

NEUTRONOK ATOMMAGREAKTOROKBAN VALÓ MOZGÁSÁNAK VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁI

MOGYORÓDI JÓZSEF

Bevezetés

E dolgozat az atommagreaktorokban lejátszódó neutronlassítási folyamat valószínűségi számítási vizsgálatával foglalkozik. A neutronlassítással kapcsolatban több probléma merül fel. Ezek közül PÁL LÉNÁRD [2] megoldotta valószínűségi számítási eszközökkel azt, hogy hány ütközéssel válik a keletkező neutron termikus neutronná. TAKÁCS LAJOS [1] azt a kérdést vizsgálta, hogy mennyi idő alatt válik a neutron termikussá, NÉMETH GÉZA és a szerző [3] közös dolgozata azt a további problémát tárgyalta, hogy a neutron bizonyos idő alatt hány ütközést végez. E dolgozat a neutronok térbeli mozgásával foglalkozik: a neutron által a lassító közegben a lelassulásig megtett úthossz valószínűségi számítási tárgyalását adja. A tárgyalás megtartja TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatának fogalmait és jelöléseit.

1. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű homogén közeget, amely k különböző típusú atommagból áll. Legyen a neutron energiája E és a neki megfelelő letargia $x = \log(E_0/E)$, ahol E_0 a neutron kezdeti energiája. Feltesszük, hogy a neutron a közeg atommagjaival történő ütközések során vagy szóródik, vagy abszorbeálódik. Jelölje az i -edik típusú atommagon történő ütközés sűrűségét $\gamma_i(x)$, a szóródási sűrűséget pedig $\gamma_i^*(x)$; ezek a neutron x letargiájának függvényei. Az ütközés modelljéről, mint az szokásos, feltesszük, hogy izotróp, azaz hogy az i -edik típusú atommagon történő szóródás alkalmával a neutron letargiájának növekedése független az ütközés előtti értéktől és a letargianövekedés eloszlásfüggvénye:

$$H_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \log(1/\alpha_i) \\ 1 - \alpha_i, & \text{ha } x > \log(1/\alpha_i) \end{cases}$$

ahol $\alpha_i = [(A_i - 1)/(A_i + 1)]^2$ és A_i a lassító közeg i -edik típusú atommagjának tömegszáma. Bevezetjük a $C(x) = \gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \dots + \gamma_k(x)$ és $C^*(x) = \gamma_1^*(x) + \gamma_2^*(x) + \dots + \gamma_k^*(x)$ rövidítéseket. Legyen η_t a letargia értéke a t időpontban és

$$\tau_x = \inf_{\eta_t > x} t.$$

Nyilván az η_i és τ_x mennyiségek valószínűségi változók. Végül legyen r_x a τ_x időpillanat eléréséig az egymásután következő ütközések között megtett egyenes úthosszak összege és A_x azon esemény, hogy a neutron a τ_x időpillanat eléréséig nem abszorbeálódik. r_x nyilván valószínűségi változó. Két egymásután következő ütközés közti egyenes úthossza mint valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ, és ha a neutron az x letargiaállapotban volt, akkor az exponenciális eloszlás paramétere $C(x)$. (Lásd: [1].) Szükségünk lesz a továbbiakban a $Q_1(x; z)$ eloszlásfüggvényre. Ez annak a valószínűsége, hogy a „ z ” kezdeti letargiaállapottal rendelkező neutron letargiája az első ütközés utáni pillanatban x -nél kisebb és az első ütközés nem vezetett abszorpcióra. TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatában megadta a $Q_1(x; z)$ függvényt explicit alakban:

$$Q_1(x; z) = \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) H_i(x-z)}{C(z)}.$$

Meg fogjuk határozni a

$$(1) \quad \mathbf{P}\{r_{x;z} < R, A_{x;z}\} = F(R, x; z)$$

valószínűséget. Ez annak a valószínűségét jelenti, hogy a z kezdeti letargiaállapottal rendelkező neutron az x letargiaállapot eléréséig nem abszorbeálódik és az addig befutott „térbeli törött vonal” hossza R -nél kisebb.

