UN TYPE NOUVEAU DES PROBLÈMES AUX LIMITES DE LA CONDUCTION DE LA CHALEUR

par

GEORGES ADLER

Introduction

Il est d'usage de distinguer trois sortes de conditions aux limites traitées jusqu'ici systématiquement de l'équation de la chaleur, conditions qui peuvent être dites classiques. La première, la seconde, et la troisième sorte de conditions aux limites prescrivent respectivement sur la surface du corps la valeur de la température, la dérivée normale de la température, et la combinaison linéaire de la température et de sa dérivée normale. Ces conditions aux limites peuvent être réalisées de telle façon que le corps conducteur de la chaleur soit en contact le long de sa surface avec un réservoir de chaleur de capacité calorique infinie (première et troisième conditions), ou bien avec une source de chaleur de capacité infinie (seconde condition). La capacité infinie signifie que la variation de la température qui se produit dans le corps conducteur de la chaleur sous l'effet du contact avec le réservoir resp. avec la source de chaleur n'exerce aucune influence sur la température du réservoir resp. sur l'intensité de la source de chaleur.

Cette conception des conditions aux limites rend évident l'introduction des conditions aux limites nouvelles correspondant au fait que la variation de la température dans le corps conducteur de la chaleur, qui est en contact avec un réservoir de chaleur, exerce une réaction sur la température de ce réservoir. Les problèmes conduisant à ce type de conditions aux limites ont déjà été traités par M. GÉZA FREUD [4] et par l'auteur [1]. Mais ils ont été examinés pour des cas linéaires extraordinairement spéciaux, et la méthode appliquée pour leurs solutions, comme nous y reviendrons dans le § 4, n'est pas convenable dans le cas d'un nombre de dimension plus grand que l'unité.

Ces nouvelles conditions correspondant à un réservoir de chaleur de capacité calorique finie, nous les appellerons dans leur ensemble *second type* des conditions aux limites, à l'encontre du type des conditions aux limites classiques que nous appellerons dans leur ensemble de *premier type*.

Dans le § 1, nous formulerons mathématiquement le problème. Dans le § 2, nous démontrerons trois lemmes. Ces lemmes sont contenus dans un paragraphe séparé, au commencement de cette étude, d'une part afin de pouvoir s'y référer dans ce qui suit, d'autre part car nous les considérons comme intéressants en eux-mêmes aussi. Dans le § 3, nous énoncerons un principe du maximum se rapportant au système des conducteurs de la chaleur discuté dans le premier paragraphe. L'unicité de la solution de notre problème est une conséquence immédiate de ce principe du maximum. Enfin, dans le § 4, nous donnerons la solution du problème. La méthode de la solution est aussi convenable pour le calcul numérique des problèmes d'ordre pratique.

Définitions. Soient P un point de l'espace $(x_1, \ldots, x_m)$ $(m = 1, 2, 3)$, t le temps, (P, t) un point de l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$. Soit C un domaine borné de l'espace $(x_1, \ldots, x_m)$ (resp. le corps conducteur de la chaleur), dont la frontière S est au cas où $m = 2$ une courbe rectifiable et au cas où $m = 3$ une surface d'aire finie [8]. Désignons par n la normale extérieure de la courbe resp. de la surface S, dont nous supposons l'existence.

Soit Σ un sous-ensemble de la frontière $\mathfrak{B}$ du domaine $\mathfrak{A}$. Supposons la fonction $f(P)$ continue et bornée supérieurement sur l'ensemble $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} - \Sigma)$. Nous dirons alors que la fonction $f(P)$ possède une discontinuité de type $\overline{A}$ sur la portion Σ de la frontière. Si nous remplaçons dans cette définition la borne supérieure par la borne inférieure, nous dirons que la discontinuité est de type $\underline{A}$. Dand le cas où une fonction possède simultanément une discontinuité de type $\overline{A}$ et de type $\underline{A}$ sur la portion Σ, la discontinuité sera dite de type A.

