

KOMBINATORIKUS MÓDSZER A SZÁLLÍTÁSI PROBLÉMA MEGOLDÁSÁRA

EGERVÁRY JENŐ

A lineáris programozás egyik alapfeladata, a szállításprobléma, a következő minimumfeladat megoldását teszi szükségessé. Adva van k számú termelő hely, melyek ugyanazt a terméket állítják elő, és pedig a

$$\begin{aligned} T_1 \text{ termelő hely tárol } v_1 \text{ egységet} \\ T_2 \text{ termelő hely tárol } v_2 \text{ egységet} \\ \dots\dots\dots \\ T_k \text{ termelő hely tárol } v_k \text{ egységet.} \end{aligned}$$

Adva van továbbá l fogyasztó hely, melyek a fenti termékeket igénylik és pedig az

$$\begin{aligned} F_1 \text{ fogyasztó hely igényel } \mu_1 \text{ egységet} \\ F_2 \text{ fogyasztó hely igényel } \mu_2 \text{ egységet} \\ \dots\dots\dots \\ F_l \text{ fogyasztó hely igényel } \mu_l \text{ egységet.} \end{aligned}$$

Először az egyszerűsítés érdekében feltesszük, hogy a termelő helyeken tárolt összes termék egyenlő a fogyasztó helyek összes szükségletével, azaz

$$(1) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_k = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l$$

Legyen továbbá egy egység szállítási költsége a T_i termelő helyről az F_j fogyasztó helyre c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$), és tegyük fel, hogy ezek a szállítási költségek nem-negatív egész számok.

Kérdés, hogy kell a szállítást optimálisan megszervezni, vagyis a szállítási összköltséget minimumra redukálni.

Legyen a T_i termelési helyről az F_j fogyasztási helyre szállítandó egységek száma x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$). Feltetés szerint a T_i termelési hely v_i egységet tárol, tehát a T_i termelési helyről elszállított termékek összegére fenn kell állnia az

$$(2) \quad x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{il} = v_i$$

egyenletnek ($i = 1, 2, \dots, k$).

Ugyancsak feltetés szerint az F_j fogyasztási hely μ_j egységet igényel, tehát az F_j fogyasztási helyre szállítandó termékek összegére fenn kell állnia az

$$(3) \quad x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{kj} = \mu_j$$

egyenletnek ($j = 1, 2, \dots, l$).

A szállítás összköltsége a fentiek szerint nyilván

$$(4) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij} x_{ij}.$$

A szállítási probléma matematikai megfogalmazásban tehát azt jelenti, hogy a (4) lineáris forma minimumát kell meghatározni a (2) és (3) feltételi egyenletek és — a probléma természetéből folyó — $x_{ij} \geq 0$ feltételi egyenlőtlenségek kielégítése mellett ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$).

Hogy az alább kifejtendő módszer lényegét szemléletesen bemutathassuk, foglalkozzunk először a szállítási problémának azzal az egyszerű speciális esetével, melyben a termelő és fogyasztási helyek száma megegyezik, továbbá mindegyik termelő hely egy egységet tárol és mindegyik fogyasztó hely egy egységet igényel. Ebben az esetben a szállítási probléma ekvivalens az ún. hozzárendelési problémával („assignment problem”). Mindegyik termelő helyről ugyanis az ott tárolt egységet valamelyik fogyasztó helyre kell szállítani és a feladat éppen abban áll, hogy a

T_1 termelő helyhez egy F_{i_1} fogyasztó helyet,

T_2 termelő helyhez egy F_{i_2} fogyasztó helyet,

.....

T_n termelő helyhez egy F_{i_n} fogyasztó helyet

úgy rendeljünk hozzá, hogy a szállítás összköltségét szolgáltató

$$(5) \quad c_{1i_1} + c_{2i_2} + \dots + c_{ni_n}$$

„permutációs összeg” minimális legyen. Nyilván a különböző permutációs összegek száma $n!$ és a szállítási probléma megoldása céljából ezen összegek közül a legkisebbet kell kikeresnünk.

