MEGJEGYZÉSEK IFJ. DRAHOS I., HORNYIK L. ÉS HOSSZÚ M. „EGY SZERSZÁMGEOMETRIAI PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGOLDÁSA" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ[1]

LIPKA ISTVÁN[2]

IFJ. DRAHOS ISTVÁN, HORNYIK LÁSZLÓ és HOSSZÚ MIKLÓS szerzők az ún. profilmarók geometriailag helyes alakjának a meghatározásával foglalkozó, ebben a kötetben közölt cikkükben [1], a csavarfelületek marására szolgáló szerszám felületét, mint forgásfelületek egyparaméteres seregének a burkoló felületét származtatják. E burkoló felület, amely szintén forgásfelület (szerszám-forgásfelület) tetszés szerinti körmetszetének a sugarát mint szélsőértéket nyerhetjük oly módon, hogy a kör síkja által a forgásfelületek egyparaméteres seregéből kimetszett körök sugarait a seregparaméter függvényének tekintjük és meghatározzuk ennek a függvénynek a szélsőértékét. Az így kapott szélsőértéknek minimumnak, éspedig a kialakítandó részhez tartozó szakaszon *abszolút minimumnak* kell lennie ahhoz, hogy a keresett burkoló felület körmetszetének a sugarát szolgáltassa.

Az alábbiakban a szerzők fent idézett cikkében közölt meggondolásokhoz csatlakozva, azok kiegészítéseképpen megmutatjuk, hogy ujjmaró esetében lapos menetű csavarra, valamint ferdefogú kerékre is milyen feltételek mellett biztosítható a szóbanforgó abszolút minimumnak a létezése.

1. §.

Laposmenetű csavart előállító ujjmaró esetében aránylag könnyen meghatározható az abszolút minimum létezésének a feltétele. Ugyanis itt, az egyparaméteres felületsereget — amelynek a szerszámforgásfelület a burkolója — egy, a Z forgástengelyre merőleges tetszésszerinti sík olyan körökben metszi, amelyek sugarának négyzete, a (34*) képlet szerint :

$$\varrho(Z, \psi) = (Z \operatorname{tg} \psi)^2 + a^2 k^2 (\psi - \psi_0)^2 \tag{1}$$

ahol ψ a felületsereg paramétere és ha $Z = Z_0$ egy rögzített síkmetszetet jelent, akkor $\varrho(Z_0, \psi)$ egyváltozós függvény e metszősíkon fekvő körök sugarának a négyzetét jelenti. A $\varrho(Z, \psi)$ függvény szélsőértékeit kell vizsgálnunk a $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ szakaszban.[3] A szélsőérték létezéséhez szükséges

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} = Z^2 \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos^2 \psi} + a^2 k^2 (\psi - \psi_0) = O \tag{2}$$

---

[1] Lásd : [1]-et az irodalomjegyzékben. A szövegben e dolgozat egyenleteire való hivatkozásban a sorszám után *-ot teszünk : (1*), (2*) stb.

[2] Szerszámgépfejlesztő Intézet, Halásztelek.

[3] A laposmenetű csavar több $(0, 2\pi)$ nagyságú szakaszból, menetből áll.

fennállása, amelyből Z mint a ψ függvénye meghatározható [lásd a (37*) alatti képletet]. A ϱ ψ-szerinti differenciálhányadosának előbbi kifejezéséből:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\psi^2} = Z^2\frac{1+2\sin^2\psi}{\cos^4\psi} + a^2k^2\,. \tag{3}$$

Mivel ennek a kifejezésnek az értéke mindig pozítiv, azért ahol $\partial\varrho/\partial\psi = 0$, ott $\partial^2\varrho/\partial\psi^2 > 0$, vagyis ha valamely ψ-helyen a ϱ függvénynek szélsőértéke van, akkor az minimum. Legyen röviden $\partial\varrho/\partial\psi = \dot\varrho(Z,\,\psi)$. A $\dot\varrho(Z,\,\psi)$ a ψ változónak a $(0,\,\pi/2)$ intervallumban (3) szerint monoton növekvő függvénye, és mivel (2) szerint

$$\dot\varrho(Z,0) = -\,2\,a^2k^2\psi_0 < 0\;,\quad \dot\varrho\left(Z,\frac{\pi}{2}-0\right) = +\infty\;,$$

azért $\dot\varrho$ a $(0,\,\pi/2)$ intervallumban pontosan egyszer tűnik el, valamely $\psi_1 < \psi_0$ helyen. Mivel pedig a $(0,\,\psi_1)$ intervallumban $\dot\varrho < 0$, a $(\psi_1,\,\pi/2)$ intervallumban pedig $\dot\varrho > 0$, azért a ϱ legkisebb értéke a $(0,\,\pi/2)$ intervallumban:

$$\varrho(Z,\psi_1) \qquad (0<\psi_1<\psi_0<\pi/2)\,, \tag{4}$$

($\psi = \pi/2$ esetén (1) szerint $\varrho(Z,\,\pi/2) = \infty$). A második szögnegyedben, vagyis a $(\pi/2,\,\pi)$ intervallumban, mivel

$$\dot\varrho\left(Z,\frac{\pi}{2}+0\right) = -\,\infty\;;\qquad \dot\varrho(Z,\pi) = 2\,a^2k^2(\pi-\psi_0) > 0$$

és (3) szerint $\dot\varrho$ monoton növekvő, szintén pontosan egy ψ_2 helyen tűnik el a $\dot\varrho$. Eszerint a ϱ legkisebb értéke a $(\pi/2,\,\pi)$ intervallumban:

$$\varrho(Z,\psi_2) \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\psi_2<\pi\right).$$

Megmutatjuk, hogy ez a minimális érték nagyobb a (4) alattinál, vagyis:

$$\varrho(Z,\psi_1) < \varrho(Z,\psi_2)\,. \tag{5}$$

Mivel $\dot\varrho(Z,\,\psi_1) = 0$, azért (2)-ből és (1)ből következik, hogy

$$\varrho(Z,\psi_1) = Z^2\operatorname{tg}^2\psi_1\left(1+\frac{Z^2}{a^2k^2\cos^4\psi_1}\right).$$

Tekintsük valamely Φ változónak az:

$$f(\Phi) = Z^2\operatorname{tg}^2\Phi\left(1+\frac{Z^2}{a^2k^2\cos^4\Phi}\right) \tag{6}$$

függvényét. Nyilvánvaló, hogy $\Phi = \psi_1$, illetve $\Phi = \psi_2$-esetén:

$$f(\psi_1) = \varrho(Z,\psi_1)\ \text{és}\ f(\psi_2) = \varrho(Z,\psi_2)\,. \tag{7}$$

