier l'écriture nous introduisons encore certaines notations. Soient : $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \gamma_{n\nu}^{(k)}$;

$$\text{(2.6)} \qquad h_k(\omega) = \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left[\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\,\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} - 1\right] ;$$

$$\text{(2.7)} \qquad g(\omega) = \binom{\nu+k}{k}\,\omega^\nu\,\frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^k}{1-\omega}\left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} ;$$

$$\text{(2.8)} \qquad c_n^{(k)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^n .$$

On voit que

$$\text{(2.9)} \qquad |c_n^{(k)}| = \left|\frac{(1+\zeta_0)^{k+2}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}\right|$$

est une constante qui ne dépend ni de n ni de ν. Avec ces notations

$$\text{(2.10)} \quad \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i}\left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0}\right)^{n+1}\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\int\limits_{|\omega|=1}\binom{\nu+k}{k}\,\omega^\nu\,h_k(\omega)\,d\omega ,$$

ou

$$\text{(2.11)} \qquad \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i}\,\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\int\limits_{|\omega|=\varrho} g(\omega)\,d\omega .$$

§ 3. Les deux premières conditions de la régularité

Les conditions de la régularité de Toeplitz—Schur sont réalisées,

I. *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)} = 0$ *pour chaque* ν *fixé;*

II. *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{n\nu}^{(k)} = 1$;

III. *s'il existe une constante $K^{(k)}$ telle que l'inégalité*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K^{(k)}$$

soit toujours vérifiée indépendamment de n.

Dans ce § nous nous occupons seulement des deux premières conditions.

La condition I est réalisée.

Démonstration: Soit $R > 1$ une constante quelconque et considérons l'intégrale (2.11) en y remplaçant le chemin d'intégration $|\omega| = \varrho$ par celui de $|\omega| = R$. Dans ce dernier cercle, la fonction $g(\omega)$ a deux pôles : $\omega = -\zeta_0$ et $\omega = 1$, et par suite

$$\delta_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int\limits_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{c_n^{(k)}}{\binom{n+k+1}{k+1}} [\operatorname{Res} g(\omega)_{|\omega=-\zeta_0} + \operatorname{Res} g(\omega)_{|\omega=1}] =$$

$$(3.1) \qquad = \gamma_{n\nu}^{(k)} + c_n^{(k)} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0)^k \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0}\right)^{n+1} =$$

$$= \gamma_{n\nu}^{(k)} + \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{|1+\zeta_0|^{2(k+1)}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} .$$

Par conséquent

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} (\delta_{n\nu}^{(k)} - \gamma_{n\nu}^{(k)}) = 0 .$$

C'est donc la valeur absolue de l'intégrale

$$\int\limits_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega$$

que nous devons évaluer.

En tenant compte de (2.7) on a

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\omega|=R} g(\omega)\, d\omega \right| \leqq \\ &\leqq \binom{\nu+k}{k} R^{\nu+1} \max_{|\omega|=R} |1+\bar{\zeta}_0\omega|^k \max_{|\omega|=R} \frac{1}{|1-\omega|} \max_{|\omega|=R} \left| \frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0} \right|^{n+1} . \end{aligned}$$

Or, en posant $\omega = Re^{i\varphi}$, $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ il est facile de voir que

$$(3.4)\quad \begin{gathered} \max_{|\omega|=R} |1 + \bar{\zeta}_0 \omega| = 1 + rR , \quad \max_{|\omega|=R} \frac{1}{|1-\omega|} = \frac{1}{R-1} , \\ \max_{|\omega|=R} \left| \frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega + \zeta_0} \right| = \frac{1+rR}{R+r} . \end{gathered}$$

Des relations (3.1), (3.3) et (3.4) nous pouvons donc conclure que

$$(3.5)\qquad |\delta_{n\nu}^{(k)}| \leq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \frac{R^{\nu+1}}{R-1} (1+rR)^k \left(\frac{1+rR}{R+r}\right)^{n+1} ,$$

dont le membre droit tend vers zéro quand $n \to \infty$. Par conséquent l'expression (3.2) permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 0 .$$

La condition II est réalisée.

