

KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, III.

ÁDÁM ANDRÁS

Bevezetés

E dolgozatban kétpólusú gráfok és logikai műveletek összetartozásával foglalkozunk. Ezt a kapcsolatot mindig abban a (speciálisabb) felfogásban tekintjük, hogy egy gráf különböző éleihez különböző logikai változók tartoznak, azaz [7] terminológiájával élve „ismétlésnélküli rendszer”-eket vizsgálunk.

Az 1. §-ban összefoglaljuk a gráfelméleti és logikai előzményeket. Részben már itt, továbbá a 2. § elején vezetjük be a későbbiekben szükséges fogalmakat. A 2. § további részében a megelőző fogalom-alkotások többé-kevésbé nyilvánvaló következményeit rendszerezzük segédtételekké, hogy ezáltal a 2. § végén szereplő 1. tétel és a 3. §-ban kimondott fő eredményeink (2., 3., 4. tételek) könnyen elérhetőkké váljanak. E fő eredmények egy gráf éleinek közös soros, vagy párhuzamos komponensbe tartozására adnak oly elegendő és (a 4. tétel kivételével) szükséges feltételt, amely csupán a gráf által megvalósított logikai művelettel szorosan összefüggő fogalmakat tartalmaz.

Mint a 4. §-ban példával is megvilágítjuk, eredményeink konstruktív eljárást szolgáltatnak arra, hogy egy realizálható logikai művelet ismeretében a műveletet realizáló bármely gráf soros és párhuzamos előállítását, az éleknek az irreducibilis alkatrészekbe való osztályozását, és az irreducibilis alkatrészek által megvalósított logikai műveleteket meghatározzuk. A 4. § befejező részében a konstrukció néhány következményére utalunk.

1. §.

Mint a megelőző dolgozatokban, gráfon itt is véges gráfot értünk, amely a T_1 és T_2 tulajdonságokkal rendelkezik. [1] terminológiáját és eredményeit ismerteknek tételezzük fel. A [2] dolgozat eredményei közül csupán az 5. tételre hivatkozunk (78. oldal), amely a következőt mondja ki: ha egy irreducibilis gráf összes éleit két (idegen, nem üres) α_1, α_2 osztályba soroljuk, akkor van a gráfnak olyan pályája, amely tartalmaz α_1 -beli élt is, α_2 -beli, élt is. E tétel bizonyítása [2] részletesebb ismerete nélkül is megérthető.

Egy $\mathcal{G}$ gráf valamely pályájába tartozó élek halmazát $\mathcal{G}$ egy *pálya-halmazának* (röviden: P -halmazának) nevezzük. Egy $\mathcal{G}$ gráf éleinek valamely β halmazát $\mathcal{G}$ egy *bázisának* nevezzük, ha $\mathcal{G}$ bármely pályája tartalmaz legalább egy β -beli élt; és bármely β -beli élen átmegy $\mathcal{G}$ -nek olyan pályája, amely β -hoz tartozó más élt nem tartalmaz.

Egy $\mathcal{G}$ gráf összes éleinek halmazát $\varkappa$ -val fogjuk jelölni, $\varkappa$ részhalmazait általában $\varkappa'$ -vel, $\varkappa_1$ -gyel, $\varkappa_2$ -vel stb., csupán a P-halmazok és a bázisok jelölésére használjuk a π , illetve β betűket. A halmazelméleti egyesítést, metszet- és különbségképzést az ott szokásos $\cup$, $\cap$, $-$ jelekkel fejezzük ki; az üres halmazt a $\emptyset$ jellel jelöljük.

Egy $\mathcal{G}$ gráf élei legyenek $k_1, k_2, \dots, k_n$. Rendeljük hozzá a gráfhoz azt az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -változós logikai műveletet, amely pontosan akkor veszi fel értelmezési tartományának egy helyén az $\uparrow$ (igaz) értéket, ha van $\mathcal{G}$ -nek olyan P-halmaza, hogy a P-halmaz $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_m}$ éleinek megfelelő $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ változók mindegyike a tekintett helyen¹⁾ $\uparrow$. Könnyen belátható, hogy egy n élű gráfhoz rendelt n változójú logikai művelet valóban függ mindegyik változójától, továbbá, hogy monoton, azaz, ha a változók két érték-rendszerre csupán egyetlen x_i változó értékében különbözik, akkor nem fordulhat elő az, hogy a művelet értéke $x_i = \downarrow$ esetén $\uparrow$, és $x_i = \uparrow$ esetén $\downarrow$ legyen. (Az első állítás igazolásaként elég arra utalnunk, hogy ha valamely, a k_i élen átmenő pálya éleihez tartozó váltakozóknak az $\uparrow$, az összes többi változóknak a $\downarrow$ értéket tulajdonítjuk, akkor az x_i változó $\uparrow$ vagy $\downarrow$ voltától függően lesz $\uparrow$ vagy $\downarrow$ a művelet értéke. A monotonyságot az teszi nyilvánvalóvá, hogy egy változó igazsága tétele nem szűkíti a csupa $\uparrow$ értékű változóknak megfelelő élekből álló pályák halmazát.) Tekintsünk egy f logikai műveletet; ha egy $\mathcal{G}$ gráf élei sorszámozhatóak úgy, hogy a gráfhoz éppen ez az f művelet tartozzék, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ gráf *megvalósítja* vagy *realizálja* az f műveletet. Ha egy gráf realizál valamely f logikai műveletet, akkor pontosan azokat a műveleteket valósítja meg, amelyek f -ből változók permutációjával előállíthatóak. Ne tegyünk különbséget két logikai művelet között, ha csupán ebben az értelemben („lényegtelenül”) különböznek egymástól; ekkor a „gráf $\rightarrow$ művelet” hozzárendelés több-egyértelmű leképezéssé válik. Az ismétlésnélküli rendszerekkel foglalkozó vizsgálatok alapvető célja így fogalmazható meg: körülhatárolni ennek a leképezésnek pontos értékkészletét és jellemezni az értelmezési tartománynak a leképezéshez tartozó osztályozását (azt az osztályozást, amelynek két gráf akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha ugyanazt a műveletet valósítják meg). Az első kérdésről tudomásom szerint igen kevés eredmény ismeretes, a második problémát illetően [7] 5. tételét ismerem legmesszebb menő eredményként. A jelen dolgozat egy adott műveletből kiindulva, az azt realizáló gráfok szerkezetével foglalkozik.