Dans toute l'étude, nous supposons que les solutions de l'équation de la chaleur possèdent des secondes dérivées continues selon les coordonnées de lieu x_i et des premières dérivées continues selon le temps t, sur l'ensemble $D = C \times (0, T)$.

§ 1. Établissement du problème

Supposons le corps borné C conducteur de la chaleur entouré par un réservoir de chaleur R (fig. 1), où il se produit au moment t une quantité $Q(t)$ de chaleur par unité de temps. Supposons de plus que la température $u(P, t)$ du corps C est une fonction du lieu et du temps satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (a^2 > 0)$$

de la chaleur dans le domaine C pour $t > 0$, où a est une constante matérielle. La température $f(t)$ du réservoir R ne dépend que du temps.

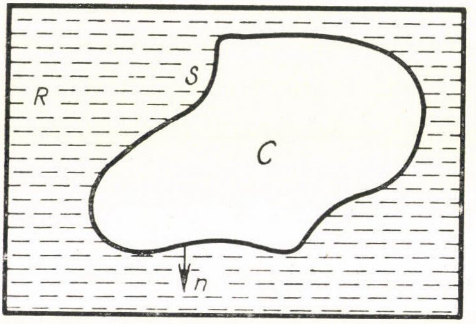

Figure 1.

On peut prescrire la condition aux limites suivante pour la fonction $u(P, t)$ à la frontière S de C, condition qui correspond au contact avec le réservoir de chaleur :

$$(\mathrm{a}) \qquad u(P, t) + \alpha \frac{\partial u(P,t)}{\partial n} = f(t) \qquad (\alpha \geqq 0), (t > 0, P \in S).$$

(α est une constante qui dépend de la structure de corps et du réservoir.) Les cas $\alpha = 0$ resp. $\alpha > 0$ correspondent à la première resp. à la troisième condition aux limites classiques. (L'analogue de la deuxième condition aux limites classique qui donnerait la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$, n'existe pas naturellement).

À cette condition renfermant la fonction inconnue $f(t)$ s'ajoute encore une équation de condition fournie par le bilan thermique du corps et du réservoir :

$$\text{(b)} \qquad Q(t) = \beta \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS + \gamma f'(t) \qquad (\beta, \gamma > 0).$$

(β et γ sont des constantes déterminées par les qualités matérielles et par les données géométriques.) Au premier membre de l'équation (b) figure la quantité de chaleur se produisant dans le réservoir par unité de temps, tandis que le deuxième membre est la quantité de chaleur prise pendant le même temps par le corps et par le réservoir.

En choisissant pour moment initial l'instant $t = 0$, nous pouvons donner comme conditions initiales les températures initiales du réservoir R :

$$(c_1) \qquad f(0) = f_0,$$

resp. du corps C,

$$(c_2) \qquad u(P, 0) = u_0(P).$$

Comme on le verra dans le § 3, les conditions (a) et (b) prises avec les conditions (c_1) et (c_2) déterminent la solution du problème.

Au cas où $\alpha = 0$ resp. $\alpha > 0$, nous appellerons notre problème quatrième resp. cinquième problème aux limites de la conduction de la chaleur. Ces problèmes constituent le second type des problèmes aux limites de la conduction de la chaleur. Du point de vue purement mathématique, ces problèmes aux limites de second type diffèrent de ceux du premier type par une fonction inconnue qui figure dans ces conditions nouvelles, et conformément à ce fait, ce n'est pas une seule, mais deux conditions qui appartiennent aux problèmes en question.

§ 2. Lemmes

Dans le lemme 1, nous démontrerons une généralisation du théorème généralement connu de TYKHONOFF [9] se rapportant au maximum des fonctions satisfaisant à l'équation de la chaleur, une généralisation pour des fonctions caloriques qui vérifient des conditions aux limites discontinues.