Démonstration: Nous allons démontrer que pour chaque n fixé:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 .$$

La condition II se trouve donc réalisée. En partant de la formule (2.5) on obtient

$$(3.6)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k}{(1-\omega)^{k+2}} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^{n+1} d\omega .$$

Posons ensuite $\omega = \dfrac{1}{u}$, (3.6) devient

$$(3.7)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = \frac{c_n^{(k)}}{2\pi i} \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}} \int_{|u|=\frac{1}{\varrho}} \frac{(1+\zeta_0 u)^k}{(u-1)^{k+2}} \left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k+1} du .$$

La fonction à intégrer n'a qu'un seul pôle $u = 1$ dans le cercle $|u| = 1/\varrho$, le théorème du résidu fournit donc la valeur de l'intégrale en question. Nous avons déjà déterminé cette intégrale (voir [2], (2.21) ou (2.22)) et nous avons trouvé que

$$(3.8)\quad \begin{aligned} &\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} \left[\left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 u}\right)^{n+k+1} (1+\zeta_0 u)^k \right] = \\ &= (n+k+1)(n+k)\dots(n+1) \frac{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}}{(1+\zeta_0 u)^{k+2}} \left(\frac{u+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0 k}\right)^n , \end{aligned}$$

d'où pour $u = 1$, en vertu de (3.7), on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 .$$

Remarque: M. J. Czipszer a démontré sans calcul direct par le choix particulier de la fonction $f_1(z)$ que les conditions I et II sont réalisées. La démonstration est la suivante:

1° Soit

$$f_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$$

une fonction pour laquelle $\alpha_\lambda^{(k)} = 0$, si $\lambda \neq \nu$, et $\alpha_\nu^{(k)} = 1$. De la suite des nombres $\alpha_\lambda^{(k)}$ on obtient a_μ par la formule

$$a_\mu = \sum_{\lambda=\mu-k-1}^{\mu} (-1)^{\mu-\lambda} \binom{k+1}{\mu-\lambda} \binom{\lambda+k}{k} \alpha_\lambda^{(k)}$$

([3], II. p. 71.) en prenant 0 pour les $\alpha_\lambda^{(k)}$, si λ est négatif; d'où, vu les valeurs particulières des $\alpha_\lambda^{(k)}$, on tire

$$a_\mu = (-1)^{\mu-\nu} \binom{k+1}{\mu-\nu} \binom{\nu+k}{k} ,$$

si $\nu \leqq \mu \leqq \nu + k + 1$, et $a_\mu = 0$ dans tous les autres cas. $f_1(z)$ est donc un polynôme, et à plus forte raison une fonction régulière sur le cercle fermé $|z| \leqq 1$, et de plus

$$f_1(1) = \lim_{\mu\to\infty} \alpha_\mu^{(k)} = 0 .$$

On en conclue que $f_2(z)$ est aussi régulière sur le même cercle fermé et sa série de Taylor tend vers zéro au point

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} ;$$

on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{(k)} = 0$. D'autre part

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{n\mu}^{(k)} \alpha_\mu^{(k)} = \gamma_{n\nu}^{(k)} ,$$

et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 0$.

2° Soit $f_1(z) \equiv 1$. Dans ce cas $\alpha_\nu^{(k)} = 1$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. $f_2(z) \equiv 1$, et $\beta_n^{(k)} = 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ainsi

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} \alpha_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)} = 1 .$$

§ 4. La troisième condition de la régularité

Pour démontrer l'existence d'une constante $K^{(k)}$ telle que l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K^{(k)} \tag{4.1}$$

soit toujours vérifiée indépendamment de n on procède par la décomposition en deux parties de la série qui figure dans l'inégalité (4.1) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| = \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \,, \tag{4.2}$$

où

$$\nu_0 = \lambda_0(n+1) \tag{4.3}$$

et λ_0 est une constante entière et positive, indépendante de n dont la valeur sera fixée plus tard. On démontrera l'existence de deux constantes $K_1^{(k)}$ et $K^{(k)}$ indépendantes de n pour lesquelles les inégalités

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} \,, \qquad \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}{}' |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_2^{(k)} \tag{4.4}$$

sont vérifiées.

Pour des raisons qui deviennent évidentes au cours de la démonstration, nous nous occupons d'abord de $K_2^{(k)}$.