Ismeretes, hogy egy monoton logikai műveletnek egyetlen (jól meghatározott) redukált diszjunktív normálformája van. (A műveletet kifejező bármely diszjunktív normálformára alkalmazva a matematikai logikában jól ismert egyszerűsítési lehetőségeket, végül ugyanaz az egyszerűsíthetetlen forma adódik.) Ugyanez igaz a konjunktív normálformákra is.²⁾

¹⁾ Másképp: tekintsük a gráfot elektromos hálózatnak, amelynek minden k_i élébe egy-egy érintkező van elhelyezve. Az x_i változó igaz volta jelentse azt, hogy a k_i élbe iktatott érintkező zárva van, és fordítva. A logikai művelet aszerint vegye fel az $\uparrow$ vagy $\downarrow$ értéket, hogy a változók szóbanforgó értékrendszere létrehoz-e a gráf kezdőpontja és végpontja között vezető összeköttetést.

²⁾ A nem monoton műveletek egyszerűsítési lehetőségeit bonyolultabb áttekinteni, erre vonatkozóan QUINE [4] dolgozatára utalunk. A monoton műveletek speciális esetének egységes tárgyalását nem ismerem, az ezekről felhasznált ismeretek az említett cikk, továbbá HORN [3] (5. lemma: 18. oldal), QUINE [5] (1. tétel) és JABLONSKIJ [9] (332–333. oldalak) dolgozatainak eredményei alapján könnyen összeállíthatók.

A $\mathcal{G}$ gráf összes éleinek halmaza legyen κ , a $\mathcal{G}$ -hez rendelt logikai művelet legyen f . Egy $\kappa_1 \subseteq \kappa$ halmazra vonatkozóan ekvivalens a következő három állítás:

- α) κ_1 pálya-halmaz;
 - β) ha pontosan a κ_1 -beli éleknek megfelelő változók igazak, akkor $f = \uparrow$, és ha tetszőleges κ_1 -beli él változóját hamissá változtatjuk (a többi változó értékét változtatlanul hagyva), akkor $f = \downarrow$;
 - γ) a κ_1 -beli éleknek megfelelő változók f redukált diszjunktív normálformájának egy tagját alkotják.
- (Egyrészt az $\alpha) \iff \beta)$ ekvivalencia nyilvánvaló, másrészt pedig a $\beta) \iff \gamma)$ ekvivalencia könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a redukált diszjunktív normálforma bármely tagja *negálatlan* változók konjunkciója, és bármely két különböző tagban fellépő változók halmazai nem állhatnak részhalmaz-kapcsolatban egymással.)

Szintén ekvivalens a következő három állítás:

- α) κ_1 bázis;
- β) ha pontosan a κ_1 -beli éleknek megfelelő változók hamisak, akkor $f = \downarrow$, és ha tetszőleges κ_1 -beli él változóját igazzá változtatjuk, akkor $f = \uparrow$;
- γ) a κ_1 -beli éleknek megfelelő változók f redukált konjunktív normálformájának egy tagját alkotják.

2. §.

Egy $\mathcal{G}$ gráf két élére legyen $\varrho_1(k_1, k_2) = \uparrow$, ha van $\mathcal{G}$ -nek olyan P-halmaza, amely mind k_1 -et, mind k_2 -t tartalmazza.

Egy $\mathcal{G}$ gráf két élére legyen $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, ha van $\mathcal{G}$ -nek olyan bázisa, amely mind k_1 -et, mind k_2 -t tartalmazza.

Legyen a $\mathcal{G}$ gráf összes éleinek halmaza κ . Legyen $\kappa_1 \subseteq \kappa$, $\kappa_2 \subseteq \kappa$ és $\kappa_1 \cap \kappa_2 = \emptyset$. Ekkor $\sigma(\kappa_1, \kappa_2)$ legyen akkor és csak akkor igaz, ha $\mathcal{G}$ -nek bármely π_1 és π_2 P-halmazaira a $(\kappa_1 \cap \pi_1) \cup (\kappa_2 \cap \pi_2)$ halmaz előáll $(\kappa_1 \cup \kappa_2) \cap \pi_i$ alakban $\mathcal{G}$ -nek alkalmas π_i P-halmazával.

$\varepsilon_1(k_1, k_2)$, $\varepsilon_2(k_1, k_2)$ és $\varepsilon_3(k_1, k_2)$ jelentsék rendre a ϱ_1 és ϱ_2 relációk, valamint a ϱ_1 reláció negációja által indukált ekvivalencia-relációkat ([6], 2. tétel, 20. oldal értelmében). Jelentse ϱ'_1 a $\mathcal{G}$ gráf $\mathcal{G}'$ komponensében értelmezett ϱ_1 relációt. (Ezzel a jelölésmóddal később is fogunk élni.)

1. segéd-tétel. Legyen $\mathcal{G}$ párhuzamosan reducibilis gráf. Ekkor

- (1) $\mathcal{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_1 reláció mindig hamis;
- (2) $\mathcal{G}$ egy rögzített $\mathcal{G}'$ komponensének két k_α , k_β élére $\varrho_1(k_\alpha, k_\beta) = \varrho'_1(k_\alpha, k_\beta)$;
- (3) $\mathcal{G}$ összes komponenseinek válasszuk egy-egy bázisát, ezek egyesítése $\mathcal{G}$ egy bázisát alkotja, és $\mathcal{G}$ összes bázisai előállnak így módon;
- (4) $\mathcal{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_2 reláció mindig igaz; végül
- (5) $\mathcal{G}$ él-párjaira az ε_2 és ε_3 relációk mindig igazak.

Az 1. segéd-tétel állításainak bizonyítása gyanánt elég arra utalnunk, hogy $\mathcal{G}$ bármely P-halmaza $\mathcal{G}$ valamely párhuzamos komponensének P-halmaza; valamint arra, hogy — mint a bázisok és a redukált konjunktív nor-

málforma közötti kapcsolatból látható — $\mathfrak{G}$ bármely éle benne van $\mathfrak{G}$ valamely bázisában.