A keresett minimum egy (valóságos szállítási problémánál elő nem forduló) esetben triviális módon evidenssé válik, ti. akkor, ha a nem-negatív c_{ij} elemekből álló n -edrendű kvadratikus matrix tartalmaz n „független 0-elemet”, vagyis n olyan 0-t, melyek közül nincs kettő ugyanabban a sorban vagy oszlopban. Ekkor ugyanis ezek a 0-ok egy olyan permutációs összeget alkotnak, mely nyilván kisebb (vagy legalább nem nagyobb), mint az összes többi permutációs összeg. Meg fogjuk mutatni, hogy egy alkalmas transzformációval mely a permutációs összegek nagysági sorrendjét változtatlanul hagyja, nem-negatív elemű kvadratikus matrix olyan matrixba transzformálható, mely n független 0-elemet tartalmaz, melyre nézve tehát a minimum-feladat megoldása triviális.

Tekintsük először a $\gamma_{ij} = u_i + v_j$ elemekből álló

$$(6) \quad \begin{bmatrix} u_1 + v_1 & u_1 + v_2 & \dots & u_1 + v_n \\ u_2 + v_1 & u_2 + v_2 & \dots & u_2 + v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n + v_1 & u_n + v_2 & \dots & u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

n -edrendű kvadratikus matrixot. Az ezen matrixból képezhető

$$(7) \quad \begin{aligned} \gamma_{1i_1} + \gamma_{2i_2} + \dots + \gamma_{ni_n} = \\ = u_1 + v_{i_1} + u_2 + v_{i_2} + \dots + u_n + v_{i_n} = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \end{aligned}$$

permutációs összegek nyilván mind egyenlők egymással. Ha tehát a kiindulási $[c_{ij}]$ matrixból a

$$(8) \quad [c'_{ij}] = [c_{ij} - \gamma_{ij}] = [c_{ij} - u_i - v_j]$$

matrixot képezzük, akkor a transzformált $[c'_{ij}]$ matrixhoz tartozó

$$(9) \quad c'_{1i_1} + c'_{2i_2} + \dots + c'_{ni_n}$$

permutációs összegek mindegyike a

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$$

mennyiséggel lesz kisebb, mint az eredeti

$$(11) \quad c_{1i_1} + c_{2i_2} + \dots + c_{ni_n}$$

permutációs összegek. A (8) transzformáció tehát a permutációs összegek nagysági sorrendjét változtatlanul hagyja. Ha tehát tudunk olyan (8) alakú transzformációt találni, melynek végrehajtása után a transzformált $[c'_{ij}]$ matrix n független 0-elemet tartalmaz és továbbra is nem-negatív elemekkel bír, akkor a szállítási probléma most tárgyalt speciális esetét megoldottuk, mert a független 0-ok megadják a termelési helyeknek és a fogyasztási helyeknek azt (vagy legalábbis egy olyan) egymáshoz rendelését, melynél a szállítások összköltsége minimális.

Például az

$$(12) \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

negyedrendű matrix esetén az

$$(13) \quad u_1 = 1; u_2 = 0; u_3 = -2; u_4 = 2; v_1 = 0; v_2 = 3; v_3 = 0; v_4 = 3$$

értékekkel végrehajtott (8) típusú transzformáció a következő eredményt adja:

$$(14) \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+0 & 1+3 & 1+0 & 1+3 \\ 0+0 & 0+3 & 0+0 & 0+3 \\ -2+0 & -2+3 & -2+0 & -2+3 \\ 2+0 & 2+3 & 2+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az így nyert negyedrendű transzformált matrix már tartalmaz négy független 0-elemet (lásd a vastagon szedett 0-okat!) és az ezeknek megfelelő

$$1 + 3 + 1 + 2 = 7$$

permutációs összeg a keresett minimum.

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy a kívánt tulajdonságú transzformált matrixhoz véges számú iteratív lépésben mindig eljuthatunk. Azt, hogy a transzformált matrix minden sora és minden oszlopa legalább egy 0-elemet tartalmazzon és amellet az összes elemek nem-negatívok maradjanak, elérhetjük triviális módon:

1° Vonjuk ki mindegyik sor elemeiből az illető sor legkisebb elemét. A fenti példa esetén adódik:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2° Vonjuk ki mindegyik oszlop elemeiből az illető oszlop legkisebb elemét. A fenti példa esetén ez a transzformáció a (15) jobboldalán szereplő matrixot változatlanul hagyja. (Nyilván az 1° és 2° transzformációk (8)-nak speciális esetei).

Az így transzformált matrix nyilván legalább n 0-elemet tartalmaz, de még nem tartalmaz szükségképpen n független 0-elemet.