A (2) szerint:

$$\dot\varrho(Z,\pi-\psi_1) = -\,2\,Z^2\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\cos^2\psi_1} + 2\,a^2k^2(\pi-\psi_1-\psi_0)\,.$$

de a $\dot{\varrho}(Z, \psi_1) = 0$ relációból következik, hogy

$$-Z^2 \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\cos^2 \psi_1} = a^2 k^2 (\psi_1 - \psi_0),$$

amit $\dot{\varrho}(Z, \pi - \psi_1)$ előbbi kifejezésébe írva:

$$\dot{\varrho}(Z, \pi - \psi_1) = 2 a^2 k^2 (\pi - 2\psi_0) > 0 \qquad \left(\psi_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ebből az egyenlőtlenségből, mivel a $(\pi/2, \psi_2)$ intervallumban $\dot{\varrho} < 0$ és (ψ_2, π)-ben $\dot{\varrho} > 0$, következik, hogy

$$\pi - \psi_1 > \psi_2 .$$

Azonban $f(\Phi)$ monoton csökken, ha Φ $\pi/2$-től π-ig nő, és ezért

$$f(\psi_2) > f(\pi - \psi_1) ;$$

de (6) szerint $f(\pi - \psi_1) = f(\psi_1)$ és így

$$f(\psi_2) > f(\psi_1)$$

amivel az (5) alatti egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyítása szemlélet alapján egyszerűbben is elvégezhető. Ugyanis a laposmenetű csavarfelületet az alaphengerre írt csavarvonal főnormálisainak az összessége alkotja. Ezek a főnormálisok mind derékszögben metszik a csavarfelület tengelyét, az Y-tengelyt. A ψ paraméterértékhez tartozó főnormális a $Z = Z_0$ síkot olyan pontban metszi, amelynek a Z-tengelytől való távolsága egyenlő a $(\varrho(Z_0, \psi))^{1/2}$ sugárral. Ha a metszéspontot meghatározó két koordináta X_0, Y_0, akkor Y_0 a főnormálisnak az (X, Z) koordinátasíktól való távolsága és $X_0^2 + Y_0^2 = \varrho(Z_0, \psi)$. Most már, ha a ψ_1 paraméterértékhez tartozó főnormális metszéspontjának koordinátái X_1, Y_1; a ψ_2-höz tartozó metszésponté pedig X_2, Y_2, akkor, mivel ψ_1 az első, ψ_2 pedig a második szögnegyedbe esik, a szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy $|X_2| > |X_1|$ és $|Y_2| > |Y_1|$. Ebből következik, hogy $\varrho(Z, \psi_2) > \varrho(Z, \psi_1)$. Tekintsünk ezután egy a $(0, \pi)$ intervallumba eső ψ értékhez tartozó főnormálist és azt a főnormálist, amely a $(\pi, 2\pi)$ intervallumba eső $(2\pi - \psi)$ értékhez tartozik. Nyilvánvaló, hogy ezeknek a főnormálisoknak az (X, Z) síkra való merőleges vetületei, egymásnak tükörképei a Z-tengelyre vonatkozóan. Ebből következik, hogy a $Z = Z_0$ síkkal való metszéspontok X koordinátái abszolút értékben megegyeznek. A $(2\pi - \psi)$-hez tartozó főnormális metszéspontjának Y koordinátája pedig nyilván nagyobb, mint a ψ-hez tartozóé. Eszerint nyilvánvaló, hogy $\varrho(Z_0, 2\pi - \psi) > \varrho(Z_0, \psi)$. Ezzel megmutattuk, hogy a $\varrho(Z, \psi)$ függvénynek a $(0, 2\pi)$ intervallumban a $\psi = \psi_1$ helyen abszolút minimuma van. Ezek szerint a szerszám profilgörbéjének (37*) alatti paraméteres előállításában a paraméternek a (4) alatti $(0, \psi_0)$ intervallumban kell változnia.

2. §.

A ferdefogazású homlokkerekek készítéséhez szükséges ujjmaró esetében már kissé körülményesebb az abszolút minimum létezését biztosító feltételeknek a meghatározása.

Jelölje most $\varrho(Z, \varphi)$ ama körök sugarának négyzetét, amelyeket a szerszám forgásfelületet meghatározó egyparaméteres felületseregből a Z forgástengelyre merőleges sík kimetsz. φ a felületsereg paramétere és ha $Z = Z_0$ egy rögzített síkmetszetet jelent, akkor $\varrho(Z_0, \varphi)$ ezen a síkon fekvő körök sugarának a négyzetét jelenti. Kiszámítjuk a ϱ függvény φ-szerinti differenciálhányadosát. A (14*), (18*) és (19*) alatti képletekből következik, hogy :

$$\frac{z_1^3}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = -\,U Z^2 - V Z - W$$

ahol (20_1^*) szerint :

$$U = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -\,y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix}$$

(42_1^*), (42_2^*) és (45*) szerint

(8)
$$\begin{aligned} V &= -\,2 z_0 U + z_1 D \\ W &= z_0^2 U - z_0 z_1 D \end{aligned}$$

ahol ((44*) szerint)

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_1 & \dot{y}_1 \\ -y_0 & x_1 & \dot{x}_1 \\ 0 & z_1 & \dot{z}_1 \end{vmatrix} \;;$$

továbbá, mivel most $d = 0$, $\delta = -\,\pi/2$, $\varphi_0 = \psi_0 + \pi/2$, a (40*)-ből :

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos\varphi\,, & x_1 &= -\,a \sin\varphi \\ y_0 &= -\,a\,k(\varphi - \varphi_0)\,, & y_1 &= -\,ak \\ z_0 &= a \sin\varphi\,, & z_1 &= a \cos\varphi\,. \end{aligned}$$

A V és W (8) alatti értékét a $\partial\varrho/\partial\varphi$ kifejezésébe írva :

(9)
$$\frac{z_1^3}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = (-\,Z\,U + z_0 U - z_1 D)\,(Z - z_0)$$

Az U és D harmadrendű determinánsok értékét kiszámítva :

$$\begin{aligned} U &= -\,a^3 \sin\varphi\,(1 + k^2) \\ D &= a^3\big(\cos\varphi - k^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\big) \;; \end{aligned}$$

ezek felhasználásával a (9) alatti kifejezés első faktorára nyerjük, hogy

(9′)
$$\begin{aligned} &-\,Z\,U + z_0 U - z_1 D = \\ &= a^3 \big\{Z \sin\varphi \cdot (1 + k^2) + a\big[-\,1 + k^2 \sin\varphi \big((\varphi - \varphi_0)\cos\varphi - \sin\varphi\big)\big]\big\}\,. \end{aligned}$$