2. segédtétel. Legyen $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf. Ekkor

- (1) $\mathfrak{G}$ összes komponenseinek válasszuk egy-egy P -halmazát, ezek egyesítése $\mathfrak{G}$ egy P -halmazát alkotja, és $\mathfrak{G}$ összes P -halmazai előállnak ily módon;
- (2) $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére a ϱ_1 reláció mindig igaz;
- (3) $\mathfrak{G}$ bármely bázisa $\mathfrak{G}$ valamely komponensének bázisa, és megfordítva;
- (4) $\mathfrak{G}$ valamely $\mathfrak{G}$ komponensének két k_α és k_β élére $\varrho_1(k_\alpha, k_\beta) = \varrho_1'(k_\alpha, k_\beta)$ és $\varrho_2(k_\alpha, k_\beta) = \varrho_2'(k_\alpha, k_\beta)$;
- (5) $\mathfrak{G}$ él-párojaira az ε_1 reláció mindig igaz.

Bizonyításra csupán a (3) állítás szorul. Legyen β valamely bázisa $\mathfrak{G}$ -nek. Első célunk kimutatni, hogy β élei $\mathfrak{G}$ -nek egyetlen soros $\mathfrak{G}'$ komponensében helyezkednek el. Egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy $\mathfrak{G}$ két $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ komponensből áll (az alkalmazott módszerrel a bizonyítás az általános esetben is végrehajtható), ezek éleinek halmaza legyen κ' és κ'' , az őket szétválasztó pont legyen A . Ha mind $\beta \cap \kappa'$, mind $\beta \cap \kappa''$ bővebbek volnának az üres halmaznál, akkor léteznének (a bázisok értelmezése miatt) olyan a és b pályák, amelyek közül a nem megy át $\beta \cap \kappa'$ egy élén sem, b pedig nem megy át $\beta \cap \kappa''$ egy élén sem; de ekkor az $a[PA] \cdot b[AQ]$ pálya β egy élén sem menne át, ami ellentmond a bázis fogalmának. A (3) állítás további részei a tétel (1) állításából közvetlenül adódnak.

3. segédtétel. A $\mathfrak{G}'$ gráf legyen soros komponense a $\mathfrak{G}$ gráfnak. κ és κ' legyen $\mathfrak{G}$, illetve $\mathfrak{G}'$ éleinek halmaza. Ekkor $\sigma(\kappa', \kappa - \kappa') = \uparrow$.

E segédtétel következik a 2. segédtétel (1) állításából és a σ reláció értelmezéséből.

1. tétel. A $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf legyen soros komponense a $\mathfrak{G}$ gráfnak. κ és κ' legyen $\mathfrak{G}$, illetve $\mathfrak{G}'$ éleinek halmaza. Ekkor a $\emptyset \subset \kappa_1 \subseteq \kappa'$ feltételt kielégítő κ_1 halmazokra a következő három állítás ekvivalens:

- $\alpha)$ $\kappa_1 = \kappa'$
- $\beta)$ $\sigma(\kappa_1, \kappa - \kappa_1) = \uparrow$
- $\gamma)$ $\sigma'(\kappa_1, \kappa' - \kappa_1) = \uparrow$.

Bizonyítás. 1. Ha $\alpha)$ nem teljesül, akkor $\gamma)$ nem teljesül. Ekkor ugyanis $\kappa' - \kappa_1$ nem üres halmaz, így az 1. § elején említett tétel következtében van olyan a pályája $\mathfrak{G}'$ -nek, amely κ_1 -beli élt is tartalmaz, $(\kappa' - \kappa_1)$ -beli élt is. Legyen A az a pálya első olyan pontja, hogy a -nak A -ból kiinduló két éle közül pontosan az egyik κ_1 -beli. (A belső pontja a $\mathfrak{G}'$ gráfnak.) Legyen b olyan pályája $\mathfrak{G}'$ -nek, amely A -n nem megy át; legyenek π_1 és π_2 az a , illetve b pályák él-halmazai. Ekkor a $(\pi_1 \cap \kappa_1) \cup (\pi_2 \cap (\kappa' - \kappa_1))$ halmaz az A pontból kiinduló élek közül pontosan egyet tartalmaz, tehát nem lehet P -halmaza $\mathfrak{G}'$ -nek.

2. Ha $\alpha)$ teljesül, akkor a 3. segédtétel szerint $\beta)$ teljesül.

3. Ha $\beta)$ teljesül, akkor $\gamma)$ teljesül. Ugyanis $\mathfrak{G}'$ tetszőleges két π_1' és π_2' P -halmaza kiegészíthető $\mathfrak{G}$ -nek egy-egy π_1 és π_2 P -halmazává, a $\beta)$ állítás miatt létező π_i P -halmazzal kielégül a $(\kappa_1 \cap \pi_1) \cup ((\kappa - \kappa_1) \cap \pi_2) = \kappa \cap \pi_i$ egyenlőség, amelynek mindkét oldalát κ' -vel metszve a

$$(\kappa_1 \cap \pi_1') \cup ((\kappa' - \kappa_1) \cap \pi_2') = \kappa' \cap (\pi_1 \cap \kappa')$$

egyenlőséget kapjuk, ahol $\pi_i \cap \kappa'$ a 2. segédétel (1) állítása szerint pályája $\mathfrak{G}'$ -nek.

3. §.