1° Détermination de $K_2^{(k)}$. Il résulte de (2.11) que

$$|\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \tag{4.5}$$
$$\leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu+1} \max_{|\omega|=\varrho} |1+\bar{\zeta}_0\,\omega|^k \max_{|\omega|=\varrho} \frac{1}{|1-\omega|} \max_{|\omega|=\varrho} \left|\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0}\right|^{n+1} .$$

En posant $\omega = \varrho\, e^{i\varphi}$ et encore $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ il est simple de voir que

$$\max_{|\omega|=\varrho} |1+\bar{\zeta}_0\,\omega| = 1 + r\varrho \,, \quad \max_{|\omega|=\varrho} \frac{1}{|1-\omega|} = \frac{1}{1-\varrho} \,, \tag{4.6}$$

$$\max_{|\omega|=\varrho} \left|\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right| = \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} > 1 \,,$$

donc

$$|\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \binom{\nu+k}{k} \frac{\varrho^{\nu+1}}{1-\varrho} (1+r\varrho)^k \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} , \tag{4.7}$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} . \tag{4.8}$$

Or, en vertu de la troisième inégalité (4.6), le membre droit de l'expression (4.8) tend vers $+\infty$ avec n, et (4.8) ne fournit ainsi aucun renseignement utile. C'est pour cette raison que nous avons décomposé en deux parties la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| .$$

Au lieu de (4.8), considérons donc la relation suivante déduite de (4.7) :

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq \frac{|c_n^{(k)}|}{\binom{n+k+1}{k+1}} \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{\varrho - r} \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu} , \tag{4.9}$$

où ν_0 est défini par (4.3) et λ_0 reste encore indéterminé. Pour évaluer la somme qui intervient dans le membre droit de l'inégalité (4.9), nous appliquons la formule

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu} &= \binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{\nu_0+k}{k}} \varrho^{\nu-\nu_0} \leqq \\ &\leqq \binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu-\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu-\nu_0} = \frac{\binom{\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu_0}}{(1-\varrho)^{k+1}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

à cause de l'inégalité évidente

$$\frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{\nu_0+k}{k}} \leqq \binom{\nu-\nu_0+k}{k} , \quad (\nu \leqq \nu_0) .$$

Ainsi, de (4.9), (4.10) et (4.3) :

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \leqq |c_n^{(k)}| \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \left(\varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r}\right)^{n+1} . \tag{4.11}$$

On choisira λ_0 de telle façon que l'inégalité

$$\varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} < 1 \tag{4.12}$$

soit vérifiée. Il suffit de prendre

$$\lambda_0 = 1 + \left[\frac{\log \dfrac{\varrho-r}{1-r\varrho}}{\log \varrho} \right] \geqq 2 , \tag{4.13}$$

pour que l'inégalité (4.12) soit valable (on désigne par $[x]$ la partie entière du nombre x). La formule (4.3) détermine ν_0 aussi.

On vérifie encore sans difficulté la relation

$$\frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \leqq \frac{\lambda_0^k(k+1)}{n+1} \leqq \lambda_0^k(k+1) \ . \tag{4.14}$$

En effet, selon l'expression (4.13) on a $\lambda_0 > 1$, et ainsi

$$\frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{k+1}{n+1} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\nu_0+k-l}{n+1+k-l} =$$

$$= \frac{k+1}{n+1} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\lambda_0 + \dfrac{k-l}{n+1}}{1+\dfrac{k-l}{n+1}} \leqq \frac{\lambda_0^k(k+1)}{n+1} \ .$$

En tenant compte de (4.12) et (4.14) nous pouvons enfin écrire

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \lambda_0^k(k+1)\, |c_n^{(k)}| \frac{\varrho(1+r\varrho)^k}{(1-\varrho)^{k+2}} = K_2^{(k)} \ . \tag{4.15}$$

Nous avons déjà remarqué (voir (2.9)) que $|c_n^{(k)}|$ est indépendant de n, et en vertu de la formule (4.15), $K_2^{(k)}$ possède la même propriété.