Megvizsgáljuk a $\dot{\varrho}(Z, \varphi)$ függvény (ϱ φ-szerinti deriváltja) értékváltozását a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban, vagy pontosabban a (φ_0, π) intervallumban, ahol $\varphi_0 = \psi_0 + \pi/2$ (lásd 2*. ábra). Mivel a Z forgástengelyre merőleges metsző sík az a sugarú alaphengeren kívül esik, azért mindig $Z > z_0 = a \sin\varphi$ és így a (9) alatti kifejezés második faktora állandóan pozitív. Tehát $\dot{\varrho}$ előjel változását a (9') alatti változása fogja meghatározni. Legyen először $\varphi = \pi$, akkor (9') szerint

$$-ZU + z_0 U - z_1 D = a^3\{-a\} = -a^4 < 0$$

és igy, mivel $z_1 = a \cos\varphi = -a < 0$, a $\varphi = \pi$ helyen

$$\left.\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pi} > 0 . \tag{10}$$

A $\varphi = \varphi_0$-helyen (9') szerint:

$$-ZU + z_0 U - z_1 D = a^3\{Z(1+k^2)\sin\varphi_0 - a[1 + k^2\sin^2\varphi_0]\} .$$

Mivel $Z \geqq a$, az előbbi kifejezés pozitív, ha:

$$(1+k^2)\sin\varphi_0 - (1+k^2\sin^2\varphi_0) > 0 \tag{11}$$

vagy ami ugyanaz, ha

$$k^2 > \frac{1}{\sin\varphi_0} . \tag{11'}$$

Itt $k^2 = \mathrm{tg}^2\,\gamma_a \geqq 1{,}23$, ahol γ_a az alaphengerre írt csavarvonal emelkedési szöge, amelyre a ferdefogazású homlokkerekek zöménél áll, hogy $\gamma_a \geqq 48°$. A (11')-ben fellépő: $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, ahol ha z a kerék fogszámát jelenti, könnyen belátható, hogy $\psi_0 < \pi/2z$. Azonban $z \geqq 5$, tehát $\psi_0 < \pi/10$ és így

$$\sin\varphi_0 = \cos\psi_0 > \cos\frac{\pi}{10} > 0{,}9 .$$

Eszerint a (11') alatti egyenlőtlenség teljesül, tehát a (11) alatti is fennáll és így, mivel a $\varphi = \varphi_0$ helyen $z_1 < 0$, a (9)-ből következik, hogy:

$$\dot{\varrho} = \left.\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} < 0 .$$

Tehát megmutattuk, hogy a (φ_0, π) intervallum kezdőpontjában a $\dot{\varrho}$ negatív, a vég pontjában pedig (10) szerint pozitív, amiből következik, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban legalább egy helyen eltűnik. A következőkben bebizonyítjuk, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban *pontosan egy* helyen tűnik el. Ez az állítás igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy ha a (φ_0, π) intervallum valamely φ helyén

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = 0 ,$$

akkor ugyanott

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} > 0 .$$

Tekintettel arra, hogy (45*) szerint

$$z_0 U - z_1 D = \Delta ,$$

a (9) alattit a következőképp is felírhatjuk:

$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = (-ZU + \Delta)(Z - z_0) .$$

Differenciáljuk ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát φ-szerint:

$$\frac{3}{2}z_1^2\dot{z}_1\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} + \frac{z_1^3}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} = (-Z\dot{U} + \dot{\Delta})(Z - z_0) - \dot{z}_0(-ZU + \Delta) .$$

Most már, ha $\partial\varrho/\partial\varphi = 0$, vagyis fennáll a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, akkor (45*) és (46*) szerint:

$$Z = z_0 - \frac{D}{U}z_1 = \frac{\Delta}{U} ,$$

és ezt a $Z = \Delta/U$ értéket az előbbi egyenlőségbe írva, tekintettel arra, hogy $\partial\varrho/\partial\varphi = 0$, kapjuk:

$$\frac{z_1^3}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} = \frac{-\dot{U}\Delta + U\dot{\Delta}}{U^2}(\Delta - z_0 U) .$$

De, mivel $Z = \Delta/U$,

$$\frac{-\dot{U}\Delta + U\dot{\Delta}}{U^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta}{U}\right) = \dot{Z} ;$$

másrészt (45*) szerint:

$$\Delta - z_0 U = -z_1 D ,$$

amit $\partial^2\varrho/\partial\varphi^2$ előbbi kifejezésébe írva:

$$\frac{z_1^2}{2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} = -D\dot{Z} . \tag{12}$$

A (60_1^*) szerint:

$$Z = \frac{a}{\sin\varphi} - a\sin^2\beta\cos\varphi\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

és ennek φ-szerinti deriváltja:

$$\dot{Z} = -\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + a\sin^2\beta\sin\varphi\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right] + a\sin^2\beta\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\varphi .$$

Mivel

$$\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\varphi + \varphi - \varphi_0 ,$$

azért $\dot{Z}$ előbbi kifejezése a következő alakú lesz:

$$\dot{Z} = -\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + a\sin^2\beta[\cos\varphi + (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi] + a\sin^2\beta\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\varphi =$$

$$= \frac{-\cos\varphi\cos^2\beta + (\varphi - \varphi_0)\sin^2\beta\sin^3\varphi}{\sin^2\varphi}a .$$

Most már, ha

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \varphi < \pi \ ,$$

akkor

$$\cos\varphi < 0 \ , \quad \sin\varphi > 0 \ ,$$

tehát a (φ_0, π) intervallumban az előbbi képlet szerint:

$$\dot{Z} > 0 \ .$$

Mivel a (12)-ben fellépő D determináns a (φ_0, π) intervallumban

$$D = a^3\left(\cos\varphi - k^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\right)$$

szerint negatív, azért ugyanitt

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} > 0 \ .$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\dot{\varrho}$ a (φ_0, π) intervallumban pontosan egy helyen tűnik el és itt a ϱ függvénynek minimuma van, amely a (φ_0, π) intervallumban *abszolút minimum.*