A további (8) típusú transzformációk, melyek véges számú lépésben n független 0-elemet tartalmazó és nem-negatív elemekkel bíró transzformált matrixot eredményeznek, egy kombinatorikus tételre alapulnak, melyet jelen dolgozat szerzője 1931-ben publikált [1]:

Ha egy kvadrátikus matrix elemei nem-negatív egész számok, akkor az olyan vonalak (sorok vagy (és) oszlopok) minimális száma, melyek az összes 0-elemeket tartalmazzák, egyenlő a matrixban található független 0-elemek maximális számával.

Szemléletesebb fogalmazásban: Ha az n -edrendű matrixban található 0-elemek „lefedéséhez” legalább k ($\leq n$) vonal (sor, oszlop) szükséges, akkor ezen matrix elemei közt van k (de nem több) olyan 0-elem, melyek közül nincs kettő egy vonalban (sorban, oszlopban).

Tegyük fel mármost, hogy a fenti 1°, 2° triviális transzformációval nyert matrix — az általános esetnek megfelelően — nem tartalmaz n független 0-elemet és legyen a belőle kiválasztható független 0 elemek maximális száma $k < n$. Ekkor az idézett [1] tétel szerint az összes 0-elemek fedhetők k vonallal. Alkalmazzuk most a következő (8) típusú transzformációkat:

I° Vonjuk ki a matrix valamennyi eleméből a legkisebb *fedetlen* elemet. Ezáltal a matrix egyes elemei negatívokká válnak.

II° Ezeknek a negatív elemeknek a kiküszöbölése céljából adjuk hozzá a 0-elemeket fedő vonalak minden eleméhez a fenti legkisebb fedetlen elemet.

Az I°, II° lépésekből álló transzformációnál nyilván az összes elemek nem-negatívok maradnak.

Ha továbbá a legkisebb fedetlen elem ε volt, akkor az I° lépésnél a matrix-elemek összege $n^2 \varepsilon$ -nal csökken, a II° lépésnél pedig $n k \varepsilon$ -nal növekszik, tehát végeredményben a most leírt transzformációnál a matrixelemek összege $n(n - k) \varepsilon$ -nal csökken. Mindaddig tehát, amíg a transzformált matrix 0-elemei $k < n$ vonallal fedhetők, az elemek összege egy újabb transzformáció által

$n(n - k)\varepsilon$ -nal csökkenthető. Ily módon nyilván véges számú lépésben eljutunk egy olyan transzformált matrixhoz, melynek 0-elemei kevesebb, mint n vonallal nem fedhetők.

Ekkor azonban a fentidézett [1] tétel szerint a transzformált matrixban található n olyan 0 elem, melyek közül nincs kettő egy vonalban és ezek a 0-elemek a termelő és fogyasztó helyeknek olyan egymáshoz rendelését adják, melynél a szállítási összköltség minimális.

Például a fenti (12) matrix 0-elemei az első oszloppal, a harmadik oszloppal és a harmadik sorral, azaz összesen $3 (< 4)$ vonallal fedhetők (a nyíllal megjelölt oszlopok, illetve sorok mutatják a fedővonalakat) :

$$(16) \quad \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A (16) matrix minden eleméből a legkisebb fedetlen elemnek, 3-nak a kivonásával adódik (17). Végül a fedővonalak minden eleméhez 3-at hozzáadva, nyerjük a transzformált (18) matrixot :

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ennek a negyedrendű matrixnak az elemei már nem fedhetők kevesebb mint 4 vonallal, ez a matrix tehát az idézett tétel szerint szükségképpen tartalmaz 4 független 0-elemet. A vastagon szedett 0-ok függetlenek és az azoknak megfelelő permutációs összeg : $1 + 3 + 1 + 2$ valóban a már korábban megállapított minimumot szolgáltatja.

A szállítási probléma most tárgyalt speciális esetéről könnyen áttérhetünk az általános esetre. Tegyük fel, hogy

a $T_1, \dots, T_{v_1}$ termelési helyeket egyesítjük egy v_1 egységet tároló $\tilde{T}_1$,

a $T_{v_1+1}, \dots, T_{v_1+v_2}$ termelési helyeket egyesítjük egy v_2 egységet tároló $\tilde{T}_2$,

.....

a $T_{n-v_k+1}, \dots, T_n$ termelési helyeket egyesítjük egy v_k egységet tároló $\tilde{T}_k$ termelési helyé. Továbbá

az $F_1, \dots, F_{\mu_1}$ fogyasztási helyeket egyesítjük egy μ_1 egységet igénylő $\tilde{F}_1$,

az $F_{\mu_1+1}, \dots, F_{\mu_1+\mu_2}$ fogyasztási helyeket egyesítjük egy μ_2 egységet igénylő $\tilde{F}_2$,

.....

az $F_{n-\mu_l+1}, \dots, F_n$ fogyasztási helyeket egyesítjük egy μ_l egységet igénylő $\tilde{F}_l$ fogyasztási helyé.