2°. Détermination de $K_1^{(k)}$.[1] C'est cette partie de notre raisonnement où nous profitons de l'autre définition de $\gamma_{n\nu}^{(k)}$, de l'expression (2.4) respectivement (2.10). Remarquons encore que cette fois-ci $\nu < \nu_0$, et pour ces ν on a

$$\binom{\nu+k}{k} < \binom{\nu_0+k}{k} \ ,$$

ce qui permet d'écrire

$$|\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \left| \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0) \right| \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+1}{k+1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\omega|=1} \omega^\nu h_k(\omega)\, d\omega \right| , \tag{4.16}$$

où $h_k(\omega)$ est définie par la formule (2.6). En posant encore

$$\left| \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+1}} (1+\bar{\zeta}_0) \right| = C_1 \ ,$$

[1] Cette partie de la démonstration originelle, que nous avons faite en tenant compte de certaines considérations géometriques, a été remplacée par celle ci-dessus plus simple dont l'idée a été suggérée par M. A. RÉNYI.

et en considérant la formule (4.14), l'inégalité (4.16) prendra la forme

$$(4.17) \qquad |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < \frac{C_1 \lambda_0^k (k+1)}{n+1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\omega|=1} \omega^\nu h_k(\omega)\, d\omega \right| = \frac{C_1 \lambda_0^k (k+1)}{n+1} |\gamma_\nu^{(k)}| \; .$$

On reconnaît que les quantités $\gamma_\nu^{(k)}$ ne sont autres que les coefficients de Fourier de la fonction $h_k(\omega)$.

Appliquons ensuite l'inégalité de Cauchy:

$$(4.18) \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0 - 1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \right)^2 \leqq \nu_0 \sum_{\nu=0}^{\nu_0 - 1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}|^2 < \frac{C_1^2 \lambda_0^{2k+1} (k+1)^2}{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}|^2 \; ,$$

où nous avons tenu compte de (4.17).

D'autre part, en écrivant $\omega = e^{i\varphi}$, on a selon l'inégalité de Bessel

$$(4.19) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |h_k(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \; .$$

Or,

$$(4.20) \qquad |h_k(e^{i\varphi})| \leqq (1+r)^{2k} |h_0(e^{i\varphi})|^2 \; .$$

Il suffit donc d'évaluer l'intégrale

$$(4.21) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |h_0(e^{i\varphi})|^2 d\varphi \; .$$

Adoptons pour cela les notations suivantes:

$$(4.22) \qquad \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} = e^{-i\theta_0} \; , \qquad \frac{1+\bar{\zeta}_0 e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}+\zeta_0} = e^{i\theta} \; ,$$

d'où

$$e^{i\varphi} = \frac{1-\zeta_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0} \; , \qquad \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1}{1+\bar{\zeta}_0} \, \frac{e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0}{e^{i(\theta-\theta_0)}-1} \; ,$$

$$d\varphi = -\frac{(1-|\zeta_0|^2)\, d\theta}{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2} \; .$$

Il en résulte que

$$|h_0(e^{i\varphi})|^2 = \frac{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2}{|1+\zeta_0|^2} \, \frac{|e^{i(n+1)(\theta-\theta_0)}-1|^2}{|e^{i(\theta-\theta_0)}-1|^2} = \frac{|e^{i\theta}-\bar{\zeta}_0|^2}{|1+\zeta_0|^2} \, \frac{\sin^2 (n+1) \dfrac{\theta-\theta_0}{2}}{\sin^2 \dfrac{\theta-\theta_0}{2}} \; .$$

Posons ensuite

$$c = \frac{1 - |\zeta_0|^2}{|1 + \zeta|^2}$$

et (4.21) devient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_0(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \frac{c}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\sin^2(n+1)\dfrac{\theta-\theta_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta-\theta_0}{2}} \, d\theta = c(n+1) \, , \tag{4.23}$$

puisque la fonction à intégrer de la formule (4.23) n'est autre que le noyau de Fejér. Ainsi, vu les inégalités (4.19) et (4.20) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^{(k)}| \leqq c(n+1)(1+r)^{2k} \, . \tag{4.24}$$

De (4.18) et (4.24) nous obtenons

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| \right)^2 < C_1^2 \lambda_0^{2k+1} c(k+1)^2 (1+r)^{2k} = (K_1^{(k)})^2 \, ,$$

ou bien

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} \, . \tag{4.25}$$

On voit que $K_1^{(k)}$ est bien indépendant de n.