A (9') alatti kifejezésből látható, hogy $\dot{\varrho}$ amely a $\varphi = \pi$ helyen pozitív, a π helynek egy jobboldali környezetében is pozitív marad és így mondhatjuk, hogy a ϱ függvénynek valamely

$$(\varphi_0, \Phi)$$

intervallumban egy helyen minimuma van, amely ott abszolút minimum; ahol

$$\Phi > \pi$$

(13)
$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2z} \ .$$

Ezek szerint a ferdefogú kerék fogoldalát alkotó csavarfelületnek azt a részét alakíthatjuk ki az ujjmaróval, amely megfelel a (φ_0, Φ) szakasznak, vagyis az alaphengerre írt csavarvonal érintőinek, mint a felület alkotóinak azt az összességét, amelyet a φ paraméternek φ_0-tól Φ-ig való változásakor nyerünk. Ennek a felületrésznek az egyenlet-rendszere egy alkalmasan választott (ξ, η, ζ) derékszögű koordinátarendszerben:

(14)
$$\begin{aligned} \xi &= a\cos(\varphi - \varphi_0) - \lambda a \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \eta &= a\sin(\varphi - \varphi_0) + \lambda a \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \zeta &= c_0(\varphi - \varphi_0) + c_0\lambda \qquad\qquad (c_0 = ak) \end{aligned}$$

ahol a φ és λ paraméterre:

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi \ ; \ -(\varphi - \varphi_0) \leqq \lambda \leqq \frac{b}{c_0} + \varphi_0 - \varphi .$$

A $\xi = a\cos(\varphi - \varphi_0)$, $\eta = a\sin(\varphi - \varphi_0)$, $\zeta = c_0(\varphi - \varphi_0)$ csavarvonalnak az a darabja, amely a (φ_0, Φ) szakasznak felel meg, meghatározza a fogaskerék szélességét. Ha a szóbanforgó csavarfelület részt olyan a felület ζ-tengelyére merőleges $\zeta = h$ síkokkal (homloksíkok) metszük, amelyekre $0 \leqq h \leqq c_0(\Phi - \varphi_0)$, akkor véges körevolvens darabokat nyerünk, amelyeknek a fogaskerék fejhengeréig kell terjedniök, hogy teljes fogoldalt kapjunk. Mivel a $\zeta = h = c_0(\bar{\varphi} - \varphi_0)$; $(\varphi_0 \leqq \bar{\varphi} \leqq \Phi)$ síkon fekvő evolvensdarab pontjainak a ζ-tengelytől való távolsága (14) szerint :

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a\sqrt{1 + (\bar{\varphi} - \varphi)^2} \; ,$$

továbbá

$$\max |\bar{\varphi} - \varphi| = \max\{(\bar{\varphi} - \varphi_0), (\Phi - \bar{\varphi})\} = M$$

$$(\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi)$$

ahol, mint könnyen belátható

$$M \geqq \frac{\Phi - \varphi_0}{2} \; ,$$

azért a $\zeta = h$ metszeten a ζ-tengelytől legmesszebb eső pont távolsága :

$$\max \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a\sqrt{1 + M^2} \geqq a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2} \; ,$$

vagyis

$$\min\{\max \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\} = a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2} \; .$$

Ha a fogaskerék fejhengerének sugara r_f, akkor nyilván az

$$(15) \qquad r_f \leqq a\sqrt{1 + \left(\frac{\Phi - \varphi_0}{2}\right)^2}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállni, ahhoz, hogy a fogoldal egészen a fejhengerig terjedjen. A fejhenger sugara *elemi fogazásnál* (lásd [3]) :

$$r_f = a\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}\left(1 + \frac{2\cos\beta}{z}\right)$$

ahol $\beta = \pi/2 - \gamma$ (a fogferdeség szöge[4]) $\alpha = 20^\circ$ a szerszám-kapcsolószög és

[4]) Itt γ annak a csavarvonalnak az emelkedési szögét jelenti, amelyet az osztóhenger metsz ki a fogoldalt alkotó csavarfelületből. Ez a γ érték nem egyenlő a (11′) alatti képletben szereplő γ_a-val, amely az alaphengeren való emelkedés szögét jelenti. γ_a és γ közt a következő összefüggés áll fenn :

$$\cos\gamma_a = \cos\gamma\,\cos\alpha \qquad (\alpha = 20^\circ)$$

Mivel a ferdefogazású homlokkerekek zöménél $\gamma \geqq 45^\circ$, azért az előbbi összefüggésből $\gamma_a \geqq 48^\circ$.

z most a fogszámot jelenti. (13) szerint:

$$\Phi - \varphi_0 > \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2z}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2z}.$$

A z fogszámról általában feltehetjük, hogy

$$z \geqq 10,$$

amikoris mindig fennáll a

$$\Phi - \varphi_0 > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20} \tag{16}$$

egyenlőtlenség és a (15) alatti teljesül, ha

$$z \geqq \frac{2\cos\beta\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{9\pi}{40}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}} = \frac{2\cos\beta\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}}{1{,}225 - \sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)^2}}.$$

A fogferdeség β szöge — mivel $\gamma = (\pi/2 - \beta)$-ra feltettük, hogy $\gamma \geqq 60°$ — a (0, 30°) intervallumban változik és ekkor az előbbi törtkifejezés értéke 13 és 16 közé esik. Eszerint a (15) alatti teljesül, ha a kerék z fogszámára[5]

$$z > 15$$

Maróval a fogazott kerék homlok profilevolvense egészen a belső körig elkészíthető — a belső kör sugara az elemi fejhézaggal nagyobb a lábkör sugárnál —, azonban *elemi fogazás*-nál a teljes fogmagasság mentén csak abban az esetben kapunk végig evolvens profilt, ha a kerék fogszáma: $z > 33$ ([2] 138. oldal). Vagy pontosabban, akkor kapunk teljes evolvens profilt, ha:

$$z \geqq \frac{2}{1 - \cos\alpha_h} = K_\beta$$

ahol (lásd [3]):

$$\cos\alpha_h = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (\alpha = 20°)$$

Ha $\beta = 0$, akkor $K_0 = 34$, ha $\beta = 10°$, akkor $K_{10} = 33$; $K_{20} = 30$, $K_{30} = 26$, $K_{45} = 18$. Ezek alapján egészen a belső köréig evolvens profilú keréknél a (15) alatti automatikusan teljesül.