Ekkor a

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1l} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{k1} & \mathbf{C}_{k2} & \dots & \mathbf{C}_{kl} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \\ c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \end{bmatrix}}_{\nu_i \text{ oszlop}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \\ c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{ij} & c_{ij} & \dots & c_{ij} \end{bmatrix}} \right\} \mu_j \text{ sor}$$

hipermatrixhoz tartozó hozzárendelési probléma nyilván ekvivalens a következő általános szállítási problémával:

$$(20) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 & & \tilde{F}_l & \\ \hline \tilde{T}_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} & \leftarrow \nu_1 \\ \hline \tilde{T}_2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} & \leftarrow \nu_2 \\ \hline \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \hline \tilde{T}_k & c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kl} & \leftarrow \nu_k \\ \hline & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ & \mu_1 & \mu_2 & & \mu_l & \end{array}$$

ahol $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ illetve $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ a $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_k$ termelési helyekről elszállítandó, illetve az $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_l$ fogyasztási helyekre szállítandó egységek számát jelentik és c_{ij} továbbra is az egység $\tilde{T}_k$ termelési helyről $\tilde{F}_l$ fogyasztási helyre való szállításának költsége.

Példaképpen bemutatjuk a következő szállítási problémát

$$(21) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 & \tilde{F}_3 & \tilde{F}_4 & \tilde{F}_5 & \\ \hline \tilde{T}_1 & 10 & 20 & 5 & 9 & 10 & \leftarrow 9 \\ \hline \tilde{T}_2 & 2 & 10 & 8 & 30 & 6 & \leftarrow 4 \\ \hline \tilde{T}_3 & 1 & 20 & 7 & 10 & 4 & \leftarrow 8 \\ \hline & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & \end{array}$$

amely az előbb mondottak szerint a következő hozzárendelési problémával ekvivalens:

(22)

10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	20	20	20	20	20	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
2	2	2	10	10	10	10	10	8	8	8	8	30	30	30	30	30	30	6	6	6	6
2	2	2	10	10	10	10	10	8	8	8	8	30	30	30	30	30	30	6	6	6	6
2	2	2	10	10	10	10	10	8	8	8	8	30	30	30	30	30	30	6	6	6	6
2	2	2	10	10	10	10	10	8	8	8	8	30	30	30	30	30	30	6	6	6	6
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4
1	1	1	20	20	20	20	20	7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4

$\mu_1 = 3$ $\mu_2 = 5$ $\mu_3 = 4$ $\mu_4 = 6$ $\mu_5 = 3$

$v_1 = 9$
 $v_2 = 4$
 $v_3 = 8$

A fentebb kifejtett transzformációs módszerrel nyerjük, hogy a szállítás összköltsége az ábrán kijelölt hozzárendelésnél minimális, azaz a

$$\text{Spur} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 20 & 6 \\ 1 & 20 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} \\ x_{15} & x_{25} & x_{35} \end{bmatrix}$$

lineáris forma az

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 9,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 4,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 8,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 3$$

$$x_{ij} \geq 0$$

feltételek mellett az

$$(23) \quad \begin{aligned} x_{11} &= 0, & x_{12} &= 0, & x_{13} &= 4, & x_{14} &= 5, & x_{15} &= 0 \\ x_{21} &= 0, & x_{22} &= 4, & x_{23} &= 0, & x_{24} &= 0, & x_{25} &= 0 \\ x_{31} &= 3, & x_{32} &= 1, & x_{33} &= 0, & x_{34} &= 1, & x_{35} &= 3 \end{aligned}$$

értékekre veszi fel minimumát és ez a minimum 150-nel egyenlő.

A hozzárendelési probléma és a szállítási probléma ily módon felismert ekvivalenciája esetleg érdekes elméletileg, de eredeti formájában semmiesetre sem ad kényelmesen használható segédeszközt a numerikus megoldásra. Avégből, hogy ezen ekvivalencia alapján egy gyakorlatilag is alkalmas módszert alakíthassunk ki, a következő megjegyzéseket bocsátjuk előre.