Az (1) valószínűséget R szerinti végtelen sor alakjában fogjuk előállítani.

Nyilván az (1) valószínűséget elég meghatározni $x \geq z$ esetére. Ugyanis $x < z$ esetén ez a valószínűség 0, mivel a neutronlassítás folyamatában a neutron letargiája növekszik. Ez formuláinkból is kitűnik.

Foglalkozunk még az úthossz momentumainak kiszámításával is.

2. §. Az $F(R, x; z)$ valószínűség vizsgálata

1. tétel. Az $F(R, x; z)$ valószínűség ($0 \leq z \leq x$, $R \geq 0$) az

$$(2) \quad F(R, x; z) = [1 - e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x-z)]}{C(z)} + \\ + \int_z^x \left\{ \int_0^R F(r, x; y) C(z) e^{-C(z)(R-r)} dr \right\} d_y Q_1(y; z)$$

egyenletnek tesz eleget. Ennek az egyenletnek egyetlen korlátos megoldása van és ez a megoldás kifejezhető a következő végtelen sor alakban:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j,$$

ahol a $G_j(x; z)$ függvények a

$$(4) \quad G_1(x; z) = C(z) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x-z)]}{C(z)}$$

kezdeti függvényből kiindulva sorjában az

$$(5) \quad G_j(x; z) + \frac{j+1}{C(z)} G_{j+1}(x; z) = \sum_{i=1}^k \int_z^x G_j(x; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z)$$

rekurzív képlet segítségével határozhatók meg.

Bizonyítás. Az az esemény, hogy a neutron a z letargiaértékről elindulva az x letargiaérték eléréséig R -nél kisebb utat tesz meg és az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik, két egymást kizáró módon jöhet létre: *a*) a neutron a z letargiaértéken R -nél kisebb utat tesz meg és ezen a letargiaszinten történő szóródás alkalmával a letargiája x értéknél nagyobb lesz; *b*) a z letargiaszinten történő szóródáskor a neutron letargiája z és x közé esik és az x letargiaszint eléréséig R -nél kisebb utat tesz meg. Az *a*) alatti esemény valószínűsége:

$$[1 - e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x - z)]}{C(z)} ;$$

ugyanis annak a valószínűségét, hogy a neutron a z letargiaértéken R -nél kisebb utat tesz meg, meg kell szorozni annak a valószínűségével, hogy a neutron a z letargiaértéken szóródik és letargiája a szóródás után x -nél nagyobb lesz. A *b*) esetben a neutron a z letargiaszinten történő első ütközésig $R - r$ hosszúságú utat tesz meg ($0 \leq r \leq R$), ütközéskor a letargiája y lesz ($z \leq y \leq x$) és az y letargiaértékről az x letargiaértékig eljutva r távolságnál rövidebb utat tesz meg. Ennek az összetett eseménynek a valószínűségét összegezve y és r szerint, kapjuk a *b*) alatti esemény valószínűségét. Az *a*) és *b*) alatti események valószínűségeinek összege adja (2)-t.

Osszuk el (2)-ben mindkét oldalt $\exp[-C(z)R]$ -rel. Az így kapott kifejezés az R változó szerint deriválható. Ugyanis az $F(R, x; z)$ függvény az R változó szerint egy integrál felső határának a függvénye és így folytonos. Ennélfogva az $F(R, x; z)$ integrálja a felső határ szerint differenciálható. A differenciálást elvégezve majd $C(z) \exp[C(z)R]$ -rel osztva, kapjuk a

$$(6) \quad F(R, x; z) + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial F(R, x; z)}{\partial R} = \sum_{i=1}^k \int_z^x F(R, x; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z) + \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x - z)]}{C(z)}$$

kifejezést. Nyilvánvaló, hogy (2) minden megoldása megoldása (6)-nak is, hiszen (6) a (2)-ből nyerhető R szerinti deriválással. Fordítva is igaz, hogy (6) minden megoldása, mely az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel, megoldása (2)-nek is. Tehát (2) helyett elegendő (6) olyan megoldásait keresni, melyek az $R = 0$ helyen 0 értéket vesznek fel. Ha az egyelőre határozatlan (3) végtelen sort a (6) összefüggésbe behelyettesítjük, együttható összehasonlítás alapján láthatjuk, hogy a (3) végtelen sor kielégíti (6)-ot — ennélfogva (2)-t

is, mivel (3) az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel —, ha csak az együtthatókat az (5) rekurzív összefüggés segítségével határozzuk meg. Ugyancsak (6) segítségével látható be az is, hogy a $G_1(x; z)$ kezdeti együtthatót a (4) összefüggés adja.