Lemme 1. *Soit*

$$D = C \times (0, T],$$

$$H = \{C \times (t = 0)\} + \{S + [0, T]\},$$

de plus

$$\sum = S \times [(t = t_1) + \ldots + (t = t_l)] \qquad (0 \leq t_1 < \ldots < t_l \leq T).$$

Supposons que la fonction $V(P, t)$ satisfasse à l'équation de la chaleur (1) *dans D, soit continue dans $D + H - \Sigma$ et pssède une discontinuité de type $\overline{A}$ sur la portion Σ de la frontiére de D. Soit M la borne supérieure des valeurs de la fonction prises sur $H - \Sigma$:*

$$M = \sup_{(P,t)\in H-\Sigma} V(P, t).$$

Alors, la fonction $V(P, t)$ ne peut pas prendre dans D une valeur supérieure à M.

Remarque. La condition que la fonction $V(P, t)$ soit supérieurement bornée (condition qui est contenue dans celle de discontinuité de type $\overline{A}$) ne peut pas être supprimée. En effet, il est facile de construire une fonction calorique, dont les valeurs aux limites sont bornées, excepté un seul point de la frontière, où la fonction n'est pas définie, et les valeurs de la fonction tendent vers l'infini si l'on se rapproche de ce point de l'intérieur du domaine.

Démonstration. Supposons que la fonction prend la valeur

$$V(P^*, t^*) = M + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

au point (P^*, t^*) de D.

Soit Σ_ϱ le voisinage de rayon ϱ de Σ dans l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$. Nous distinguons les deux cas suivants :

1°

$$N = \lim_{\varrho\to 0} \sup_{(P,t)\in\Sigma_\varrho} V(P, t) < M + \varepsilon.$$

Soit D^* la composante de l'ensemble des points satisfaisant à l'inégalité

$$V(P, t) \geqq L = \frac{M + N + \varepsilon}{2} < N$$

de D, composante qui contient le point (P^*, t^*). En vertu de la continuité de $V(P, t)$ dans $D + H - \Sigma$ et de l'inégalité

$$M + \varepsilon > L > N,$$

l'ensemble D^* est un domaine fermé et sa frontière n'a aucun point commun avec la portion Σ de la frontière de D.

Considérons l'ensemble fermé $D' = D^* \cap (t \leqq t^*)$. (Au cas où $t^* = T$ on obtient $D' = D^*$.) Comme $V(P^*, t^*) = M + \varepsilon$, la portion du plan $t = t^*$ limitant le domaine D' supérieurement, portion qui appartient à la frontière de D' et qui est considérée comme un ensemble plan, contient des points intérieurs, et (P^*, t^*) en est un point intérieur. Soit H' la portion de la frontière du domaine D', composée :

1. des points de la frontière de D' satisfaisant à l'inégalité $t < t^*$, et
2. de la frontière de l'ensemble des points vérifiant l'égalité $t = t^*$ de la frontière de D', ensemble considéré comme un ensemble du plan $t = t^*$.

Puisque la fonction $V(P, t)$ est continue dans le domaine fermé D' et satisfait à l'équation de la chaleur (1) dans $D' - H'$, de plus, $V(P, t) = L < M + \varepsilon$ sur la portion H' de la frontière, il en résulte, selon le théorème de TYKHONOFF, qu'elle ne peut pas prendre la valeur $M + \varepsilon$ au point (P^*, t^*). Nous sommes ainsi arrivés à une contradiction.

2°

$$N = \lim_{\varrho \to 0} \sup_{(P,t)\in\Sigma_\varrho} V(P, t) \geqq M + \varepsilon .$$

Soit $\pi(P, Q, t, \tau)$ la fonction calorique de la source de chaleur momentanée en activité au point (Q, τ) de l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$:

$$\pi(P, Q, t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-\tau)^{m/2}} e^{-\frac{a^2[(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_m-\xi_m)^2]}{4(t-\tau)}}, & \text{si } t > \tau , \\ 0 , & \text{si } t \leqq \tau , \end{cases}$$

où $Q = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Cette fonction π satisfait à l'équation de la chaleur (1) dans tout l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$, excepté au point (Q, τ) de cet espace, elle est non-négative, de plus