Az általános szállítási problémához tartozó (20) matrix az ekvivalens hozzárendelési probléma (19) matrixából származtatható azáltal, hogy bizonyos sorokat illetve oszlopokat egyetlen sorrá illetve oszloppá egyesítünk. Ezért közelfekvő az a gondolat, hogy a (20) matrix minden egyes vonalához megfelelő multiplicitást rendelünk hozzá és pedig $[c_{ij}]$ i -edik sorához a v_i multiplicitást és a j -edik oszlophoz a μ_j multiplicitást rendeljük. Ennek megfelelően, ha a c_{ij} elemeknek valamely részhalmazát az i_1 -edik, i_2 -edik, $\dots$ i_p -edik sorból és a j_1 -edik, j_2 -edik, $\dots$ j_q -edik oszlopból álló vonalrendszer tartalmazza, akkor azt fogjuk mondani, hogy ez a részhalmaz $v_{i_1} + v_{i_2} + \dots + v_{i_p} + \mu_{j_1} + \mu_{j_2} + \dots + \mu_{j_q}$ multiplicitásösszegű vonalrendszerrel van fedve.

A c_{ij} elemeket ezúttal is iteratív lépésekben a

$$(24) \quad c_{ij}^{(\alpha+1)} = c_{ij}^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)} - v_j^{(\alpha)}; \quad c_{ij}^{(0)} = c_{ij}; \quad c_{ij}^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

transzformációkkal addig módosítjuk (átlagban csökkentjük), míg egy olyan transzformált matrixhoz jutunk, melynek 0-elemeit nem lehet n -nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel fedni.

Ezen előkészítő megjegyzések után bebizonyítjuk a következőket:

Ha a $[c_{ij}^{(\alpha)}]$ matrix összes 0-elemei fedhetők n -nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel, akkor megadható egy olyan (8) típusú transzformáció, mely az

$$S_\alpha = \sum_i \sum_j v_i \mu_j c_{ij}^{(\alpha)}$$

összeget legalább n -nel csökkenti.

Ily módon véges számú lépésben eljutunk egy olyan $[c_{ij}^{(\omega)}]$ matrixhoz, melynek 0-elemeit nem lehet n -nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel fedni. Ekkor a $[c_{ij}^{(\omega)}]$ matrix 0-elemei egyértelmű hozzárendelést létesítenek a $\tilde{T}_i$ termelő helyek és az $\tilde{F}_j$ fogyasztó helyek között. Továbbá ezen 0-elemek mindegyikéhez egyszerű utasítással hozzárendelhető egy olyan multiplicitás, melynél

az i -edik sorban levő 0-elemek multiplicitásösszege v_i

a j -edik oszlopban levő 0-elemek multiplicitásösszege μ_j .

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $[c_{ij}^{(\alpha)}]$ matrix 0-elemei az i_1 -edik, i_2 -edik $\dots$ i_p -edik sorból és a j_1 -edik, j_2 -edik, $\dots$ j_q -edik oszlopból álló vonalrendszerrel fedhetők és hogy a multiplicitásösszegre fennáll

$$(25) \quad v_{i_1} + v_{i_2} + \dots + v_{i_p} + \mu_{j_1} + \mu_{j_2} + \dots + \mu_{j_q} < n$$

továbbá jelöljük $[c_{ij}^{(\alpha)}]$ legkisebb fedetlen elemét ε -nal.

Vonjunk most ki a $[c_{ij}^{(q)}]$ matrix minden eleméből ε -t és azután az i_1 -edik, i_2 -edik, $\dots$ i_p -edik sor és a j_1 -edik, j_2 -edik, $\dots$ j_q -edik oszlop elemeihez adjunk hozzá ε -t. (Ezek a műveletek (8) típusú transzformációk.)