Annak belátásához, hogy a (3) végtelen sor, melynek együtthatóit a (4) és (5) összefüggések határozzák meg, megoldás, be kell még bizonyítani, hogy a (3) sor konvergens is. Ennek belátása nagyon egyszerűen történhetik. Jelölje a $|G_j(x; z)|$ felső korlátját M_j . A $C(z)$ ütközési sűrűség, mint a z függvénye, fizikai jelentése folytán korlátos: $C(z) \leq k$ (állandó), azonban ez a korlát függ attól, hogy milyen lassító közegről van szó. Az (5) rekurziós összefüggés szerint tehát:

$$|G_{j+1}(x; z)| \leq \frac{2}{j+1} M_j \cdot K,$$

azaz

$$M_{j+1} = \frac{2}{j+1} M_j \cdot K.$$

Mivel $M_1 = K$, amint az a (4) összefüggésből világosan látható, azért $M_j = (2k)^j/j!$. A (3) végtelen sor ekkor a következő módon becsülhető meg:

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |G_j(x; z)| R^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2K)^j}{j!} R^j = e^{2KR}.$$

A (3) végtelen sor tehát, melynek együtthatóit (4) és (5) határozzák meg, megoldása (6)-nak és így megoldása (2)-nek is.

Bebizonyítjuk most, hogy a (3), (4) és (5) által meghatározott megoldás előállítja az $F(R, x; z)$ valószínűséget. Azt fogjuk belátni, hogy a (2) illetve a (6) egyenleteknek csak egyetlen korlátos megoldása van és ez megegyezik a (3), (4) és (5) által meghatározott megoldással. Ebből már következik, hogy ez utóbbi megegyezik az $F(R, x; z)$ valószínűséggel, mert az $F(R, x; z)$ valószínűség kielégíti a (2), illetőleg a (6) egyenleteket és 0 és 1 közé esik.

Tegyük fel tehát, hogy $G(R, x; z)$ korlátos megoldása (6)-nak, azaz

$$|G(R, x; z)| \leq M$$

Belátjuk, hogy

$$f(R, x; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j - G(R, x; z) \equiv 0$$

Az $f(R, x; z)$ kielégíti a

$$(7) \quad f(R, x; z) + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial f(R, x; z)}{\partial R} = \sum_{i=1}^k \int_z^x f(R, x; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z)$$

egyenletet. Fennáll, hogy

$$|f(R, x; z)| \leq e^{2KR} + M$$

tetszőleges R , x és z esetén ($z \leq x$). Ennélfogva (7) alapján

$$\frac{1}{C(z)} \left| \frac{\partial f(R, x; z)}{\partial R} \right| \leq 2(e^{2KR} + M),$$

azaz

$$\left| \frac{\partial f(R, x; z)}{\partial R} \right| \leq 2K(e^{2KR} + M).$$

Továbbá (7) R szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f(R, x; z)}{\partial R} + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial^2 f(R, x; z)}{\partial R^2} = \sum_{i=1}^k \int_z^x \frac{\partial f(R, x; y)}{\partial R} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z)$$

és ebből látható, hogy

$$\left| \frac{\partial^2 f(R, x; z)}{\partial R^2} \right| \leq (2K)^2 (e^{2KR} + M).$$

Általában is igaz, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$\left| \frac{\partial^n f(R, x; z)}{\partial R^n} \right| \leq (2K)^n (e^{2KR} + M),$$

tetszőleges véges R , x és z esetén ($x \geq z$). Ez utóbbi összefüggést (7) sukcesszív deriválásával kaphatjuk meg. Ennélfogva tetszőleges $[0, R]$ korlátos intervallumban az $f(R, x; z)$ függvény végtelen Taylor-sorának maradéktagja felülről megbecsülhető:

$$\left| \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(R, x; z)}{\partial R^n} \cdot R^n \right| \leq \frac{(2KR)^n}{n!} (e^{2KR} + M).$$