Most rátérünk a megengedhető kerékszélesség meghatározására. Mint már említettük, a fogszélességet az alaphengerre írt csavarvonalnak az a darabja határozza meg, amely a (φ_0, Φ) szakasznak felel meg. A ferdefogú keréknél egy teljes körülforfulásnak megfelelő H menetmagasság, a kerék d

[5] A z-re nyert alsó korlátnak ez az értéke még javítható, azonban itt, elemi fogazás esetében a 15 érték is megfelelő.

osztókör átmérője és a β ferdeségi szög között a következő összefüggés áll fenn (lásd : [4], 282. oldal) :

$$H = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Ferdefogú keréknél a fogszélesség : $b = 1{,}5 - 2d$ értéket is elérhet. Mivel a b fogszélesség a teljes H menetmagasságnak tört része, azért maximális kerékszélesség esetében teljesülni kell a következő feltételnek :

$$2\,d = \frac{H}{\mu} \qquad (\mu > 1)\,; \tag{17}$$

ahonnan, tekintettel H előbb megadott kifejezésére :

$$\mu = \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \beta} \tag{18}$$

Most már a csavarvonalnak az a darabja, amely a (φ_0, Φ) intervallumnak felel meg, alig egy negyed részét teszi ki az egész H menetemelkedésnek megfelelő darabnak abban az esetben, amikor $\Phi = \pi$ (mivel $\varphi_0 > \pi/2$) ; ennélfogva ekkor a μ-re a $\mu > 4{,}1$ feltételnek kell fennállnia, vagyis μ fenti (18) kifejezése szerint teljesülnie kell a

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{\pi}{8{,}2}$$

egyenlőtlenségnek. Ez azt jelenti, hogy maximális fogszélesség esetében a β fogferdeségi szögre fennáll a

$$\beta \leqq 20^\circ\, 57'$$

feltétel, és ebben az esetben a fogszélesség *megengedhető* értékére, a

$$b = \frac{H}{\mu} = \frac{\pi \cdot d}{\mu \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

kifejezésre fennáll a

$$b \geqq 2\,d$$

egyenlőtlenség. (Megjegyezzük, hogy a fogszélesség tényleges értékét szilárdsági szempontok, továbbá a megmunkálás pontosságának lehetőségei fogják meghatározni.) Abban az esetben pedig, amikor $\beta > 20^\circ 57'$, bebizonyítható, hogy a (φ_0, Φ) intervallum bővíthető, azaz a $\Phi > \pi$. E célból tekintsük megint a (9′) alatti kifejezést, amelynek értéke (10) alatti szerint a $\varphi = \pi$ helyen negatív. Megmutatjuk, hogy a (9′) alatti kifejezés az egész $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban negatív és így (9) szerint $\dot{\varrho}$ ugyanott pozitív, amiből következik, hogy ϱ értéke a $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban végig növekszik. Mivel $Z \geqq a$ és $\sin \varphi < 0$ a $(\pi, 3\pi/2)$-ben, azért a (9′) alatti kifejezés biztosan negatív a $(\pi, 3\pi/2)$ intervallumban, ha ugyanott negatív a

$$(1 + k^2) \sin \varphi + \big[-1 + k^2 \sin \varphi\big((\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \sin \varphi\big)\big]$$

kifejezés. Írhatjuk, hogy $\varphi = \pi + \lambda$, ahol $0 \leqq \lambda \leqq \pi/2$. Mivel $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, azért $\varphi - \varphi_0 = \pi/2 + \lambda - \psi_0$, és ezek szerint az előbbi kifejezést a következő alakban is felírhatjuk:

$$-(1+k^2)\sin\lambda - 1 + k^2\left(\frac{\pi}{2} + \lambda - \psi_0\right)\sin\lambda\cos\lambda - k^2\sin^2\lambda\,.$$

Itt, mivel $\sin\lambda > 0$, $\cos\lambda > 0$, a harmadik tag pozitív a $0 < \lambda < \pi/2$ intervallumban és így a szóbanforgó kifejezés negatívitását bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy

$$(1+k^2)\sin\lambda + k^2\sin^2\lambda + 1 > k^2\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)\sin\lambda\cos\lambda\,,$$

amikor

$$0 \leqq \lambda \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

(19) $$h(\lambda) = (1+k^2) + k^2\sin\lambda + \frac{1}{\sin\lambda}$$

(19′) $$g(\lambda) = \left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)\cos\lambda\,.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

(20) $$h(\lambda) > k^2 g(\lambda)$$

$$0 \leqq \lambda \leqq \pi/2\,.$$

Mivel

$$h'(\lambda) = \cos\lambda\left(k^2 - \frac{1}{\sin^2\lambda}\right),$$

és eszerint $h'(\lambda_0) = 0$, ha

$$\lambda_0 = \arcsin\frac{1}{k}\,,$$

azért a $h(\lambda)$ függvénynek a $(0, \pi/2)$ intervallumban pontosan egy minimuma van a $\lambda = \lambda_0$ helyen. Ez a minimum érték (19) szerint:

(21) $$h(\lambda_0) = (1+k^2) + k + k = (1+k)^2\,.$$

Ezután számítsuk ki a (19′) alatti $g(\lambda)$ függvény deriváltját:

$$g'(\lambda) = \cos\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)\sin\lambda\,.$$

Ez a függvény monoton csökken, ha λ 0-tól $\pi/2$-ig változik és mivel $g'(0) > 0$ és $g'(\pi/2) < 0$, ezért a $g'(\lambda)$ függvény a $(0, \pi/2)$ intervallumban pontosan egy λ_1 helyen tűnik el és ott a $g(\lambda)$ függvénynek abszolút maximuma van. Ha a $g'(\lambda) = 0$ egyenletet λ-ra megoldjuk, akkor arra a

$$\lambda_1 = 0{,}45795985 = 26^\circ\, 14'\, 21''$$

értéket nyerjük (pontosan $0{,}45795985 < \lambda_1 < 0{,}45796470$). Mivel

$$\cos\lambda_1 = 0{,}8969564,$$

azért (19') szerint

$$g(\lambda_1) = 2{,}02875618 \cdot 0{,}8969564 = 1{,}8197058.$$

A $h(\lambda)$ függvénynek minimuma (21) szerint $(1 + k)^2$, a $k^2 g(\lambda)$ maximuma pedig

$$k^2 g(\lambda_1) = 1{,}8197058\; k^2.$$

Most már $$(1 + k)^2 > 1{,}8197058\; k^2.$$

ha $$1 + k > 1{,}3489647\; k.$$

Mivel pedig $k = \operatorname{ctg} \beta_a$, az előbbi egyenlőtlenség fennáll, ha

$$\operatorname{ctg} \beta_a < 2{,}8656193$$

azaz, ha[6])