Enfin de (4.15) et de (4.25) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k)}| < K_1^{(k)} + K_2^{(k)} = K^{(k)} \, .$$

Ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 21 Juillet 1958.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Turán, P. : „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* 12 (1958) 19—26.

[2] Alpár, L. : „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I.". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 3 (1958) 1—12.

[3] Hobson, E. W. : *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, I., II.* Cambridge, at the University Press, 1926.

MEGJEGYZÉS A TAYLOR-SOR SZUMMABILITÁSÁRÓL A KONVERGENCIA-KÖRÖN, II.

ALPÁR L.

Kivonat

A cikk azoknak az összefüggéseknek a vizsgálatával foglalkozik, amelyek két, az egységkörben reguláris függvény $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Taylor-sorai között állnak fenn, ha $f_2(z)$-t az $f_1(z)$-ből a következő transzformációval nyerjük:

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right), \tag{1}$$

ahol $0 < |\zeta_0| < 1$ és a megfelelő Taylor-sorok

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2}$$

és

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu . \tag{3}$$

A bennünket foglalkoztató kérdés mármost általános alakjában így fogalmazható: Ha ismerjük a (2) sor viselkedését a $z = 1$ pontban, mit mondhatunk a (3) sor viselkedéséről a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban, amely a

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1$$

egyenlet megoldása. Azt várnók, hogy a két sor viselkedése lényeges eltérést nem mutat. Hiszen $f_1(z)$-nek a $z = 1$ pont környezetében felvett értékei egy „szelíd'' deformációtól eltekintve, nyilván azonosak az $f_2(z)$ függvénynek a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pont környezetében felvett értékeivel; sőt analóg tény áll fenn nyilván az $f_1(z)$ és $f_2(z)$ értékeinek viselkedésére bármely a $|z| = 1$ kör kerületére eső, megfelelő pontpárra, z_1- és z_2-re, amelyre ti.

$$z_1 = \frac{z_2-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z_2} .$$

Tegyük fel most, hogy $f_1(z)$ hatványsora a $z = 1$ pontban konvergens, akkor ebből az következik, hogy $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, tehát a Riemann-féle lokalizációs tételre gondolva, azt hihetnők, hogy a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor konvergenciája maga után vonja a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

sor konvergenciáját.

Ezzel szemben TURÁN PÁL bebizonyította [1] a következőket :

1. Található olyan $f_1(z)$ függvény, hogy a (2) sornak a $z = 1$ pontban való konvergenciája ellenére a (3) sor a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban divergens.

2. Bárhogyan adjuk is meg az $f_1(z)$ függvényt a (2) sor $z = 1$ pontbeli Abel-szummálhatóságából mindig következik a (3) sor

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontbeli Abel-szummálhatósága.

Mi viszont bebizonyítottuk [2] az 1. általánosításaként az alábbi tételt :

3. Bármely k pozitív egész számhoz található olyan $f_1(z)$ függvény, hogy a (2) sornak a $z = 1$ pontban való (C, k) szummabilitása ellenére a (3) sor nem (C, k) szummábilis a

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban.

A jelen dolgozatban az ilyen jellegű vizsgálatokat folytatva a következő ellenkező irányú tételt bizonyítottuk be :

4. *Legyen k nem-negatív egész szám. Ha az $f_1(z)$ függvény* (2) *Taylor-sora (C, k) szummábilis a $z = 1$ pontban, akkor az $f_2(z)$ függvény* (3) *Taylor-sora $(C, k+1)$ szummábilis a*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban és a két sor szummája egyenlő.

Ha $k = 0$, akkor ebből a következő speciális esetet nyerjük :

5. *Ha az $f_1(z)$ függvény* (2) *Taylor-sora konvergens a $z = 1$ pontban, akkor az $f_2(z)$ függvény* (3) *Taylor-sora $(C, 1)$ szummábilis a*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

pontban és a két sor szummája egyenlő.