A jobboldal rögzített R mellett tart a zérushoz, ha n tart a végtelenhez. Tehát az $f(R, x; z)$ függvény R változó szerinti $R = 0$ pont körüli végtelen Taylor-sora előállítja az $f(R, x; z)$ függvényt. Ámde ez a végtelen Taylor-sor azonosan 0. Ugyanis $f(0, x; z) = 0$ és így (7) alapján látható, hogy

$$\left. \frac{\partial f(R, x; z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0$$

továbbá (7) sukcesszív deriválásával belátható, hogy az $f(R, x; z)$ függvény akárhánysodikk deriváltja az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel. Valóban belátuk tehát, hogy

$$f(R, x; z) \equiv 0,$$

vagyis igaz az, hogy

$$G(R, x; z) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j,$$

tehát az (1) valószínűsége a következő előállítás érvényes:

$$F(R, z; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j.$$

A fentebbi megfontolással azt is ki lehet mutatni, hogy a (6) egyenletnek csak egyetlen olyan megoldása van, amelynek abszolút értéke korlátos, de ez a korlát függhet még R -től is.

Példa. Tekintsük azt a speciális esetet, mikor a lassító közeg hidrogénből áll, és $C(z) \equiv C$ (állandó), $C^*(z) \equiv C^*$ (állandó). Ebben az esetben bármilyen értéket vesz fel a neutron letargiája, ezen a letargiaértéken befutott út hossza exponenciális eloszlású ugyanazzal a C paraméterrel, azaz két ütközés között befutott út hosszának eloszlása nem függ a neutron letargiájának pillanatnyi értékétől. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a neutron a z és x letargiaszintek között R -nél kisebb utat tesz meg, csak az $x - z$ különbségtől függ, azaz $F(R, x; z) = F(R, x - z)$ vagyis, ha $x - z = t$, akkor $F(R, x; z) = F(R, t)$. A (2) egyenlet ebben a speciális esetben a következő egyszerű alakot ölti:

$$(8) \quad F(R, t) = \varrho(1 - e^{-CR})e^{-t} + \int_0^t \left\{ \int_0^R F(r, t-u) C e^{-C(R-r)} dr \right\} \varrho e^{-u} du,$$

ahol $\varrho = C^*/C$ és, hidrogén lassítóközegről lévén szó, a $H(x)$ eloszlásfüggvény itt megegyezik az 1 paraméterű exponenciális eloszlással. Ennek az egyenletnek megoldását a Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével is megkaphatnánk. Azonban az általános eredmények illusztrálása céljából ugyanúgy járunk el, mint fentebb, és a megoldást végtelen sor alakban állítjuk elő, majd pedig ezt a végtelen sort zárt alakra hozzuk. (4) alapján látható, hogy

$$G_1(t) = \varrho C e^{-t},$$

továbbá az (5) rekurziós formula segítségével teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges j index esetén

$$G_j(t) = \sum_{n=1}^j \frac{(-1)^{j-n} \varrho^n C^j}{(n-1)! (j-n)! j} [\Gamma(n-1, t) - \Gamma(n, t)],$$

ahol $\Gamma(n, t)$ az n -edrendű nem teljes Γ -függvény:

$$\Gamma(n, t) = \frac{\int_0^t u^{n-1} e^{-u} du}{(n-1)!}.$$

Tehát az $F(R, t)$ valószínűség végtelen sor-alakja:

$$F(R, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^j \frac{(-1)^{j-n} \varrho^n C^j}{(n-1)! (j-n)! j} [\Gamma(n-1, t) - \Gamma(n, t)] \right) R^j.$$

Adjuk meg ezt a végtelen sort zárt alakban! Mivel a sor konvergencia az egész $[0, \infty)$ intervallumban, azért szabad tagonként deriválni. Deriválás után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F(R, t)}{\partial R} = \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} \left(\sum_{n=1}^j \frac{(-1)^{j-n} \varrho^n C^j}{(n-1)! (j-n)!} [\Gamma(n-1, t) - \Gamma(n, t)] \right).$$