2. tétel. *A $\mathfrak{G}$ párhuzamosan reducibilis gráf két k_α, k_β élére $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ akkor és csak akkor igaz, ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$ -nek ugyanabban a párhuzamos komponensében vannak. Párhuzamosan irreducibilis gráf bármely él-párjára az ε_1 reláció igaz.*

Bizonyítás. A tétel „csak akkor” állítását az 1. segédétel (1) állítása biztosítja. A tétel második mondatának helyességét a bizonyítás hátralevő része külön utalás nélkül is világossá teszi. Az „akkor” állítás igazolásában hivatkozunk az 1. segédétel (2) állítására. Ha $\mathfrak{G}$ -nek k_α -t és k_β -t tartalmazó $\mathfrak{G}'$ komponense sorosan reducibilis, akkor a 2. segédétel (5) állítása máris teljessé teszi a bizonyítást. Ha pedig $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf, akkor van olyan ($\mathfrak{G}'$ -nek P' kezdőpontját és Q' végpontját belső pontként nem tartalmazó) út, amelynek élei rendre $k_\alpha = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n = k_\beta$. Bármely k_i, k_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) él-párra legyen a a k_i élen, b pedig a k_{i+1} élen átmenő pálya. Legyen k' a első éle, k'' pedig b utolsó éle. Nyilván $\varrho'_1(k_i, k') = \varrho'_1(k_{i+1}, k'') = \uparrow$. Másrészt mind a , mind b átmegegyezik k_i és k_{i+1} közös végpontján, tehát a és b nem idegenek egymástól; legyen A a első olyan belső pontja, amely pontja b -nek is. Létezik az $a[P'A] \cdot b[AQ']$ pálya, tehát $\varrho'_1(k', k'') = \uparrow$. Az eddigi eredmények összevetése alapján $\varepsilon'_1(k_i, k_{i+1}) = \varepsilon_1(k_i, k_{i+1}) = \uparrow$, tehát $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.

3. tétel. *A $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf két k_α, k_β élére $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ akkor és csak akkor igaz, ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$ -nek ugyanabban a soros komponensében vannak. Sorosan irreducibilis gráf bármely él-párjára az ε_2 reláció igaz.*

A bizonyításban most is elég a tétel első mondatának igazolására szorítkoznunk. A tétel „csak akkor” állítását az biztosítja, hogy a 2. segédétel (3) állításából következően $\mathfrak{G}$ két különböző komponensének egy-egy élére ε_2 mindig hamis. Az „akkor” állítás igazolásában hivatkozunk a 2. segédétel (4) állítására. Ha $\mathfrak{G}$ -nek a k_α -t és k_β -t tartalmazó $\mathfrak{G}'$ komponense párhuzamosan reducibilis, akkor az 1. segédétel (4) állítása máris teljessé teszi a bizonyítást. Ha pedig $\mathfrak{G}'$ irreducibilis gráf, annak lehetetlenségét kell igazolnunk, hogy $\mathfrak{G}'$ éleinek halmazát az ε'_2 ekvivalencia-reláció egynél több részhalmazra bontsa. Legyen κ_1 $\mathfrak{G}'$ éleinek egy osztálya az ε'_2 által létesített osztályozásnál, legyen $\kappa_2 (\neq \emptyset)$ $\mathfrak{G}'$ többi éleinek halmaza. A $\mathfrak{G}'$ -hez rendelt logikai művelet redukált konjunktív normálformáját ekkor $f_1[\kappa_1] \cdot f_2[\kappa_2]$ alakban írhatjuk. (A konjunkciót szorzásként jelöltük. A $[\kappa_1]$ szimbólum azt jelenti, hogy az f_1 logikai művelet csupán a κ_1 osztályba sorolt éleknek megfelelő változóktól függ.) Az f_1 és f_2 műveleteket külön-külön alakítsuk át redukált diszjunktív normálformákká. A „beszorzás” elvégzésével — külön egyszerűsítés nélkül — a $\mathfrak{G}'$ gráfhoz rendelt logikai művelet redukált diszjunktív normálformáját kapjuk. A redukált diszjunktív normálforma tagjai és a P-halmazok közötti kapcsolat alapján bármely $(\kappa_1 \cap \pi_1) \cup (\kappa_2 \cap \pi_2)$ halmaz P-halmaza a $\mathfrak{G}'$ gráfnak, tehát az 1. tételben tekintett tulajdonságok közül γ) teljesül, α) nem, ami ellentmondás.

4. tétel. *Legyen $\mathfrak{G}$ sorosan reducibilis gráf. Ha $\mathfrak{G}$ -nek két k_α, k_β élére $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$, akkor k_α és k_β $\mathfrak{G}$ ugyanazon komponensébe tartozó élek. Ha k_α és k_β $\mathfrak{G}$ -nek ugyanazon, párhuzamosan reducibilis komponensébe tartozó élek, akkor $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.*

Bizonyítás gyanánt elég egyrészt a 2. segédétel (2) állítására, másrészt a 2. segédétel (4) és az 1. segédétel (5) állításaira hivatkozunk.

4. §.

Tekintsünk egy monoton, minden változójától függő f logikai műveletet. Legyen $\mathcal{G}$ olyan gráf, amely az f műveletet valósítja meg, jelöljük $\mathcal{G}$ éleit egy alkalmas sorszámozás szerint. Az előző paragrafus eredményeinek ismeretében megállapíthatjuk, mely élek alkotják $\mathcal{G}$ egy-egy irreducibilis alkatrészét, és ezek az alkatrészek milyen logikai műveleteket kötelesek megvalósítani. (Az eljárás alkalmazásakor feltételezzük, hogy van olyan $\mathcal{G}$ gráf, amely az f logikai műveletet realizálja. Ez a feltevés nem mindig jogos, pl. az $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ művelet egy gráfhoz sincs hozzárendelve. Ha a feltevésünk helytelen, annak hatása abban mutatkozik meg, hogy az irreducibilis alkatrészek számára adódó műveletek legalább egyike megvalósíthatatlan.)