A bizonyítás menete a következő : Jelentse $\alpha_n^{(k)}$ a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor, $\beta_n^{(k)}$ pedig a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

sor n-edik (C,k) közepét. Bebizonyítjuk, hogy az $\alpha_n^{(k)}$ és $\beta_n^{(k+1)}$ számok között a következő alakú kapcsolat áll fenn

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\, \alpha_\nu^{(k)} \quad , \tag{4}$$

ahol $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ az $f_1(z)$ speciális alakjától független, és csak n-től, ν-től, k-tól és ζ_0-tól függő mennyiség. A (4) összefüggés szummációs eljárást definiál, amelynek $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ mátrixáról megmutatjuk, hogy az kielégíti a permanencia Toeplitz—Schur-féle feltételeit, amiből már következik, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ létezik, akkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{(k+1)}$ is, és a két határérték egyenlő.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА TAYLOR-А НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, II.

L. ALPÁR

Резюме

Статья изучает зависимость между рядами Taylor-а регулярных в единичном круге функций $f_1(z)$, и $f_2(z)$, если $f_2(z)$ получается из $f_1(z)$ с помощью следующего преобразования:

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) \tag{1}$$

где $0 < |\zeta_0| < 1$, а соответствующие ряды Taylor-а суть

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2}$$

и

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu \ . \tag{3}$$

Интересующий нас вопрос в общем виде может быть сформулирован так: если известно поведение ряда (2) в точке $z = 1$, что можно сказать о поведении ряда (3) в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \ ,$$

являющейся решением уравнения

$$\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1 \ ?$$

Можно ожидать, что между поведением двух рядов не будет существенной разницы. Не обращая внимания на некоторую слабую деформацию — значения функции $f_1(z)$ в окружении точки $z = 1$ очевидно совпадают с значениями функции $f_2(z)$ в окружении точки

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0},$$

и очевидно аналогичный факт имеет место в поведении значений функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ для любой пары соответствующих точек z_1 и z_2 т. е. для которых

$$z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z_2},$$

лежащих на окружности круга $|z| = 1$. Предположим теперь, что степенный ряд функции $f_1(z)$ сходится в точке $z = 1$, то из этого следует, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, и думая на «локализационную теорему Римана» можно ожидать что из сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu.$$

Но P. Turán доказал в [1] следующее:

1. Существует такая функция $f_1(z)$, что несмотря на сходимость ряда (2) в точке $z = 1$ ряд (3) расходится в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

2. Как бы не задать функцию $f_1(z)$, из суммируемости по Abel-ю ряда (2) в точке $z = 1$ всегда следует суммируемость по Abel-ю ряда (3) в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

В работе [2] мы доказали, как обобщение теоремы 1., следующую теорему:

3. Для всех положительных целых чисел k существует такая функци $f_1(z)$, что несмотря на (C,k) суммируемость ряда (2) в точке $z = 1$, ряд (3) не (C,k) суммируем в точке

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}.$$

В настоящей работе продолжая исследования такого рода доказывается следующая теорема противоположного рода:

4. *Пусть k неотрицательное целое число. Если ряд Taylor-а* (2) *функции $f_1(z)$ (C,k) суммируем в точке $z = 1$, то ряд Taylor-а* (3) *функции $f_2(z)$ $(C,k+1)$ суммируем в точке*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

и суммы этих рядов совпадают.

Если $k = 0$, то отсюда получается следующий специальный случай:

5. *Если ряд Taylor-а* (2) *функции $f_1(z)$ сходится в точке $z = 1$, то ряд Taylor-а* (3) *функции $f_2(z)$ $(C,1)$ суммируем в точке*

$$z = \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$$

и суммы этих рядов совпадают.

Идея доказательства такова: Пусть $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ обозначает n-ые средние (C, k) рядов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^{\nu}$$

соответственно. Доказывается, что между $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k+1)}$ имеет место соотношение вида

$$\beta_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)\,\alpha_\nu^{(k)}\ , \tag{4}$$

где $\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ не зависит от $f_1(z)$, а лишь от n, ν, k и ζ_0. Соотношение (4) определяет некоторый сумматорный процесс, о матрице $[\gamma_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)]$ которого доказывается, что она удовлетворяет условию перманентности Toeplitz-а и Schur-а, что означает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ существует то и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^{(k+1)}$ существует и эти пределы совпадают.