Az összegezés sorrendjét a jobboldalon megváltoztatva nyerjük, hogy

$$\frac{\partial F(R, t)}{\partial R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n [\Gamma(n-1, t) - \Gamma(n, t)] R^{n-1} C^n}{(n-1)!} e^{-CR}.$$

Az összegezés sorrendjének megváltoztatása azért lehetséges, mert ez utóbbi sor abszolút konvergens. Ebből, figyelembe véve, hogy

$$\Gamma(n-1, t) - \Gamma(n, t) = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!},$$

kapjuk az $F(R, t)$ valószínűség R szerinti deriváltját:

$$(9) \quad \frac{\partial F(R, t)}{\partial R} = \varrho C e^{-t} e^{-CR} I_0(2(\varrho C R t)^{1/2}),$$

ahol $I_0(t)$ a nulladrendű módosított Bessel-függvény:

$$I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Figyelembe véve, hogy $F(R, t)$ az $R = 0$ helyen 0 értéket vesz fel, (9) integrálásával megkapjuk (8) megoldását:

$$(10) \quad F(R, t) = \varrho C e^{-t} \int_0^R e^{-Cu} I_0(2(\varrho C u t)^{1/2}) du.$$

A továbbiakban szükségünk lesz még az $F(R, t)$ függvény R szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltjára. (10) segítségével könnyen megkapható az $F(R, t)$ valószínűség R szerinti $\psi(s, t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\psi(s, t) = \frac{\varrho C}{s + C} e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s + C}\right)t}.$$

A Laplace—Stieltjes transzformált ismerete alapján az $F(R, t)$ függvény $R = \infty$ helyen vett értékét könnyen meghatározhatjuk, ugyanis $\psi(0, t) = F(\infty, t)$, mivel $F(0, t) = 0$. Tehát

$$\psi(0, t) = F(\infty, t) = \mathbf{P}\{A_t\} = \varrho e^{-(1-\varrho)t}.$$

Ezt az eredményt TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatában is megtalálhatjuk, bár ő más úton jutott el hozzá.

3. §. A törött vonal hosszának feltételes várható értéke az x letargiaérték eléréséig

A továbbiakban szükségünk lesz TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatának néhány fogalmára és jelölésére. Legyen $Q_n(x)$ annak a valószínűsége, hogy a neutron az n -edik ütközés utáni pillanatban x -nél kisebb letargiaállapotban van és az első n ütközés nem vezetett abszorpcióra. A $Q_n(x)$ valószínű-

ségek a következő rekurzív képlet segítségével határozhatók meg:

$$Q_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és $n = 1, 2, \dots$ esetén

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^k \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} dQ_{n-1}(y) .$$

Legyen továbbá

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) .$$

Hasonlóképpen definiáljuk a $Q_n(x; z)$ függvényt is:

$$Q_0(x; z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq z \\ 0, & \text{ha } x < z \end{cases}$$

és

$$Q_n(x; z) = \sum_{i=1}^k \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} d_y Q_{n-1}(y; z) , \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

A $Q_n(x; z)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy a z letargiaértékről elinduló neutron a z letargiaértéktől számított n -edik ütközés utáni pillanatban x -nél kisebb letargiaállapotban van és ez az n ütközés nem vezetett abszorpcióra. Itt a fentebbieknek megfelelően:

$$M(x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x; z) .$$

Nilván $M(x; 0) = M(x)$.

2. tétel. *A törött vonal hosszának várható értéke azon feltétel mellett, hogy a z letargiaértékről elinduló neutron az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik, a következő:*

$$\mathbf{M}\{r_{x;z} | A_{x;z}\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{x;z}\}} \int_z^x \left\{ 1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u; y) \right\} \frac{1}{C(y)} d_y M(y; z) .$$

Bizonyítás. A várható érték összetevődik azoknak az utaknak a várható értékéből, amelyeket a neutron a különböző y letargiájú állapotokban befut ($z \leq y \leq x$). Ha a neutron a szóródásra vezető ütközés által az y letargiájú állapotba jut, akkor az y letargiájú állapotban befutott út várható értéke $1/C(y)$. Ez az út azonban csak akkor veendő figyelembe $r_{x;z}$ várható értékének meghatározásánál, ha a neutron az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik; ennek a valószínűsége:

$$1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u; y) .$$

Ez utóbbi valószínűséget TAKÁCS LAJOS [1] dolgozatában adta meg.