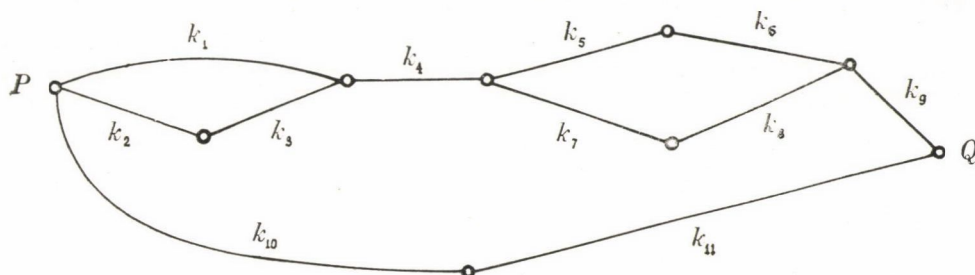
Az eljárás gyakorlati alkalmazására vizsgáljuk azt a $\mathcal{G}$ gráfot, amely a következő 11 változós (rögtön redukált diszjunktív normálformában adott) logikai műveletet realizálja:

$$x_1x_4x_5x_6x_9 \vee x_1x_4x_7x_8x_9 \vee x_2x_3x_4x_5x_6x_9 \vee x_2x_3x_4x_7x_8x_9 \vee x_{10}x_{11}.$$

Első lépésként az ε_1 reláció alkalmazásával megállapítjuk, párhuzamosan reducibilis-e a $\mathcal{G}$ gráf. (2. tétel.) Melyek az ε_1 reláció által létesített osztályozásnál k_1 -gyel megegyező osztályba sorolt élek? Ezeknek felsorolását a k_1 -gyel közös pályába tartozó élekkel kezdhetjük: $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9, k_7, k_8, \dots\}$. Ezután a k_4 éllel ϱ_1 relációban álló (még nem szereplő) élekkel bővítjük a halmazt: $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9, k_7, k_8, k_3, k_2, k_3, \dots\}$. További vizsgálat alapján sem tudjuk a még hiányzó k_{10} és k_{11} éleket ugyanebbe az osztályba sorolni, tehát $\mathcal{G}$ párhuzamosan reducibilis, és egyik $\mathcal{G}_1$ komponense pontosan a $k_1, k_2, k_3, \dots, k_9$ éleket tartalmazza. Másrészt k_{10} és k_{11} közös $\mathcal{G}_2$ komponenst alkotnak (mivel $\varrho_1(k_{10}, k_{11}) = \uparrow$, így $\varepsilon_1(k_{10}, k_{11}) = \uparrow$), $\mathcal{G}_2$ -nek egy P-halmaz van: $\{k_{10}, k_{11}\}$, tehát ez a két él sorosan van kapcsolva. A $\mathcal{G}_1$ komponens P-halmazai: $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_9\}$, $\{k_1, k_4, k_7, k_8, k_9\}$, $\{k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_9\}$, $\{k_2, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9\}$.

Következő feladatunk a $\mathcal{G}_1$ gráf soros felbonthatóságát megvizsgálni, a soros komponenseket elkülöníteni. Két módszer áll rendelkezésünkre: dolgozhatunk az ε_2 reláció (3. tétel), vagy az ε_3 reláció alkalmazásával. Az ε_2 reláció biztosan az élek kívánt osztályozását szolgáltatja, azonban használata ellen kényelmi szempontok szólnak: ha ezzel a módszerrel dolgozunk, akkor el kell végezni a diszjunktív és konjunktív normálformák egymásba való átalakítását. Az ε_3 reláció alkalmazásakor erre nincs szükség, viszont nem mindig érünk el pontos eredményt: ha a gráf valamely komponense nem bontható tovább (párhuzamosan), akkor az ε_3 relációnál a szóbanforgó komponens élei több osztályba sorolódhatnak. (4. tétel.) Arra, hogy melyik úton célsrűbb tovább folytatnunk az eljárást, nehéznek látszik általános szabályt megadni; némely esetben előnyös lehet a két módszer következő kombinálása: először az ε_3 relációval osztályozzuk a gráf éleit, majd a σ reláció alkalmazásával (3. segédétel és 1. tétel) a kapott osztályok mindegyikére eldöntjük, hogy az az osztály egy soros komponens összes éleit tartalmazza-e. Az ε_2 relációval azoknak a $\varkappa'$ osztályoknak egyesítési halmazát bontjuk tovább, amelyekre $\sigma(\varkappa', \varkappa - \varkappa') = \downarrow$ (ha ilyen osztályt egyáltalán találunk). ($\varkappa$ -val $\mathcal{G}_1$ éleinek halmazát jelöltük).

Alkalmazzuk a $\mathcal{G}_1$ gráf éleire az ε_3 relációt. A következő él-halmazokat kapjuk: $\pi_1 = \{k_1, k_2, k_3\}$, $\pi_2 = \{k_4\}$, $\pi_3 = \{k_5, k_6, k_7, k_8\}$, $\pi_4 = \{k_9\}$. Vajon soros komponens-e π_1 ? $\pi_i \cap \pi_1$ alakban előálló halmazok: $\{k_1\}$ és $\{k_2, k_3\}$. $\pi_i \cap (\pi - \pi_1)$ alakban előálló halmazok: $\{k_4, k_5, k_6, k_7, k_8\}$ és $\{k_9\}$; összehasonlítva az ezekből képezhető egyesítési halmazokat $\mathcal{G}_1$ P-halmazai-val, $\sigma(\pi_1, \pi - \pi_1) = \uparrow$; tehát π_1 élei $\mathcal{G}_1$ -nek pontosan egy soros komponensét alkotják. További vizsgálatunkban elég a $\pi_2 \cup \pi_3 \cup \pi_4$ halmazra szorítkoznunk; mind π_2 , mind π_3 , mind π_4 soros komponensnek adódik.



1. ábra.

(Az ε_2 reláció alkalmazására tehát nincs szükség.) (A π_2, π_3, π_4 halmazok vizsgálatát tetszőleges sorrendben végezhetjük, a soros komponensnek bizonyult halmazt „leválaszthatjuk” úgy, mint előbb π_1 -et.) A további elemzéssel a $\mathcal{G}$ gráf szerkezete az 1. ábrán láthatónak adódik. (A sorosan kapcsolt komponensek sorrendjét önkényesen vettük fel.)

Annak az esetnek a megvilágítására, mikor (egynél több élű) irreducibilis gráfok is fellépnek egy sorosan kapcsolt gráf komponenseiként, nem közlünk példát, hiszen egyrészt a látott példa jól illusztrálja a gyakorlatban követendő módszert, másrészt pedig az említett gráfok pályáinak száma elég nagy, így érdekességével arányban nem álló terjedelmű lenne a részletes analízis. (A [2] bevezetésében ábrázolt egyszerű irreducibilis gráfoknak 6, 4, illetve 8 pályája van, a sorbakapcsolásnál szorozódik a pályák száma. Érdeemes megjegyeznünk, hogy az említett irreducibilis gráfok éleit az ε_3 reláció 4, 3, illetve 6 osztályba sorolja.)