Ily módon egy új $[c_{ij}^{(q+1)}]$ matrixot kapunk, melynek elemei nem-negatívak és amelyre (25) szerint

$$S_{a+1} = S_a - n \left(n - \sum v_{i_a} - \sum \mu_{j_\beta} \right) \varepsilon \leq S_a - n \varepsilon .$$

Ennek a transzformációnak az iterálása nyilván végül egy olyan $[c_{ij}^{(q)}]$ matrixot eredményez, melynek 0-elemei nem fedhetők n -nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel. Ez esetben azonban a fentebb idézett tétel garantálja, hogy a megfelelő hipermatrix n olyan 0-elemet tartalmaz, melyek közül nincs kettő ugyanabban a sorban vagy oszlopban. Ha mármost a $[c_{ij}^{(q)}]$ matrix mindegyik 0-eleméhez azt a multiplicitást rendeljük, amely a (19) hipermatrix megfelelő C_{ij} blokkjában levő 0-elemek számával egyenlő, akkor ezek a multiplicitások a (2), (3) feltételeknek is eleget tesznek és így a szállítási probléma megoldását szolgáltatják.

Ezen multiplicitások meghatározása tulajdonképpen ekvivalens egy új, *kompatibilis* lineáris egyenletrendszer megoldásával. Azonban — kivételes esetektől eltekintve — ezeknek a multiplicitásoknak a meghatározása könnyű feladat, mert, ha a $[c_{ij}^{(q)}]$ matrix i -edik sora (illetve j -edik oszlopa) egyetlen 0-elemet tartalmaz, akkor ezen 0-elemhez nyilván v_i (illetve μ_j) multiplicitás rendelendő. Hasonlóképp járhatunk el, ha a $[c_{ij}^{(q)}]$ matrix i -edik sora (illetve j -edik oszlopa) egyetlen olyan 0-elemet tartalmaz, melynek multiplicitása még ismeretlen, mert ekkor ehhez a 0-elemhez olyan multiplicitás rendelendő, mely a többi (már ismert) multiplicitások összegét v_i -re (illetve μ_j -re) egészíti ki.

A módszer részletes kivitelét a fentebb (21) táblázattal megadott szállítási példán mutatjuk be.

(26)

10	20	5	9	10	$v_1 = 9$
2	10	8	30	6	$v_2 = 4$
1	20	7	10	4	$v_3 = 8$
$\mu_1 = 3$	$\mu_2 = 5$	$\mu_3 = 4$	$\mu_4 = 6$	$\mu_5 = 3$	

Vonjuk ki minden sor elemeiből az illető sor legkisebb elemét :

(27)

5	15	0	4	5	9
0	8	6	28	4	4
0	19	6	9	3	8
3	5	4	6	3	

Vonjuk ki minden oszlop elemeiből az illető oszlop legkisebb elemét

$$(28) \quad [c_{ij}^{(1)}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \downarrow & 5 & 7 & 0 & 0 & \downarrow 2 & 9 \\ \hline \rightarrow & 0 & 0 & 6 & 24 & 1 & 4 \\ \hline & 0 & 11 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ \hline & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & \end{array}$$

Az így nyert $[c_{ij}^{(1)}]$ matrix 0-elemei

- a 9 multiplicitású első sorral
- a 4 multiplicitású második sorral
- a 3 multiplicitású első oszloppal és
- a 3 multiplicitású ötödik oszloppal,

tehát $9 + 4 + 3 + 3 = 19$ multiplicitásösszegű vonalrendszerrel fedhetők.

Most alkalmazzuk a fentebb leírt transzformációt, tehát $[c_{ij}^{(1)}]$ összes elemeiből kivonjuk a legkisebb fedetlen elemet, azaz 5-öt és aztán az első és második sor, valamint az első és ötödik oszlop elemeihez 5-öt hozzáadunk. Ily módon adódik

$$(29) \quad [c_{ij}^{(2)}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \downarrow & 10 & 7 & 0 & 0 & \downarrow 7 & 9 \\ \hline \rightarrow & 5 & 0 & 6 & 24 & 6 & 4 \\ \hline & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & \end{array}$$

A (29) ábra szerint $[c_{ij}^{(2)}]$ 0-elemei $3 + 4 + 6 + 3 + 4 = 20$ multiplicitásösszegű vonalrendszerrel fedhetők. $[c_{ij}^{(2)}]$ összes elemeiből kivonjuk a legkisebb fedetlen elemet 6-ot és aztán az első, harmadik, negyedik, ötödik oszlop és a második sor elemeihez hozzáadunk 6-ot. Ily módon adódik

$$(30) \quad [c_{ij}^{(3)}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 10 & 1 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ \hline 11 & 0 & 12 & 30 & 12 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & \end{array}$$