Hasonló módon fel lehetne írni az r_x ; törött vonal hosszának magasabbrendű momentumait is, azonban ezek igen bonyolultak lennének.

Példa. Tekintsük ismét azt a speciális esetet, mikor $C^*(x) \equiv C^*$ és $C(x) \equiv C$ (állandók), továbbá a hidrogén lassító közeg esetéről van szó. Mint előbb már láttuk, ebben a speciális esetben az út hosszának eloszlását megadó valószínűség, amíg a neutron a z letargiaállapotból az x letargiaállapotba eljut, a letargiától csak az $x - z$ különbségen keresztül függ. Ebből következik, hogy a feltételes várható érték is csak a letargiakülönbségtől függ. Tehát ha $x - z = t$, akkor e speciális esetben a feltételes várható értékre adott képlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{M}\{r_t | A_t\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_t\}} \int_0^t \left\{ 1 - \int_y^x \left[1 - \frac{C^*}{C} \right] d_u M(u; y) \frac{1}{C} dM(y) \right\} .$$

Láttuk az előző paragrafusban, hogy

$$\mathbf{P}\{A_t\} = \varrho e^{-(1-\varrho)t} ,$$

ahol $\varrho = C^*/C$. Továbbá az [1] dolgozatban foglaltak szerint:

$$M(x) = 1 + \frac{\varrho}{1-\varrho} (1 - e^{-(1-\varrho)x}) \quad \text{és} \quad M(x; y) = M(x - y) .$$

Ekkor a várható értékre fent adott képlet segítségével egyszerű számításokkal adódik, hogy

$$\mathbf{M}\{r_t | A_t\} = \frac{1}{C} + \frac{\varrho t}{C} .$$

Ezt az eredményt és az összes többi magasabbrendű momentumokat megkaphatjuk más úton is, az $F(R, t)$ valószínűség $\psi(s, t)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjának ismerete alapján. Ismeretes, hogy az $F(R, t)$ R változó szerinti n -edik momentumát megkaphatjuk, ha vesszük az R változó szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltjának n -edik deriváltját az $s = 0$ helyen $(-1)^n$ előjellel. Az n -edik derivált értékét az $s = 0$ helyen könnyen megkaphatjuk, ha a

$$\psi(s, t) = \frac{\varrho C}{s + C} e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s + C}\right)t}$$

kifejezést az s változó szerint sorbafejtjük. Az s^n együtthatójának $(-1)^n n!$ -szorososa szolgáltatja a derivált értékét az $s = 0$ helyen.

Exponenciális és binomiális sorfejtés segítségével könnyen belátható, hogy

$$\frac{\varrho C}{s + C} e^{-\left(1 - \frac{\varrho C}{s + C}\right)t} = \varrho e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+n}{n} \left(\frac{s}{C}\right)^n .$$

Ez a sorfejtés biztosan érvényes az $|s| < C$ körben. Ennélfogva az s^n együtthatója

$$\varrho e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^k}{k!} (-1)^n \binom{k+n}{n} \frac{1}{C^n} .$$

Ennek $(-1)^n n!$ -szorososa, azaz az n -edik momentum:

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\varrho t)^k (k+1)(k+2)\dots(k+n) .$$

Ez még a következő alakban is írható:

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^n (\varrho t)^{k+n}}{d(\varrho t)^n} = \frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \frac{d^n}{d(\varrho t)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho t)^{k+n}}{k!} ,$$

illetőleg

$$\frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} .$$

Ennélfogva a törött vonal hosszának n -edik feltételes momentuma az A_t feltétel mellett

$$\frac{1}{\varrho e^{-(1-\varrho)t}} \frac{\varrho e^{-t}}{C^n} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} .$$