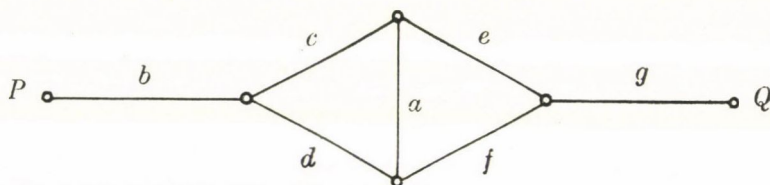
Konstrukciónkból világos a következő állítás, amely egyébként speciális esete TRAHTENBROT már említett tételének. ([7], 5. tétel.) *Egy logikai művelet egyértelműen meghatározza azt, hogy a műveletet realizáló bármely gráf hogyan áll elő soros és párhuzamos kapcsolások alkalmazásával a két kapcsolási módra nézve irreducibilis alkatrészekből, és hogy ezek az alkatrészek milyen logikai műveleteket kötelesek megvalósítani.* (Az egyértelműséget a soros kapcsolás kommutativitásától eltekintve értjük.) További specializálással a következő állításhoz jutunk: ha a $\mathcal{G}'$ és $\mathcal{G}''$ kétpólusú gráfok élei $k'_1, k'_2, \dots, k'_n$ illetve $k''_1, k''_2, \dots, k''_n$, és a gráfok pontosan egyike tartalmaz kettős élt,³⁾ akkor a $\mathcal{G}'$ -hez illetve $\mathcal{G}''$ -hez rendelt $f'(x_1, \dots, x_n)$ és $f''(x_1, \dots, x_n)$ logikai műve-

³⁾ Azaz a gráfok pontosan egyike állítható elő egy élű kétpólusú gráfokból soros és párhuzamos kapcsolásokkal.

letek különbözőek. Dolgozatunk utolsó célja ezt a tényt tisztán gráfelméleti eszközökkel kimondani és igazolni.

5. tétel. Legyen a $\mathfrak{G}'$ gráf éleinek halmaza κ' , és a $\mathfrak{G}''$ gráf éleinek halmaza κ'' . Ha $\mathfrak{G}'$ tartalmaz kettős élt, és $\mathfrak{G}''$ nem tartalmaz kettős élt, akkor κ' -nek κ'' -re nincs olyan egy-egyértelmű leképezése, amely $\mathfrak{G}'$ pálya-halmazaihoz pontosan $\mathfrak{G}''$ pálya-halmazait rendelné.⁴⁾

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy létezik az említett tulajdonságú leképezés; tekintsünk egy ilyen leképezést. [1] 3. tétele szerint $\mathfrak{G}'$ -nek vannak olyan a, b, c, d, e, f, g utai, amelyek a Wheatstone-féle híd módján csatla-



2 ábra.

koznak egymáshoz. (2. ábra.) Legyen π'_1 a $bcafg$ pálya éleinek halmaza, π'_2 pedig a $bdaeg$ pálya éleinek halmaza. $\mathfrak{G}''$ megfelelő P-halmazai legyenek π''_1 és π''_2 . Tekintsük $\mathfrak{G}''$ -nek a $\pi'_1 \cup \pi'_2$ halmaz éleiből (és a hozzájuk tartozó pontokból) álló $\mathfrak{H}''$ részgráfját. Ez a részgráf kettős él nélküli (az ellenkező esetben $\mathfrak{G}''$ -nek is volna kettős éle.)

A párhuzamos, illetve soros kapcsolás szerinti indukcióval könnyű belátni a következő állítást. Ha egy kettős él nélküli gráfnak van olyan pályája, amely mind az A , mind a B pontokon átmegy, akkor A és B között egyértelműen definiálhatunk rendezést annak alapján, hogy a mindkettőjükön átmenő pályák A -t vagy B -t tartalmazzák-e elsőbbsként.

Legyen k' tetszőleges éle a $\mathfrak{G}'$ gráf a útjának, legyen k'' $\mathfrak{G}''$ -nek k' -höz rendelt éle. k'' végpontjai legyenek A és B , mégpedig A előzze meg B -t legutóbbi megjegyzésünk értelmében. Minthogy bármely (k_x, k'') alakú él-párhoz, így bármely (X, A) vagy (X, B) alakú pontpárhoz (ahol X tetszőleges pontja, k_x tetszőleges éle a $\mathfrak{H}''$ gráfnak) van közös pálya, $\mathfrak{H}''$ bármely (A -tól és B -től különböző) pontja vagy megelőzi A -t, vagy pedig követi B -t. A k'' él ezért soros komponense $\mathfrak{H}''$ -nek, tehát $\mathfrak{H}''$ bármely pályája átmegy k'' -n. Tekintsük most $\mathfrak{H}''$ azon éleit, amelyek a kiválasztott leképezésnél a $bceg$ pálya éleinek feleltek meg. Ezeknek az éleknek a halmaza k'' -t nem tartalmazza, tehát nem lehet P-halmaz, ami ellentmond a leképezésre vonatkozó feltételnek.

(Beérkezett : 1958. VII. 9.)

⁴⁾ Azaz : amely leképezés $\mathfrak{G}'$ bármely pálya-halmazát pontosan $\mathfrak{G}''$ egy pálya-halmazába viszi át, és amelynél $\mathfrak{G}''$ bármely pálya-halmaza $\mathfrak{G}'$ valamely pálya-halmazának képeként áll elő.

A szerző megjegyzései az első korrigáláskor, 1959. január 4-én.

TRAHTENBROT időközben ugyanerre a problémakörre vonatkozó kiterjedtebb vizsgálatokat hozott nyilvánosságra a [8] dolgozatban. Ennek 5. tétele (248. oldal) ugyanazt a tényt fejezi ki más beállításban, mint 2. és 3. tételeink.