$$\lim_{t\to\tau+0} \pi(P, P, t, \tau) = +\infty . \tag{2}$$

Soit

$$\Pi_\Sigma(P, t) = \int_\Sigma \pi(P, Q, t, \tau)\, d\sigma_{(Q,\tau)} .$$

(Au cas où $m = 1$, l'intégrale $\int_\Sigma$ sera remplacée par une sommation se rapportant aux points $S\times(t = t_1), \ldots, S\times(t = t_l)$ qui forment Σ.) Il résulte des propriétés ci-dessus de la fonction π que la fonction Π_Σ satisfait à l'équation (1) dans tout l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$, excepté l'ensemble Σ, et

$$\lim_{t\to t_i+0} \Pi_\Sigma(R, t) = +\infty \qquad (R\in S),\ (i = 1, 2, \ldots, l). \tag{3}$$

La première partie de l'assertion est évidente, la démonstration de (3) sera effectuée plus tard.

Soit

$$\Pi^*_\Sigma(P, t) = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\Pi_\Sigma(P, t)}{\Pi_\Sigma(P^*, t^*)} .$$

La valeur de cette fonction au point (P^*, t^*) est

$$\Pi^*_\Sigma(P^*, t^*) = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Soit F_Σ l'ensemble des points de l'espace $(x_1, \ldots, x_m, t)$ pour lesquels

$$\Pi^*_\Sigma(P, t) > N - M .$$

En vertu de (3), l'ensemble Σ^η, qui s'obtient par une translation $\eta > 0$ suffisamment petite dans la direction de l'axe t positif, est entièrement à l'intérieur de F_Σ :

$$\Sigma^\eta = S\times[(t = t_1 + \eta) + \ldots + (t = t_l + \eta)] \subset F_\Sigma .$$

Soit $\eta > 0$ aussi petit que

$$\Pi_{\Sigma}^{*}(P^{*}, t^{*} + \eta) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

et

$$\Sigma^{\eta} \subset F_{\Sigma},$$

ou bien, ce qui revient au même :

$$\Sigma \subset F_{\Sigma^{(-\eta)}}.$$

À l'aide de η ainsi défini, nous construisons la fonction suivante :

$$U(P, t) = V(P, t) - \Pi_{\Sigma^{(-\eta)}}^{*}(P, t).$$

Cette fonction satisfait à l'équation (1) dans D, est continue dans $D + H - (\Sigma + \Sigma^{(-\eta)})$, possède une discontinuité de type $\bar{A}$ sur les ensembles Σ et $\Sigma^{(-\eta)}$, la borne supérieure de ses valeurs prises sur la portion $H - (\Sigma + \Sigma^{(-\eta)})$ de la frontière de D est inférieure à M :

$$\sup_{(P,t)\in H-(\Sigma+\Sigma^{(-\eta)})} U(P, t) < M,$$

(car nous avons diminué la fonction V par une fonction non négative), au point (P^{*}, t^{*})

$$U(P^{*}, t^{*}) = V(P^{*}, t^{*}) - \Pi_{\Sigma^{(-\eta)}}^{*}(P^{*}, t^{*}) > M + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} = M + \frac{\varepsilon}{3},$$

et finalement

$$\lim_{\varrho\to 0} \sup_{(P,t)\in\Sigma_{\varrho}+\Sigma_{\varrho}^{(-\eta)}} U(P, t) < N - (N - M) = M < M + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Selon le cas 1° déjà démontré, cela est impossible.

Il nous reste à démontrer l'assertion (3). Pour simplifier la discussion, nous nous occuperons du cas où $m = 2$. (Au cas où $m = 1$, (3) est une conséquence immédiate de (2). Dans le cas $m = 3$, la démonstration peut se faire par analogie au cas $m = 2$.)

Vu que dans l'intégrale

$$\Pi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \pi\, d\sigma$$

la fonction à intégrer est non-négative, il suffit de nous limiter au cas où $l = 1$. Si (3) est valable pour $l = 1$, il est à fortiori valable pour $l > 1$.