Meg kell jegyeznünk, hogy az n -edik feltételes momentum az A_t feltétel mellett kifejezhető az n -edik Laguerre-polinom segítségével. Ugyanis

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} = \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right]_{x=-\varrho t} .$$

Ámde

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right] = e^{-x} L_n(x) ,$$

ahol $L_n(x)$ az n -edik Laguerre-polinom. Ennélfogva

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x) \right]_{x=\varrho t} = \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right]_{x=-\varrho t} = e^{\varrho t} L_n(-\varrho t) ,$$

így az n -edik feltételes momentum az A_t feltétel mellett:

$$\frac{L_n(-\varrho t)}{C^n} .$$

Speciálisan az első momentum, mint azt már láttuk:

$$\frac{1}{C} + \frac{\varrho t}{C} .$$

Az első momentumra kapott eredmény igen kézenfekvő. Az $(1+\varrho t)/C$ összegben a második tagban t nemcsak a letargiát jelenti, hanem azt is, hogy átlagosan hány ütközés történik. Az ütközések átlagos számát, mint a [4] könyvben is, úgy számítjuk ki, hogy a letargia-megváltozást osztjuk az egy ütközésre eső átlagos letargianövekedéssel. Hidrogén esetében az átlagos letargianövekedés 1, ennél fogva t valóban az ütközések átlagos számát adja meg, míg a neutron az ütközések során t letargiamegváltozást szenved. t ütközés

alatt megtett átlagos úthosszat úgy kapjuk meg, hogy az egy ütközésre eső átlagos úthosszat, az $1/C$ -t, megszorozzuk az ütközések számával. A ϱ tényező azon neutronok részarányát adja meg, melyek az ütközések során nem abszorbeálódnak. — Az első momentum kifejezésében az $1/C$ tag szerepét az világítja meg, hogy, ha $t = 0$, azaz a letargiamegváltozás 0, akkor is a neutron átlagos úthossza azon a letargiaértéken, amelyről elindult, éppen $1/C$ -vel egyenlő.

A második momentum a következő:

$$\frac{1}{C^2} [2 + 4\varrho t + \varrho^2 t^2] .$$

Ennélfogva a feltételes szórás:

$$\frac{1}{C^2} [1 + 2\varrho t] .$$

Látható, hogy a szórás a letargianövekedésnek lineáris függvénye.

(Beérkezett: 1957. V. 1. Átdolgozva: 1958. VIII. 1.)

IRODALOM

- [1] TAKÁCS L.: „Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűség-számítási problémáról”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 55—56.
- [2] PÁL L.: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 41—54.
- [3] MOGYORÓDI J.—NÉMETH G.: „Atommagreaktorokban végbemenő neutronlassítás-folyamattal kapcsolatos valószínűség-számítási problémákról”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 335—348.
- [4] GLASSSTONE, S.—EDLUND, M. S.: *The elements of nuclear reactor theory*. Van Nostrand, New York, 1952.

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДВИЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ В АТОМНЫХ РЕАКТОРАХ

J. MOGYORÓDI

Резюме

Настоящая работа занимается с одной проблемой движения нейтронов в атомных реакторах. Исследуется распределение длины пути, пробеганного нейтроном в замедляющей среде атомного реактора в процессе замедления.

Математическая модель проблемы следующая: предположим, что замедляющая среда бесконечна и однородна. Пусть эта среда состоит из атомных ядер k различных типов. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент времени $t = 0$ (фиксированной) начальной энергией E_0 и в момент времени t соответственно E . В процессе замедления нейтрон столкнется с

атомными ядрами замедляющей среды и потеряет случайно некоторую долю энергии. Следовательно, летаргия x нейтрона, определенная равенством:

$$x = \log(E_0/E) ,$$

случайно возрастает при каждом столкновении. Предположим, что рассеяние нейтрона изотропно. Это значит, что увеличение летаргии в случае рассеяния не зависит от её значения до столкновения. Пусть $\gamma_i(x)$ и $\gamma_i^*(x)$ обозначают соответственно плотность столкновения и плотность рассеяния, происходящих на ядрах i -ого типа. Пусть далее $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$, $C^* = \gamma_1^* + \dots + \gamma_k^*$, где эти величины вообще говоря зависят от летаргии нейтрона.