$$\beta_a \geqq 19^\circ\, 15'.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\beta_a > 19^\circ\, 15'$ esetében az eredeti $(\varphi_0,\ \Phi)$ intervallum, ahol $\Phi = \pi$, bővíthető és most $\Phi = 3\pi/2$. Ez a bővítés azért lehetséges, mert $\varrho(Z,\ \varphi)$ függvény a $(\pi,\ 3\pi/2)$ intervallumban végig növekszik. Könnyen belátható, hogy az így nyert $(\varphi_0,\ 3\pi/2)$ intervallum még tovább bővíthető éspedig a közel 2π nagyságú $(\varphi_0,\ 5\pi/2 - \psi_0)$ intervallummá $(\varphi_0 = = \pi/2 + \psi_0)$. Tekintsük az alaphengerre írt csavarvonal érintőinek, azaz a csavarfelület alkotóinak az összességét. Essék a φ paraméterérték a $(\varphi_0,\ 3\pi/2)$ intervallumba és tekintsük ehhez a φ-hez tartozó alkotót, valamint az alaphengernek azt az érintősíkját, amely tartalmazza a φ-hez tartozó alkotót. Az alaphengernek az az érintősíkja, amely az előbbi érintősíknak tükörképe az (Y, Z) koordinátasíkra vonatkozóan, tartalmazza a $(3\pi/2 - \varphi) + + 3\pi/2 = 3\pi - \varphi$ paraméterértékhez tartozó alkotót. Ez a paraméterérték a $(3\pi/2,\ 5\pi/2)$ intervallumba esik. A szóbanforgó két alkotó a $Z = Z_0$ síkot két olyan pontban metszi, amelyeknek a Z-tengelytől való távolsága: $\sqrt{\varrho(Z_0,\ \varphi)}$ illetőleg $\sqrt{\varrho(Z_0,\ 3\pi - \varphi)}$. Nyilvánvaló, hogy e két pont X koordinátája abszolút értékben megegyezik. Ha a φ-hez tartozó alkotót az $(Y,\ Z)$ síkra vonatkozóan tükröztetjük a másik alkotót tartalmazó érintősíkra, akkor a közvetlen geometriai szemlélet mutatja, hogy a $(3\pi - \varphi)$-hez tartozó érintő metszéspontjának Y koordinátája nagyobb mint a φ-hez tartozó metszéspont $|Y|$ értéke. Ebből következik, hogy $\varrho(Z_0,\ 3\pi - \varphi) > \varrho(Z_0,\ \varphi)$. Ezzel megmutattuk, hogy abban az esetben, amikor a fogferdeség $\beta_a > 19^\circ\, 15'$ a$(\varphi_0,\ \Phi)$ intervallum $\Phi = 5\pi/2 - \psi_0 = 5\pi/2 - (\varphi_0 - \pi/2) = (3\pi - \varphi_0)$

[6]) A [4]) lábjegyzetben megadott $\cos \gamma_a = \cos \gamma \cdot \cos \alpha$ képlet szerint $\sin \beta_a = \sin \beta \cos \alpha$. Ez utóbbi összefüggésből következik, hogy ha $\beta \geq 20^\circ\, 57'$, akkor $\beta_a \geq 19^\circ\, 37'$. Vagyis a $\beta \geq 20^\circ\, 57'$ fogferdeség esetében a $(\varphi_0,\ \pi)$ intervallum bővíthető.

intervallumra bővíthető. Továbbá, mivel $\varphi_0 = \pi/2 + \psi_0$, ahol $\psi_0 < \pi/2z \leqq \pi/42$, azért most

$$\Phi - \varphi_0 > \frac{41}{21}\pi ,$$

és így a $(\varphi_0, 3\pi - \varphi_0)$ szakasznak megfelelő emelkedésnek, a teljes H emelkedéshez való viszonya $2\pi : 41/21\pi = 42/41$. Eszerint a (17) alatti képletben $\mu = 42/41$-nek választható és így a fogszélesség megengedhető értéke :

$$b = \frac{H}{\mu} = \frac{41 \cdot \pi \cdot d}{42 \operatorname{tg} \beta} ; \quad 45° > \beta \geqq 20° \, 57' . \tag{22}$$

A maximális $b = 2d$ fogszélesség esetén, ebből a képletből :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{41\pi}{84} .$$

ami $\beta \sim 56° \, 53'$ megengedhető fogferdeséget jelent. Természetesen (11') szerint csak $\beta \leqq 45°$ állhat fenn.

3. §.

A fogszélesség megengedhető értékére levezetett (22) alatti képlet érdekesen alkalmazható még az ún. evolvens csigára, amelyet csak azóta gyártanak minálunk, amióta a budapesti szovjet trolibuszok pótalkatrészeit idehaza gyártják. Az evolvens csiga tulajdonképpen olyan ferdefogazású homlokkerék, amelynek fogferdeségi szöge $\beta = 90° - \gamma$ nagy érték ($\beta =$ $= 64° - 86°$). A több menetből álló csiga esetében, a (11) képletben szereplő $\varphi_0 = \pi/2$, mivel a $\psi_0 = 0$. A csiga *egy* teljes menetének a $(\pi/2, 5\pi/2)$ intervallum felel meg. A (9') alatti kifejezésre a $\varphi = \varphi_0 = \pi/2$ helyen most, függetlenül a k értékétől, vagyis az emelkedési szög nagyságától, fennáll az

$$a^3(Z - a)(1 + k^2) > 0$$

egyenlőtlenség és így 2. § szerint $\varrho(Z, \varphi)$ abszolút minimumát a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban veszi fel. Mivel most $\Phi = 3\pi - \varphi_0 = 5\pi/2$, azért $\Phi - \varphi_0 = 2\pi$ és így $\mu = 1$. Tehát a megengedhető fogszélesség (22) alatti értéke csigára a következőképp módosul :

$$b = H = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta}$$

ahol $\beta > 20° \, 57'$. Ez az eredmény összhangban áll azzal, hogy a több ismétlődő menetből álló csigánál egy teljes körüljárásnál adódó H emelkedés felel meg a b fogszélességnek.

4. §.

Befejezésül a ferdefogazású kerék marására szolgáló ujjmaró profilgörbéjének [1] (60) alatt megadott egyenletére egy új levezetést adunk, amely a profilgörbét, mint egy hiperbolaseregnek a burkoló görbéjét származtatja.