Nous diminuons la valeur de l'intégrale Π_{Σ} si nous intégrons seulement sur la portion Σ' de la courbe Σ au lieu de toute la courbe Σ :

$$\Pi_{\Sigma} > \Pi_{\Sigma'},$$

où

$$\Sigma \supset \Sigma'.$$

Soit Σ' une portion connexe de Σ, qui contient le point (R, t_1), où $R \in S$, comme extrémité. Soit g une demi-droite du plan $t = t_1$ départant du point (R, t_1), et qui est parallèle à l'axe x_1 (fig. 2). Nous représentons la courbe Σ' sur la demi-droite g de telle façon qu'à tout point Q de Σ' corresponde un point Q' de la demi-droite g qui satisfait à la condition $\overline{Q'R} = \overline{QR}$. (Cette représentation n'est pas en général biunivoque, car différents points Q peuvent avoir le même point Q' pour image.) Soit Σ'' l'image ainsi obtenue de Σ'.

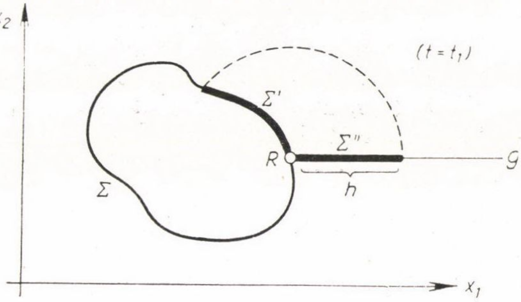

Figure 2.

Comme au cours de cette représentation, les quantités

$$t - \tau \qquad (t = t_1)$$

et

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \qquad \big((x_1, x_2) = R\big)$$

ne varient pas, on obtient :

$$\pi(R, Q, t, \tau) = \pi(R, Q', t, \tau) .$$

Mais, en considérant qu'au cours de la représentation, les éléments d'arc de Σ' ne sont pas plus courts que ceux correspondants de Σ'', on a, pour cette raison

$$\Pi_{\Sigma'} \geqq \Pi_{\Sigma''} .$$

Sans restriction de la généralité, soit $x_1 = x_2 = 0$ et $t_1 = 0$. Soit h la longueur de Σ''. Alors

$$\Pi_{\Sigma''}(R,t) = \int_0^h \frac{1}{t} e^{-\frac{a^2\xi^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{a^2}{4}\xi^2} d\xi .$$

Étant donné que

$$\lim_{t \to +0} \Pi_{\Sigma''}(R, t) = +\infty ,$$

nous avons démontré notre assertion. C. q. f. d.

Dans ce qui suit, nous utiliserons un théorème de M. L. Nirenberg [7], dans lequel il donne une amélioration du théorème de Tykhonoff. Dans le cas du domaine et de l'équation plus simples que nous avons examinés, ce théorème peut se formuler comme il suit :

Supposons que la fonction $V(P, t)$ possède des secondes dérivées continues selon les coordonnées $x_1, \ldots, x_m$, et une première dérivée continue selon la variable t sur l'ensemble $C \times (0, T]$, et satisfait ici à l'équation de la chaleur (1). Si $V(P, t)$ prend le maximum de ses valeurs prises sur $C \times (0, T]$ au point (P_0, T) de $C \times (0, T]$, alors, sur $C \times (0, T]$ tout entier, $V(P, t) \equiv \equiv V(P_0, T)$.

Lemme 2. *Soit P_0 un point de la frontière S du domaine borné C qui possède la propriété suivante à savoir que C contient l'intérieur d'une hypersphère Γ, dont P_0 est sur la frontière. La fonction $V(P, t)$ non identiquement constante satisfait sur $C \times (0, T]$ à l'équation* (1), *est continue dans $B = \{C \times (0, T]\} + (P_0, T)$ (où $P_0 \in S$), et prend le minimum de ses valeurs prises dans B au point (P_0, T). Alors*

$$\liminf_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{V(P, T) - V(P_0, T)}{\overline{PP_0}} > 0 ,$$

où l est une demi-droite partant de P_0, qui forme un angle aigu avec la normale intérieure de Γ appartenant à P_0.