Пусть $F(R, x; z)$ вероятность того, что длина пути, пробеганного нейтроном в замедляющей среде, меньше, чем R , в то время, как его летаргия возрастает от значения z до значения x и нейтрон до достижения летаргии x не поглощается (последнее событие: $A_{x; \cdot}$).

Автор показал на основе вышеупомянутой математической модели, что вероятность $F(R, x; z)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$F(R, x; z) = [1 - e^{-C(R)}] \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x - z)]}{C(z)} + \\ + \sum_{i=1}^k \int_z^x \{F(r, x; y) C(z) e^{-C(z)(R-r)} dr\} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} dy H_i(y - z) .$$

Здесь функция $H_i(x)$ — функция распределения увеличения нейтрона при одном столкновении. Ему удалось дать эту вероятность в форме степенного ряда:

$$(3) \quad F(R, x; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j$$

Коэффициенты степенного ряда (3) выражаются рекурсивной формулой

$$G_j(x; z) + \frac{j+1}{C(z)} G_{j+1}(x; z) = \sum_{i=1}^k \int_z^x G_j(x; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} dy H_i(y - z) ,$$

и начальным коэффициентом:

$$G_1(x; z) = C(z) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x - z)]}{C(z)} ,$$

Автор определил условное математическое ожидание длины пути нейтрона при условии $A_{x; z}$.

В специальном случае даны конечный вид вероятности $F(R, x; z)$ и условных моментов пути нейтрона.

PROBABILISTIC TREATMENT OF THE MOTION OF NEUTRONS IN NUCLEAR REACTORS

by
J. MOGYORÓDI

Abstract

This paper deals with a problem of the motion of the neutrons in nuclear reactors; it investigates the distribution of the path-length of the neutron in the slowing-down medium of the nuclear reactor.

The mathematical model of the problem is as follows: we suppose that the slowing-down medium is infinite and homogeneous. Let this medium consist of atomic nuclei of k different types. Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy E_0 at the moment $t = 0$ and E at the moment t , respectively. The neutron collides in the slowing-down process with the nuclei of the slowing-down medium and it loses a certain part of his energy. Consequently the lethargy x of the neutron, defined by the following relation:

$$x = \log (E_0/E) ,$$

increases at random at every collision. We suppose that the scattering of the neutron is isotropic, that is the collisions are such that in case of scattering the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let $H_i(x)$ be the distribution function of the increase of the lethargy at the scattering on a nucleus of type i . Let $\gamma_i(x)$ and $\gamma_i^*(x)$ denote the collision density and the scattering density of the neutron, respectively on a nucleus of type i . Put $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$, $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_k^*$; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron.

Let $F(R, x; z)$ denote the probability that the path-length of the neutron in the slowing-down medium is less than R , while its lethargy increases from the value z to the value x and during this time the neutron will be not absorbed (event $A_{x;z}$).

On the basis of this mathematical model, the author proved that the probability $F(R, x; z)$ satisfies the following integral equation:

$$F(R, x; z) = [1 - e^{-C(z)R}] \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x-z)]}{C(z)} + \\ + \sum_{i=1}^k \int_z^x \left\{ \int_0^R F(r, x; y) C(z) e^{-C(z)(R-r)} dr \right\} \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} dy H_i(y-z) .$$

He has succeeded in giving this probability in form of an infinite power series in R :

$$(3) \quad F(R, x; z) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x; z) R^j .$$

The coefficients of (3) may be obtained by the recursive formula :

$$G_j(x; z) + \frac{j+1}{C(z)} G_{j+1}(x; z) = \sum_{i=1}^k \int_z^x G_j(x; y) \frac{\gamma_i^*(z)}{C(z)} d_y H_i(y - z) ,$$

from the initial coefficient :

$$G_1(x; z) = C(z) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i^*(z) [1 - H_i(x - z)]}{C(z)} .$$

Author determined the conditional expectation of the path-length of the neutron under the condition $A_{x;z}$. Under simplified suppositions the probability (3) and the conditional expectation are given explicitly.