$[c_{ij}^{(3)}]$ -elemeinek fedéséhez legalább 21 multiplicitásösszegű vonalrendszer szükséges. A fentiek szerint tehát $[c_{ij}^{(3)}]$ már a szállítási probléma megold-

dását fogja szolgáltatni. $[c_{ij}^{(9)}]$ 0-elemei a termelő helyek és a fogyasztó helyek egymáshoz rendelését határozzák meg. Ezután még az egyes 0-elemek multiplicitását kell megkeresnünk. Az első, harmadik és ötödik oszlop, valamint a második sor egyetlen 0-át tartalmaz. Tehát 0_{31} , 0_{22} , 0_{13} és 0_{35} multiplicitásai rögtön megadhatók. (Lásd a (31) ábrát, ahol a multiplicitások megfelelő számú ponttal vannak ábrázolva.)

0_{32} multiplicitása 4-et 5-re és 0_{14} multiplicitása 4-et 9-re egészíti ki. Végül a 0_{34} elemhez nyilván 1 multiplicitást kell hozzárendelni.

(31)

10	20	5	9	10	9
2	10	8	20	6	4
1	20	7	10	4	8
3	5	4	6	3	

A szállítási költségeknek beírása után a (31). ábrát nyerjük, melyből a minimális szállítási összköltségre (23)-mal megegyezésben

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 4 = 150$$

adódik.

A gyakorlatilag fontos feladat, melynél az egyes termelő helyekről elszállítható egységek száma egyenlőtlenségek által van korlátozva, a fenti eljárás csekély módosításával megoldható, mégpedig úgy, hogy a szállítási költségek $[c_{ij}]$ mátrixához egy 0-okból álló oszlopot csatolunk. Ennek a 0 oszlopnak a beiktatása azt fejezi ki, hogy a termékek egy részével kapcsolatban szállítási költségek nem merülnek fel, mert egy része a termékeknek a termelő helyeken visszamarad.

A módszer általánosításának bemutatása céljából induljunk ki a fenti példából, melynek adatait annyiban módosítjuk, hogy a $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_3$ termelőhelyek mindegyikénél 9 tárolt egységet tételezünk fel. Ekkor a szállítási probléma táblázata a következő lesz

(32)

10	20	5	9	10	0	9
2	10	8	30	6	0	9
1	20	7	10	4	0	9
3	5	4	6	3	6	

(Az utolsó oszlop alján beírt 6 egység a termelő helyeken szükségképpen visszamaradó terméket jelenti.)

Ez esetben minden sor tartalmaz már egy 0-elemet, tehát a kezdeti transzformáció abban fog állni, hogy minden oszlop elemeiből levonjuk az oszlop legkisebb elemét:

$$(33) \quad [c_{ij}^{(1)}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \\ \rightarrow & 9 & 10 & 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 21 & 2 & 0 & 9 \\ \hline & 0 & 10 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ \hline & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 6 & \end{array}$$

Az így nyert $[c_{ij}^{(1)}]$ matrix 0-elemei fedhetők a (33). ábrán feltüntetett vonalrendszerrel, melynek multiplicitásösszege 26 (< 27), tehát a (8) típusú transzformáció alkalmazható. Minden elemből levonunk 1-et és azután a fedő sorok és fedő oszlopok minden eleméhez hozzáadunk 1-et. Ily módon adódik

$$[c_{ij}^{(2)}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 10 & 11 & 0 & 0 & 7 & 1 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 20 & 2 & 0 & 9 \\ \hline 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 6 & \end{array}$$

melynek elemei 27-nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel nem fedhetők. Eszerint $[c_{ij}^{(2)}]$ 0-elemei már a termelő helyek és fogyasztó helyek egymáshoz rendelését adják. Továbbá a fenti utasítással a 0_{31} , 0_{22} , 0_{13} és 0_{35} 0-elemek multiplicitása rögtön adódik, majd ezek segítségével 0_{14} és 0_{25} multiplicitása, mindezek alapján 0_{36} multiplicitása, végül 0_{34} multiplicitása.

A szállítási költség beírásával ezúttal az alábbi

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 10 & 20 & 5 & 9 & 10 & 0 & 9 \\ \hline 2 & 10 & 8 & 30 & 6 & 0 & 9 \\ \hline 1 & 20 & 7 & 10 & 4 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 6 & \end{array}$$

táblázatot nyerjük, mely szerint a minimális szállítási költség most 140-nel egyenlő.