Démonstration. On peut inscrire dans l'hypersphère Γ une hypersphère Γ' de rayon r_0 et de centre C_0, dont la frontière n'a que le seul point P_0 commun avec la frontière du domaine C.

On peut supposer sans restreindre la généralité que

$$\min V(P, t) = V(P_0, T) = 0.$$

Considérons le domaine limité par les hypersphères Γ' et Γ'', où Γ'' signifie l'hypersphère $\overline{PC_0} = \frac{r_0}{2}$. Nous désignerons ce domaine par G.

Soit $0 < T_1 < T$ et signifie $h(P, t)$ la fonction satisfaisant à l'équation (1) dans $G \times (t > T_1)$ avec les conditions aux limites et avec la condition initiale suivantes :

$$(\alpha) \qquad h(P, t) = 0 \qquad (P, t) \in \Gamma' \times (t \geqq T_1),$$

$$(\beta) \qquad h(P, t) = 1 \qquad (P, t) \in \Gamma'' \times (t > T_1),$$

$$(\gamma) \qquad h(P, T_1) = 0 \qquad P \in G,$$

et admettant une discontinuité de type A sur $\Gamma'' \times (t = T_1)$.

Il résulte du théorème de NIRENBERG que

$$(\alpha') \qquad V(P, t) > 0 \qquad (P, t) \in C \times (0, T],$$

et de cette façon

$$(\beta') \qquad V(P, t) \geqq \varepsilon \qquad (P, t) \in \Gamma'' \times [T_1, T],$$

$$(\gamma') \qquad V(P, T_1) > 0 \qquad P \in G.$$

Donc, en vertu du théorème de NIRENBERG, on a pour la fonction $u = V - \varepsilon h$:

$$u(P, t) = V(P, t) - \varepsilon h(P, t) \geqq 0^{1)} \qquad (P, t) \in G \times [T_1, T].$$

(En effet, supposons que contrairement à notre assertion pour un point $(P^*, t^*) \in G \times [T_1, T]$

$$u(P^*, t^*) = \mu < 0.$$

Il découle naturellement de la définition de $h(P, t)$ que $t^* \neq T_1$.

Sans restriction de la généralité, nous pouvons nous borner anx deux cas suivants :

1. $u(P, t)$ prend le minimum de ses valeurs prises dans $G \times (T_1, T]$ à l'intèrieur de ce domaine, et ce minimum est $\mu = u(P^*, t^*)$. C'est impossible selon le théorème de NIRENBERG.

2. $u(P, t)$ ne prend pas le minimum indiqué ci-dessus à un point intérieur de $G \times (T_1, T]$. Alors il existe une suite (P_i, t_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ des points intérieurs de $G \times (T_1, T]$, pour laquelle

$$(P_i, t_i) \to (\bar{P}, \bar{t}) \in \{G \times (t = T_1)\} + \{\Gamma' \times [T_1, T]\} + \{\Gamma'' \times [T_1, T]\},$$

et

$$u(P_i, t_i) < \mu < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mais c'est impossible, parce qu'au cas où

a) $$(\bar{P}, \bar{t}) \in Z = \{G \times (t = T_1)\} + \{\Gamma'' \times [T_1, T]\},$$

l'existence d'une telle suite (P_i, t_i) contradit aux conditions (β), (γ), (β'), (γ'), en tenant compte de la continuité de $V(P, t)$ sur Z et de la validité du lemme 1 concernant la fonction $h(P, t)$; tandis qu'au cas où

b) $$(\bar{P}, \bar{t}) \in \Gamma' \times [T_1, T],$$

l'existence de la suite (P_i, t_i) contradit à la condition (α) et à l'inégalité (α').

Puisque $u(P_0, T) = 0$, pour cette raison

$$\liminf_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{u(P, T) - u(P_0, T)}{\overline{PP_0}} =$$

$$= \liminf_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{V(P, T) - V(P_0, T)}{\overline{PP_0}} - \varepsilon \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{h(P, T) - h(P_0, T)}{\overline{PP_0}} \geqq 0.$$

Vu qu'ici

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{h(P, T) - h(P_0, T)}{\overline{PP_0}} = \frac{\partial h(P_0, T)}{\partial l} > 0,$$

on en tire l'assertion. C. q. f. d.