A 2. és 3. tételek más módon is bizonyíthatóak, mint a 3. §-ban láttuk. A 2. tétel részletesebb megfontolást igénylő esetét ott direkt módon igazoltuk, indirekt módon igen könnyű belátnunk helyességét [2] 5. tételének alkalmazásával. A 3. tétel nem közvetlenül belátható esetére GALLAI TIBOR professzor a dolgozat lektorálása során a következő (tisztán gráfelméleti jellegű) bizonyítást adta.

Legyenek $a(PA)$, $b(AB)$, $c(AB)$ és $d(BQ)$ egy irreducibilis gráf páronként idegen útjai, a pontok között a $P = A$ és $B = Q$ egybeesés megengedett. Tekintsük az $a \cdot b \cdot d$ -től és $a \cdot c \cdot d$ -től különböző összes pályákat. Bármely ilyen pályából válasszunk ki egy olyan élt, amelyet az a , b , c , d utak egyike sem tartalmaz. A kiválasztott élek halmaza legyen χ ; k_1 és k_2 legyen tetszőleges éle b -nek, illetve c -nek. Ekkor a

$$\chi = \chi \cup \{k_1\} \cup \{k_2\}$$

halmaznak bármely pályával van közös éle, van tehát a gráfnak olyan β bázisa, hogy $\beta \subseteq \chi$. Könnyen látható, hogy $k_1 \in \beta$, $k_2 \in \beta$. Igazoltuk tehát, hogy a megadott módon elhelyezkedő a , b , c , d utakat tekintve b és c egy-egy éle mindig kiegészíthető bázissá. A bizonyítás hátra levő részében ezt az állítást segédtételeknek fogjuk nevezni.

[8] 4. tétele szerint a gráfnak van két egymástól idegen p_1 , p_2 pályája (lásd még [1] 3. lábjegyzetét). A segédétel szerint p_1 bármely éle q_2 relációban áll p_2 bármely élével. Ha a gráf valamely k élet sem p_1 , sem p_2 nem tartalmazza, akkor k benne van alkalmas olyan útban, amelynek pontosan végpontjai p_1 -beli vagy p_2 -beli pontok; a segédétel minden lehetséges esetben alkalmazható k -ra és p_1 vagy p_2 valamely élére.

IRODALOM

- [1] ÁDÁM A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I.”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 211–218.
- [2] ÁDÁM A.: „Kétpólusú elektromos hálózatokról, II.”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 67–79.
- [3] HORN, A.: „Sentences which are true of direct unions of algebras”. *Journal of Symbolic Logic* **16** (1951) 14–21.
- [4] QUINE, W. V.: „The problem of simplifying truth functions”. *American Mathematical Monthly*, **59** (1952) 521–531.
- [5] QUINE, W. V.: „Two theorems about truth functions”. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* **10** (1953) 64–70.⁵⁾
- [6] RÉDEI L.: *Algebra*, I. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [7] ТРАХТЕНБРОТ, Б. А.: „Синтез бесповторных схем”. *Доклады Академии Наук СССР* **103** (1955) 973–976.
- [8] ТРАХТЕНБРОТ, Б. А.: „К теории бесповторных контактных схем”. *Труды Математического Института им. В. А. Стеклова* **51** (1958) 226–269.
- [9] ЯБЛОНСКИЙ, С. В.: „О суперпозициях функций алгебры логики”. *Математический Сборник* **30** (1952) 329–348.

⁵⁾ E dolgozat referátuma megtalálható a *Journal of Symbolic Logic* **19** (1954) kötetének 142. oldalán.

О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, III.

A. ÁDÁM

Резюме

Настоящая работа занимается связью между двухполюсными графами и функциями истинности. Эта связь исследуется в следующей трактовке: ребра $k_1, k_2, \dots, k_n$ графа $\mathfrak{G}$ взаимно однозначно соответствуют переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$; соответствующая графу $\mathfrak{G}$ функция истинности f (в некотором месте ее области определения) истинна, если существует такая цепь, любое ребро k_i которой соответствует такой переменной x_i , что $x_i = \uparrow$. (В работе [7] эта же трактовка играет основную роль. Говорят, что граф $\mathfrak{G}$ реализует функцию f *бесповторно*). Встречаются лишь монотонные функции истинности, которые эффективно зависят от каждой своей переменной. Каждая такая функция истинности имеет вполне определенную сокращенную дизъюнктивную (соответственно конъюнктивную) нормальную форму.

Понятие *цепи* было определено в [1]. Некоторое множество β ребер графа $\mathfrak{G}$ называется *базисом*, если всякая цепь графа $\mathfrak{G}$ содержит (хотя бы одно) ребро из β и для всякого ребра из β существует такая цепь графа $\mathfrak{G}$, которая не содержит других ребер из β .

Пусть функция истинности f соответствует графу $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что некоторое множество ребер графа $\mathfrak{G}$ является цепью в том и только в том случае, если произведение соответствующих переменных входит в сокращенную дизъюнктивную нормальную форму функции f ; и что некоторое множество ребер графа $\mathfrak{G}$ образует базис в том и только в том случае, если сумма соответствующих переменных аддитивна в сокращенную конъюнктивную нормальную форму функции f .

Для ребер k_1 и k_2 графа $\mathfrak{G}$ пусть выполняется соотношение ϱ_1 , если подходящая цепь проходит и через k_1 и через k_2 . Пусть $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, если существует такой базис, который содержит и k_1 и k_2 . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 суть соотношения равносильности, порожденные соотношениями ϱ_1, ϱ_2 и отрицанием соотношения ϱ_1 соответственно.

Теорема 2. Для двух ребер k_α и k_β параллельно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ истинно в том и только в том случае, если k_α и k_β находятся в той же параллельной компоненте графа $\mathfrak{G}$. Для пар ребер параллельно неприводимого графа ε_1 тождественно истинно.

Теорема 3. Для двух ребер k_α и k_β последовательно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ истинно в том и только в том случае, если k_α и k_β находятся в той же последовательной компоненте. Для пар ребер последовательно неприводимого графа ε_2 тождественно истинно.

