ÜBER ÄHNLICHE LINEARE TRANSFORMATIONEN IN ENDLICHDIMENSIONALEN RÄUMEN

von

L. GEHÉR

Wir nennen eine lineare Transformation T eines linearen normierten Räumes *gleichmässig beschränkt,* wenn es eine positive Konstante K derart gibt, dass $\| T^n \| \leqq K$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.[1]

B. Sz.-Nagy [1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Jede gleichmässig beschränkte vollstetige lineare Transformation T eines Hilbertschen Raumes ist ähnlich einer Kontraktion, d. h. es existiert eine umkehrbare lineare Transformation A mit $\| A T A^{-1} \| \leqq 1$.

B. Sz.-Nagy stellte die Frage, ob dieser Satz nicht nur in Hilbertschen Räumen, sondern auch in allgemeinen linearen normierten Räumen (d. h. in Banachschen Räumen) gültig ist? Hier werden wir mit einer matrixtheoretischen Methode zeigen, dass dieser Satz in jedem Raum l_n^p gilt: l_n^p $(p \geqq 1)$ ist der lineare Raum aller n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von komplexen Zahlen, mit der Norm

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p}$$

wenn $1 \leqq p < \infty$ und mit der Norm

$$\| x \|_\infty = \max_i | x_i |$$

wenn $p = \infty$.

Wir werden mit dem Beweis einer einfachen Behauptung für Matrizen anfangen.

1. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{I}_r$ bzw. $\boldsymbol{N}_r$ die $r \times r$-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Unter einer linearen Transformation eines linearen normierten Raumes (in sich) werden wir immer eine überall definierte, beschränkte lineare Transformation verstehen. Die Norm $\| T \|$ einer linearen Transformation T wird durch $\| T \| = \sup_{\|x\|=1} \| Tx \|$ definiert.

Wir nennen eine quadratische Matrix $\boldsymbol{J}$ eine Jordansche Matrix, wenn sie sich als direkte Summe endlich vieler Matrizen von der Form $\lambda \boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{N}_r$, d. h. in der Form

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{k} \dot{+} (\lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} + \boldsymbol{N}_{r_i})$$

darstellen lässt. Offenbar besitzt dann $\boldsymbol{J}$ $\sum_{i=1}^{k} r_i$ Zeilen und Spalten.

Es sei $\boldsymbol{T}$ eine beliebige $n \times n$-Matrix. Bekanntlich ist $\boldsymbol{T}$ ähnlich einer und nur einer Jordanschen Matrix [2], d. h. es existiert eine umkehrbare $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ mit

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \dot{+} (\lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} + \boldsymbol{N}_{r_i})$$

Wir behaupten:

Lemma. *Es existiert eine Folge B_1, B_2, ... von umkehrbaren $n \times n$-Matrizen mit*

$$\boldsymbol{B}_m \boldsymbol{T} \boldsymbol{B}_m^{-1} \to \sum_{i=1}^{k} \dot{+} \lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} \quad \textit{für} \quad m \to \infty .$$

Beweis. Es seien

$$\boldsymbol{C}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{C}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_m$; beide sind umkehrbare Matrizen. Dann ist

$$\boldsymbol{B}_m \boldsymbol{T} \boldsymbol{B}_m^{-1} = \boldsymbol{C}_m \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{C}_m^{-1} = \boldsymbol{C}_m \boldsymbol{J} \boldsymbol{C}_m^{-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \dot{+} \left(\lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} + \frac{1}{m} \boldsymbol{N}_{r_i}\right) \to \sum_{i=1}^{k} \dot{+} \lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i}$$

für $m \to \infty$, w. z. b. w.

2. Es sei T eine lineare Transformation von l_n^p $(p \geq 1)$. (Es soll in folgendem die Matrix einer linearen Transformation von l_n^p mit demselben, aber dicken Buchstaben bezeichnet werden.) Es sei

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{k} \dot{+} (\lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} + \boldsymbol{N}_{r_i})$$

die Jordansche Normalform der Matrix $\boldsymbol{T}$ von T, und wir setzen

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=1}^{k} \dot{+} \lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i} .$$

Nach dem Lemma ist $\boldsymbol{B}_m \boldsymbol{T} \boldsymbol{B}_m^{-1} \to \boldsymbol{D}$ für $m \to \infty$. Aus der Konvergenz der Matrizen folgt aber die Konvergenz in Norm der linearen Transformationen:

$$(1) \qquad \lim_{m\to\infty} \| B_m T B_m^{-1} - D \|_p = 0$$

(dies gilt auch in jedem *endlichdimensionalen* linearen normierten Raum) Offenbar ist $\| D \|_p = \max\limits_{1\leq i\leq k} |\lambda_i|$. Nach (1) hat man dann

$$\inf_m \| B_m T B_m^{-1} \|_p \leqq \inf_m \| B_m T B_m^{-1} - D \|_p + \| D \|_p = \| D \|_p = \max_{1\leq i\leq k} |\lambda_i| \,.$$

Wir klassifizieren nun die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ von T folgendermassen: zur ersten Klasse gehören diejenigen Eigenwerte von T, die in der Jordanschen Normalform $\boldsymbol{J}$ von $\boldsymbol{T}$ auch in einem Block von mindestens zweiter Ordnung vorkommen, zur zweiten Klasse gehören die übrigen Eigenwerte von T. Wir können mit einer Umnumerierung immer erreichen, dass die zur ersten Klasse gehörigen Eigenwerte (falls diese Klasse nicht leer ist) gleich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sind.

Wir nehmen an, dass die zweite Klasse nicht leer ist und die Bedingung

$$(B) \qquad \max_{1\leq i\leq j} |\lambda_i| < \max_{j\leq i\leq k} |\lambda_i|$$

erfüllt ist. (Im Falle, dass die erste Klasse leer ist, soll $0 < \max\limits_{1\leq i\leq k} |\lambda_i|$ angenommen werden.)