Dans un certain sens, ce théorème ne peut pas être amélioré. C'est-à-dire, en général, le théorème n'est pas valable en un point de la frontière qui est

---

1) Au cas où la fonction $V(P, t)$ est supposée continue sur l'ensemble $(C + P_0) \times (0, T] \supset B$, cette assertion est une conséquence immédiate du lemme 1.

un sommet du domaine. (Naturellement, en un tel point, nous ne pouvons pas parler de normale intérieure, et ainsi la direction qui forme un angle aigu avec la normale intérieure, sera tout simplement remplacée par une direction allant du sommet vers l'intérieur du domaine.) Par exemple, la fonction

$$V = \cos\frac{\pi}{2}x_1 \;\cos\frac{\pi}{2}x_2 \; e^{-\frac{\pi^2}{2a^2}t}$$

satisfaisant à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (a^2 > 0)$$

dans le domaine $-1 < x_1 < +1$, $-1 < x_2 < +1$ du plan (x_1, x_2), qui prend son minimum en chaque point de la frontière du domaine, possède dans tous les sommets une dérivée dans une direction intérieure quelconque égale à zéro.

* *

Désignons par $E_C^{(\alpha)}(P, t)$ la fonction (dont nous supposerons l'existence dans ce qui suit) satisfaisant à l'équation (1) pour $t > 0$ dans le domaine borné C limité par la surface S,

1. au cas où $\alpha > 0$, continue dans $(C + S) \times (t \geqq 0)$,
2. au cas où $\alpha = 0$, continue dans $[C \times (t \geqq 0)] + [S \times (t > 0)]$ et ayant une discontinuité de type A sur la portion $S \times (t = 0)$ de la surface du domaine,

et qui satisfait à la condition initiale et à la condition aux limites

$$E_C^{(\alpha)}(P, 0) = 0 \qquad (P \in C),$$

$$E_C^{(\alpha)}(P, t) + \alpha \frac{\partial E_C^{(\alpha)}(P, t)}{\partial n} = 1 \qquad (P \in S, t > 0).$$

La fonction $E_C^{(\alpha)}$ ainsi définie sera appelée fonction calorique d'unité du domaine C.

Lemme 3. *Soit P_0 le point de la frontière S du domaine C ayant les deux propriétés suivantes*:

1. *le domaine C contient l'intérieur d'une hypersphère Γ_1, dont P_0 est situé sur la frontière*;
2. *le domaine C est contenu dans l'extérieur d'une hypersphère Γ_2, dont le point P_0 est situé sur la frontière (fig. 3).*

Supposons qu'existe la fonction calorique d'unité $E_C^{(0)}$ du domaine C. Alors:

1° *au cas où $t > 0$*

$$\liminf_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{E_C^{(0)}(P_0, t) - E_C^{(0)}(P, t)}{\overline{PP_0}}$$

et

$$\limsup_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{E_C^{(0)}(P_0, t) - E_C^{(0)}(P, t)}{\overline{PP_0}}$$

sont finies, où l est la normale[2] *intérieure de la surface S au point P_0, et*

$2°$ *pour $t \to 0$, elles sont asymptotiquement égales à la fonction* $\frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Donc, si, pour $t > 0$, $\frac{\partial E_C^{(0)}(P_0, t)}{\partial n}$ *existe, alors*

$$\frac{\partial E_C^{(0)}(P_0, t)}{\partial n} \sim \frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad si \qquad t \to 0. \tag{4}$$

(n signifie la normale extérieure de la surface S au point P_0.)