Теорема 4. Если для ребер k_α и k_β последовательно приводимого графа $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$, то k_α и k_β находятся в той же компоненте графа $\mathfrak{G}$. Если k_α и k_β находятся в той же параллельно приводимой компоненте графа $\mathfrak{G}$, то $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.

Пусть дана функция истинности f . Если предположим, что f реализуема, то теоремы 2. и 3. дают возможность обозреть последовательную и параллельную структуру любого графа $\mathfrak{G}$, реализующего f , и определить те функции истинности, которые неприводимые составляющие графа $\mathfrak{G}$ обязаны реализовывать. В § 4. конструкция иллюстрируется примером. В некоторых случаях может быть выгодным и применение теоремы 4.

В заключительной части параграфа 4. затрагивается вопрос о единственности реализации. С помощью только средств теории графов формулируется и доказывается следующий специальный случай теоремы 5. работы ТРАХТЕНБЕРГА [7]: *если граф $\mathcal{G}'$ содержит двойное ребро, а граф $\mathcal{G}''$ — граф без двойных ребер, то $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}''$ не могут реализовать ту же самую функцию истинности. (Теорема 5).*

ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, III.

von

A. ÁDÁM

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Zusammenhang der zweipolgigen Graphen und der Wahrheitsfunktionen. Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Auffassung betrachtet: die Kanten $k_1, k_2, \dots, k_n$ des Graphen $\mathcal{G}$ entsprechen ein-eindeutig den Variablen $x_1, \dots, x_n$; und die Wahrheitsfunktion f (gehörend zum Graphen $\mathcal{G}$) ist (an einer Stelle ihres Definitionsbereiches) wahr, wenn es eine Bahn gibt, deren jede Kante k_i einem solchen Variablen x_i entspricht, dass $x_i = \uparrow$ ist. (Diejenige Auffassung spielt eine grundlegende Rolle in [7]. Es ist gebräuchlich zu sagen, dass die Wahrheitsfunktion f durch den Graphen $\mathcal{G}$ ohne Wiederholung realisiert wird.) Es treten nur monotone Wahrheitsfunktionen auf, die von ihrem jeden Variablen effektiv abhängen. Jede solche Wahrheitsfunktion hat eine wohlbestimmte reduzierte disjunktive (bzw. konjunktive) Normalform.

Der Begriff der *Bahn* wurde in [1] definiert. Eine Menge β gewisser Kanten eines Graphen $\mathcal{G}$ wird eine *Basis* von $\mathcal{G}$ genannt, wenn jede Bahn von $\mathcal{G}$ (mindestens) eine Kante von β enthält, und zu jeder Kante aus β eine Bahn von $\mathcal{G}$ existiert, die keine andere Kante aus β hat.

Sei die Wahrheitsfunktion f zugeordnet dem Graphen $\mathcal{G}$. Wie leicht ersichtlich ist, eine Menge aus Kanten von $\mathcal{G}$ bildet eine Bahn dann und nur dann, wenn die entsprechenden Variablen ein Glied der reduzierten disjunktiven Normalform von f bilden; und eine Menge aus Kanten von $\mathcal{G}$ ist eine Basis dann und nur dann, wenn die entsprechenden Variablen ein Glied der reduzierten konjunktiven Normalform von f bilden.

Es sei $\varrho_1(k_1, k_2) = \uparrow$ für die Kanten k_1 und k_2 von $\mathcal{G}$, wenn diese beiden Kanten von einer passenden Bahn durchlaufen werden. Es sei $\varrho_2(k_1, k_2) = \uparrow$, wenn k_1 und k_2 in einer passenden Basis enthalten werden. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und ε_3 seien die Äquivalenz-Relationen, die (der Reihe nach) von ϱ_1, ϱ_2 bzw. von der Negation von ϱ_1 induziert sind.

Satz 2. Für den Kanten k_α und k_β eines parallel reduzierbaren Graphen $\mathcal{G}$ ist $\varepsilon_1(k_\alpha, k_\beta)$ wahr dann und nur dann, wenn k_α und k_β in derselben parallelen Komponente von $\mathcal{G}$ enthalten sind. Die Relation ε_1 gilt für jedes Paar von Kanten eines parallel irreduzierbaren Graphen.

Satz 3. Für die Kanten k_α und k_β eines durch Reihenschaltung reduzierbaren Graphen $\mathcal{G}$ ist $\varepsilon_2(k_\alpha, k_\beta)$ wahr dann und nur dann, wenn k_α und k_β in derselben

Reihen-Komponente von $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Die Relation ε_2 gilt für jedes Paar von Kanten eines durch Reihenschaltung irreduziblen Graphen.

Satz 4. *Wenn für die Kanten k_α und k_β eines durch Reihenschaltung reduzierten Graphen $\mathfrak{G}$ $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$ ist, dann sind k_α und k_β in derselben Komponente von $\mathfrak{G}$ enthalten. Sind k_α und k_β in derselben parallel reduzierten Komponente von $\mathfrak{G}$, dann gilt $\varepsilon_3(k_\alpha, k_\beta) = \uparrow$.*

Sei eine Wahrheitsfunktion f gegeben. Unter die Voraussetzung, dass f realisiert werden kann, geben die Sätze 2. und 3. die Möglichkeit, die Reihenparallelstruktur jedes Graphen $\mathfrak{G}$, der f realisiert, zu übersehen, und die Wahrheitsfunktionen zu bestimmen, die durch die irreduziblen Bestandteilen von $\mathfrak{G}$ realisiert werden müssen. Im § 4. wird die Konstruktion durch ein Beispiel erleuchtet. In gewissen Fällen kann es vorteilhaft sein auch den Satz 4. anzuwenden.

Am Ende des § 4. wird die Eindeutigkeitsfrage der Realisation berührt, und es wird der folgende Spezialfall des Satzes 5. von TRACHTENBROT [7] mit rein graphentheoretischen Mitteln ausgesagt und bewiesen: *ist $\mathfrak{G}'$ ein Graph mit mindestens einer doppelten Kante und $\mathfrak{G}''$ ein Graph ohne doppelte Kante, dann können $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ nicht dieselbe Wahrheitsfunktion realisieren (Satz 5.).*