A fogoldalt képező csavarfelületnek, mint az a sugarú alaphengerre írt csavarvonal érintői összességének az egyenletrendszerét az (x, y, z) derékszögű koordináta-rendszerben a következő alakban írhatjuk fel (lásd pl. : [3]) :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y &= a\sin\varphi + ta\cos\varphi \qquad\qquad c = ak,\ k = \operatorname{tg}\gamma_a \\ z &= c(\varphi - \varphi_0) + ct \end{aligned}$$

ahol φ és t paraméterek. Itt, ha φ egy fix érték és t változó, akkor a csavarfelület egyik egyenes alkotójának, mint térbeli egyenesnek az egyenletrendszerét kapjuk. Ha ezt az egyenest az x-tengely körül megforgatjuk, akkor egypalástú forgási hiperboloidot nyerünk. A különböző φ értékekhez tartozó egyenes alkotókat az x-tengely körül megforgatva, hiperboloidsereget nyerünk. Ennek a felületseregnek burkoló felülete lesz a maró szerszám forgásfelülete. Ha az egypalástú hiperboloidsereget az (x, y) koordinátasíkkal metsszük, akkor egy olyan hiperbolasereget nyerünk, amelynek burkoló görbéje a szerszám profilgörbéjét szolgáltatja az (x, y) síkban.

Jelentsen a fenti egyenletrendszerben φ egy fix értéket, tehát tekintsünk a φ-hez tartozó alkotót és forgassuk el ezt, az x-tengely körül α szöggel. Az így kapott térbeli egyenesnek az egyenletrendszere a következő :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)\cos\alpha - \big(c(\varphi - \varphi_0) + ct\big)\sin\alpha\ . \\ z &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)\sin\alpha + \big(c(\varphi - \varphi_0) + ct\big)\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

Ha ebben az egyenletrendszerben α változó — φ fix érték és t szintén változó — akkor az, a φ paraméterértékhez tartozó egypalástú forgási hiperboloid egyenletrendszerét jelenti. Az y és z előbbi kifejezéseiből adódik, hogy :

$$a\sin\varphi + ta\cos\varphi = \begin{vmatrix} y & -\sin\alpha \\ z & \cos\alpha \end{vmatrix}\ ;\ c(\varphi - \varphi_0) + ct = \begin{vmatrix} \cos\alpha & y \\ \sin\alpha & z \end{vmatrix}\ .$$

Most már a φ-hez tartozó hiperboloidot az (x, y) síkkal metszve, amikoris $z = 0$, az előbbi két egyenletből nyerjük, hogy

$$a\sin\varphi + ta\cos\varphi = y\cos\alpha\ ,\quad c(\varphi - \varphi_0) + ct = -y\sin\alpha\ .$$

Innen

$$y^2 = (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)^2 + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)^2\ ,$$

amit a fenti

$$x = a\cos\varphi - ta\sin\varphi$$

kifejezéssel összekapcsolva, annak a hiperbolának a paraméteres egyenletrendszerét jelenti, amelyet a φ-hez tartozó hiperboloidnak a $z = 0$ síkkal való metszésekor nyerünk. Tehát a φ-hez tartozó hiperbolának a paraméteres egyenletrendszere, ahol t a paraméter, a következő alakú :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - ta\sin\varphi \\ y^2 &= (a\sin\varphi + ta\cos\varphi)^2 + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)^2\ . \end{aligned} \tag{23}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Ha itt φ változó, akkor (23) hiperbolasereget ábrázol. Ennek a seregnek burkoló görbéje lesz a keresett szerszámprofilgörbe. A hiperbolasereg burkoló görbéjét úgy nyerjük, hogy a sereg előbbi egyenletrendszeréből a φ és t paraméterek közül az egyiket elimináljuk. Az eliminációhoz képeznünk kell az egyenletrendszer Jacobi-féle függvénydeterminánsát, amely a következő alakú :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} .$$

A $D = 0$ egyenletből az egyik paramétert a másikkal kifejezve és a nyert kifejezést a sereg egyenletrendszerébe helyettesítve olyan egyparaméteres egyenletrendszert kapunk, amely a burkoló görbét ábrázolja. Kiszámítjuk a D-ben fellépő differenciálhányadosokat :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a \sin\varphi - ta\cos\varphi ; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -a\sin\varphi$$

$$y\frac{\partial y}{\partial \varphi} = a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)(\cos\varphi - t\sin\varphi) + c^2(\varphi - \varphi_0 + t)$$

$$y\frac{\partial y}{\partial t} = a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0 + t) .$$

Ezekkel a kifejezésekkel felírjuk a következő másodrendű determinánst :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ y\frac{\partial y}{\partial \varphi} & y\frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = y \cdot D .$$

Ha ennek a másodrendű determinánsnak az első oszlopából kivonjuk a második oszlopát és azután az első oszlopból a közös t faktort kiemeljük, akkor az a következő alakú lesz :

$$-at \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\sin\varphi & a^2(\sin\varphi + t\cos\varphi)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0 + t) \end{vmatrix} = yD .$$

A baloldali determinánst kiszámítva, t-nek a következő elsőfokú kifejezését nyerjük :

$$t\cos\varphi(a^2 + c^2) + a^2\sin\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi .$$

Ez a kifejezés a φ-ben azonosan eltűnik, ha

$$t = -\frac{1}{a^2 + c^2}\,\frac{1}{\cos\varphi}\,[a^2\sin\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi] \qquad 0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

és ekkor, mivel $y \neq 0$

$$D = 0$$

is azonosan fennáll. t-nek most kiszámított értékét x és y^2 (23) alatti kifejezéseibe írva, nyerjük a burkoló görbe egyenletrendszerét:

$$x = a\cos\varphi + \frac{a}{a^2 + c^2}\,[a^2 \operatorname{tg}\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)]\sin\varphi \tag{24}$$

és egyszerű számolással:

$$y^2 = \frac{a^2 c^4}{(a^2 + c^2)^2}\bigl(\sin\varphi - (\varphi - \varphi_0)\cos\varphi\bigr)^2 + \frac{c^2 a^4}{(a^2 + c^2)^2}(\varphi - \varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi)^2 .$$

Mivel $c = ak$, ahol $k = \operatorname{tg}\gamma_a$, azért

$$a^2 + c^2 = a^2(1 + k^2) = \frac{a^2}{\cos^2\gamma_a}$$

és ennek felhasználásával:

$$y^2 = \frac{c^4}{a^2}\cos^4\gamma_a\cos^2\varphi\bigl(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0)^2 + c^2\cos^4\gamma_a\bigl(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0)\bigr)^2 =$$

$$= c^2\cos^4\gamma_a\left[\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi + 1\right]\bigl(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0)\bigr)^2 ;$$

innen pedig, mivel $\frac{c}{a} = \operatorname{tg}\gamma_a$,

$$y = a\sin\gamma_a[\sin^2\gamma_a\cos^2\varphi + \cos^2\gamma_a]^{1/2}\bigl(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi)\bigr) .$$