Nyilván az összköltség csökkenése ez esetben annak a következménye, hogy a termékek szállítása szempontjából a raktárkészletekre vonatkozó egyenlőtlenségek kevesebb megkötést jelentenek, mint az előbbi példában szereplő egyenletek.

Ha végül a fenti példa adatait azzal a módosítással tartjuk meg, hogy a $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_3$ termelő helyek mindegyike 10 (vagy több) egységet tárol, akkor

az optimális szállítási költség tovább csökken. Ennek az esetnek ugyanis az alábbi táblázat felel meg

10	20	5	9	10	0	10
2	10	8	30	6	0	10
1	20	7	10	4	0	10
3	5	4	6	3	9	

(A termelési helyeken 9 egység marad vissza.) Ezúttal is minden oszlopból levonva az illető oszlop legkisebb elemét, adódik

9	10	0	0	6	0	10
1	0	3	21	2	0	10
0	10	2	1	0	0	10
3	5	4	6	3	9	

Az így nyert matrix 0-elemeinek fedéséhez legalább 30 multiplicitás-összegű vonalrendszer szükséges. Ez a matrix tehát már megadja a keresett hozzárendelést és miután az első öt oszlop mindegyike egyetlen 0-elemet tartalmaz, ezeknek a multiplicitásai azonnal felírhatók és azt a triviális tényt szemléltetik, hogy mindegyik fogyasztó hely egész szükségletét arról a termelő helyről kell ellátni, ahonnan a szállítási költség minimális. Végül az alábbi táblázat mutatja,

10	20	5	9	10	0	10
2	10	8	30	6	0	10
1	20	7	10	4	0	10
3	5	4	6	3	9	

hogy a minimális szállítási összköltség ez esetben 139.

(Beérkezett : 1958. november 18.)

IRODALOM

- [1] EGERVÁRY, J. : „Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól.” *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931) 16—28. Lásd még : KÜHN, H. W.—TUCKER, A. W. (editors) : *Linear inequalities*. Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1956. Bibliography, [92].

- [2] KUHN, H. W.: „On the problem of shortest path between points.” *Bulletin of the American Mathematical Society* 59 (1953).
 [3] FLOOD, M. M.: „The travelling-salesman problem.” *Journal of the Operations Research* 4 (1956).
 [4] EGERVÁRY, E.: „Bemerkung zum Transportproblem.” *Mathematik, Technik und Wirtschaft-Mitteilungen* (1958) 278—284.

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕВОЗКИ

J. EGERVÁRY

Резюме

Из матрицы n -ого порядка $[a_{ij}]$ состоящей из неотрицательных целых элементов, можно составить $n!$ различных сумм вида $a_{1v_1} + a_{2v_2} + \dots + a_{nv_n}$. В проблеме сопоставления (assignment problem) нужно определить наименьшую из этих сумм. Решение тривиально, если матрица содержит n таких 0-элементов, никакая пара которых не принадлежит одному и тому же столбцу или строке. В настоящей работе автор — используя опубликованную им в 1931-ом году [1] комбинаторную теорему — сводит общий случай к этому очевидному случаю.

Автор доказывает далее, что общая проблема перевозки (предполагая что все фигурирующие в ней данные — целые числа) может быть решена аналогичным методом.

Метод, опубликованный в работе, согласно свидетельству опытов, требует значительно меньше вычислительной работы, чем другие известные методы (например, метод симплексов).

COMBINATORICAL METHOD FOR SOLVING THE TRANSPORT PROBLEM

by

E. EGERVÁRY

Abstract

Let $[a_{ij}]$ be a matrix of order n whose elements are non-negative integers. One can form $n!$ different „permutation sums” $a_{1v_1} + a_{2v_2} + \dots + a_{nv_n}$ (where $v_1, v_2, \dots, v_n$ is a permutation of the numbers $1, 2, \dots, n$), and the so called assignment problems consists in determining the least such sum. The solution is trivial if the matrix contains n elements which are equal to 0 and are such that no two of them are lying in the same row or column. The general case can be reduced to this trivial case by using a combinatorial theorem of the author, published in 1931 (see [1]).

In the present paper it is shown that the general transport problem can also be solved by a similar method (provided that all data are nonnegative integers) by attributing multiplicities to the rows and columns of the matrix of the transport problem.

Experience has shown that the method published in the present paper requires less numerical work than other known methods (e. g. the simplex method).