Wir betrachten die durch

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0)$$

und

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots 0, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n)$$

definierten Projektionen P und Q; dabei ist $s = \sum\limits_{i=1}^{j} r_i$. Die linearen Transformationen D und $T_m = B_m\, T\, B_m^{-1}$ sind offenbar mit P und Q vertauschbar.

Fall 1. $1 \leqq p < \infty$. Wir wählen m so gross, dass die Bedingung

$$(2) \qquad \| P T_m \|_p < \| D \|_p$$

erfüllt ist. Das ist möglich, weil $\| P T_m - P D \|_p \leqq \| T_m - D \|_p \to 0$ für $m \to \infty$, und $\boldsymbol{PD} = \dot{\sum\limits_{i=1}^{j}} + \lambda_i \boldsymbol{I}_{r_i}$, also nach (B)

$$\| PD \|_p = \max_{1\leq i\leq j} |\lambda_i| < \max_{1\leq i\leq k} |\lambda_i| = \| D_p \|$$

gilt. Da

$$QT_m = QD = DQ$$

ist, so gilt für jedes Element $x \in l_n^p$ die folgende Ungleichung:

$$\|T_m x\|_p^p = \|PT_m Px + QT_m Qx\|_p^p = \|PT_m Px\|_p^p + \|QT_m Qx\|_p^p \leqq$$

$$\leqq \|D\|_p^p \|Px\|_p^p + \|D\|_p^p \|Qx\|_p^p = \|D\|_p^p (\|Px\|_p^p + \|Qx\|_p^p) =$$

$$= \|D\|_p^p \|x\|_p^p = (\max_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i|)^p \|x\|_p^p$$

d. h.

$$\|B_m T B_m^{-1}\|_p = \max_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i| \qquad \text{für} \qquad m \geqq m_0 . \tag{3}$$

Fall 2: $p = \infty$. Dann ist $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$. Wir wählen m wieder so gross, dass (2) erfüllt ist. Dann ist für jedes $x \in l_n^\infty$

$$\|T_m x\|_\infty = \|PT_m Px + QT_m Qx\|_\infty =$$

$$= \max\{\|PT_m Px\|_\infty , \|QT_m Qx\|_\infty\} \leqq$$

$$\leqq \max\{\|D\|_\infty \|Px\|_\infty , \|D\|_\infty \|Qx\|_\infty\} = \|D\|_\infty \|x\|_\infty ,$$

also besteht (3) auch im Falle $p = \infty$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. a) *Die untere Grenze der Normen der linearen Transformationen des Raumes l_n^p ($1 \leqq p \leqq \infty$), die einer gegebenen linearen Transformation T von l_n^p ähnlich sind, ist* $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i|$, *wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von T bedeuten.*

b) *Ist für die Eigenwerte von T auch die Bedingung (B) erfüllt, so existiert eine umkehrbare lineare Transformation B von l_n^p mit* $\|BTB^{-1}\|_p = \max\limits_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i|$.

Ist T speziell gleichmässig beschränkt, so gilt der folgende

Satz 2. *Jede gleichmässig beschränkte lineare Transformation T von l_n^p ($1 \leqq p \leqq \infty$) ist ähnlich einer Kontraktion von l_n^p, d. h. es existiert eine umkehrbare lineare Transformation B von l_n^p mit* $\|BTB^{-1}\|_p \leqq 1$.

Beweis. Offenbar ist dann $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i| \leqq 1$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i| < 1$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 1. a).

Fall 2: $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} |\lambda_i| = 1$. Dann ist (B) erfüllt. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den in [1] gegebenen Beweis: Ist λ ein Eigenwert von T, der auch in einem Block von J von mindestens zweiter Ordnung vorkommt, so gibt es zwei Elemente $x, y \in l_n^p$, $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$ und $Ty = x + \lambda y$. Dann ist $T^m y = m \lambda^{m-1} x + \lambda^m y$. Hieraus folgt $\lim\limits_{m \to \infty} \|T^m y\|_p = \infty$, wenn $|\lambda| = 1$ ist. Das ist aber in Widerspruch mit der gleichmässigen Beschränktheit von T.

Für $p = 2$ ist unser Satz 2. in dem erwähnten Satz von Sz.-Nagy B. [1] enthalten.

(Eingegangen 31. Januar 1959.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Sz.-Nagy B.: »Completely continuous operators with uniformly bounded iterates«, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.*

[2] Keller, O. H.: *Analytische Geometrie und lineare Algebra*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

A VÉGES DIMENZIÓJÚ TEREK HASONLÓ LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓIRÓL

GEHÉR LÁSZLÓ

Kivonat

1. Tétel: Az l_n^p tér egy adott T lineáris transzformációjához hasonló transzformációi normájának alsó határa $\max\limits_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i|$, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ T-nek sajátértékei.

Ha (B) is teljesül, akkor van olyan megfordítható C lineáris transzformáció, amelyre $\|CTC^{-1}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i|$.

2. Tétel: l_n^p minden egyenletesen korlátos transzformációja hasonló egy kontrakcióhoz.

О ПОДОБНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

L. GEHÉR

Резюме

Теорема 1. Нижняя грань норм преобразований, подобных с данным линейным преобразование T пространства l_n^p, есть $\max\limits_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i|$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ суть собственные значения T.

Если выполняется и (B), то существует такое обратимое линейное преобразование C, для которого $\|CTC^{-1}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq k} |\lambda_i|$.

Теорема 2. Всякое равномерно ограниченное преобразование l_n^p подобно с некоторой контракцией.