De

$$[\sin^2\gamma_a\cos^2\varphi + \cos^2\gamma_a]^{1/2} = (1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}$$

és így az y kifejezésének végleges alakja:

$$y = a\sin\gamma_a(1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}\bigl(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0)\bigr) . \tag{25}$$

Az x (24) alatti kifejezését meg a következőképpen alakíthatjuk át:

$$x = \frac{a^3\cos\varphi + ac^2\cos\varphi + a^3\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi + ac^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi}{a^2 + c^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2 + c^2}\left\{\frac{a^3}{\cos\varphi} + ac^2\bigl(\cos\varphi + (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi\bigr)\right\} .$$

Mivel az előbbiek szerint

$$\frac{1}{a^2 + c^2} = \frac{\cos^2\gamma_a}{a^2}, \qquad c = a\operatorname{tg}\gamma_a$$

azért

$$\frac{ac^2}{a^2 + c^2} = a\sin^2\gamma_a ,$$

amit x előbbi kifejezésébe írva:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\cos^2\gamma_a + a\sin^2\gamma_a(\cos\varphi + (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi) =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a\left(\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right) + a\sin^2\gamma_a(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a(-\operatorname{tg}\varphi + (\varphi - \varphi_0))\sin\varphi\,.$$

Ezt a kifejezést összekapcsolva a (25) alattival, a szerszám profilgörbéjére a következő paraméteres egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos\varphi} + a\sin^2\gamma_a(-\operatorname{tg}\varphi + (\varphi - \varphi_0))\sin\varphi \\ y &= a\sin\gamma_a(1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\varphi)^{1/2}(\operatorname{tg}\varphi - (\varphi - \varphi_0))\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Most már [1] cikk (60) alatti képlete ennek a profilgörbének egyenletrendszerét lényegében a következő alakban adja meg:

$$x = \frac{a}{\sin\varphi} - a\sin^2\gamma_a\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0\right]\cos\varphi$$

$$y = a\sin\gamma_a\left[\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0\right](1 - \sin^2\gamma_a\cos^2\varphi)^{1/2}\,.$$

Ez az egyenletrendszer könnyen azonosítható az általunk levezetett (26) alattival. Ugyanis a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi\,, \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \psi_0$$

helyettesítést végezve:

$$\operatorname{inv}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_0 = \operatorname{inv}(-\psi) - \psi_0 = -\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0$$

$$\sin\varphi = \cos\psi$$

$$\cos\varphi = -\sin\psi$$

és ezek felhasználásával az előbbi [1] (60) egyenletrendszer a következő alakú lesz:

$$x = \frac{a}{\cos\psi} + a\sin^2\gamma_a[-\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0]\sin\psi$$

$$y = a\sin\gamma_a(1 - \sin^2\gamma_a\sin^2\psi)^{1/2}[-\operatorname{tg}\psi + \psi - \psi_0]$$

ami, mivel a négyzetgyök $\pm$ előjelű, megegyezik a (26) alatti egyenletrendszerrel.

(Beérkezett 1958. VI. 12. Kiegészítve 1958. VII. 14.)

IRODALOM

[1] Ifj. Drahos I.—Hornyik L.—Hosszú M.: „Egy szerszám-geometriai probléma matematikai megoldása". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958).
[2] Szeniczei L.: *Az általános fogazás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1955.
[3] Lipka I.: „A csúszáskiegyenlítés problémájának analitikus megoldása ferdefogazású homlokkerekekre." *Gép* **6** (1954) 137—144.
[4] Vörös I.: *Gépelemek, III. (Fogaskerekek.)* Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ J. DRAHOS, L. HORNYIK И M. HOSSZÚ «РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ»

I. LIPKA

Резюме

Поверхность вращения инструмента для фрезерования спиральных поверхностей может быть определена как описывающая однопараметрового семейства поверхностей вращения. Радиус любого кругового сечения поверхности вращения инструмента равняется экстремуму радиусов окружностей, полученных при соответствующем сечении семейства поверхностей. Согласно исследованиям цитируемых в загаловке авторов этот экстремум должен быть минимумом, причём абсолютным минимумом в интервалле обработки для того, чтобы получить правильный профиль инструмента. Первая часть настоящей заметки изучает условие существования абсолютного минимума для случая пальцевой фрезы для обработки винтов с плоским ходом. Вторая часть изучает существование абсолютного минимума в случае пальцевой фрезы для косозубого зубнатого колеса и находит связь между широтой зубцов и их допустимой косостью.

BEITRAG ZUR ARBEIT »DIE MATHEMATISCHE LÖSUNG EINES WERKZEUGGEOMETRISCHEN PROBLEMS« VON JR. I. DRAHOS, L. HORNYIK und M. HOSSZÚ

von

I. LIPKA

Zusammenfassung

Die Umdrehungsfläche des Werkzeuges für Fräsen von Schraubenflächen lässt sich als Hüllfläche einer einparametrigen Umdrehungsflächen-Schar herstellen. Der Halbemesser eines beliebigen Kreisschnittes der Umdrehungsfläche des Werkzeuges ist Extremwert der Halbemesser der Kreise, die man am entsprechenden Schnitt der Flächenschar gewinnt. Im Sinne der Untersuchungen von I. Drahos, L. Hornyik und M. Hosszú (S. [1] in Literatur), muss dieser Extremwert ein Minimum sein, u. zw. im Abschnitt der Bearbeitung muss er ein absolutes Minimum sein, damit man das richtige Werkzeugprofil erhalte. Teil 1. des Beitrages behandelt die Bedingung für die Existenz eines absoluten Minimums im Falle des Profilfingerfräsers für flachgängige Schraubengewinde. Teil 2. untersucht die Bedingung des absoluten Minimums für Profilfingerfräser von Schrägzahnstirnrädern und stellt ausserdem einen Zusammenhang zwischen dem zulässigen Schrägungswinkel und der Zahnbreite auf. Teil 3. wendet die im Teil 2. behandelte Theorie auf die Evolventenschnecke an. Teil 4. behandelt das Problem der Profilkurve des Fingerfräsers von Schrägzahnstirnrädern nach einer neuen Methode.