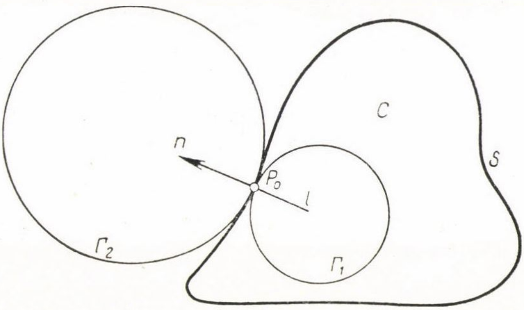

Figure 3.

Démonstration. Dans le cas $m = 1$, le domaine C est un intervalle de l'axe x_1, ainsi l'assertion du théorème peut être vérifiée par un calcul élémentaire à partir de la forme explicite de la fonction $E_C^{(0)}(P, t)$ (voir p. e. [5]). Donc il suffit de nous limiter aux cas $m = 2, 3$.

Soient $E_{\Gamma_1}^{(0)}$ et $E_{\Gamma_2}^{(0)}$ les fonctions caloriques d'unité respectives de l'hypersphère Γ_1 et de l'extérieur de l'hypersphère Γ_2. Soit de plus G_1 la surface de Γ_1. Il découle de la forme explicite de Γ_2, resp. du lemme 1, que

$$\text{resp.}\quad \left.\begin{array}{llll} E_{\Gamma_2}^{(0)}(P, t) \leqq 1 & (= E_C^{(0)}(P, t)), & \text{si} & P \in S, \\ E_C^{(0)}(P, t) \leqq 1 & (= E_{\Gamma_1}^{(0)}(P, t)), & \text{si} & P \in G_1, \end{array}\right\} t > 0.$$

On en tire avec l'application itérée du lemme 1, que les inégalités ci-dessus, valables sur les frontières des domaines en question, sont valables également dans les intérieurs des domaines :

$$\text{et}\quad \left.\begin{array}{lll} E_{\Gamma_2}^{(0)}(P, t) \leqq E_C^{(0)}(P, t), & \text{si} & P \in C, \\ E_C^{(0)}(P, t) \leqq E_{\Gamma_1}^{(0)}(P, t), & \text{si} & P \in \Gamma_1, \end{array}\right\} t > 0.$$

Donc, en considérant la relation

$$E_{\Gamma_1}^{(0)}(P_0, t) = E_C^{(0)}(P_0, t) = E_{\Gamma_2}^{(0)}(P_0, t) = 1 \qquad (t > 0),$$

[2]) L'existence de la normale au point P_0 résulte des restrictions 1. et 2.

il résulte

$$\text{(5)}\quad \frac{E_{\Gamma_1}^{(0)}(P_0,t)-E_{\Gamma_1}^{(0)}(P,t)}{\overline{PP_0}} \leqq \frac{E_C^{(0)}(P_0,t)-E_C^{(0)}(P,t)}{\overline{PP_0}} \leqq \frac{E_{\Gamma_2}^{(0)}(P_0,t)-E_{\Gamma_2}^{(0)}(P,t)}{\overline{PP_0}} \quad (P \in C,l).$$

Puisque dans cette inégalité, au cas où $P \to P_0$, les limites des membres gauche et droit existent (elles sont respectivement égales aux dérivées normales $\frac{\partial E_{\Gamma_1}^{(0)}}{\partial n}$ et $\frac{\partial E_{\Gamma_2}^{(0)}}{\partial n}$) l'assertion 1° en résulte.

Un calcul long mais élémentaire nous permet d'obtenir à partir des formes explicites des fonctions $E_{\Gamma_1}^{(0)}$ et $E_{\Gamma_2}^{(0)}$ (voir p. ex. [3] et [5]) :

$$\frac{\partial E_{\Gamma_1}^{(0)}(P_0,t)}{\partial n} \sim \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (t \to 0)$$

et

$$\frac{\partial E_{\Gamma_2}^{(0)}(P_0,t)}{\partial n} \sim \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (t \to 0).$$

D'où, en vertu de la même inégalité (5), on tire l'assertion 2°. C. q. f. d.

Remarque. Il est intéressant de noter que l'asymptotique (4) est indépendante des rayons des hypersphères Γ_1 et Γ_2.

§ 3. Principe du maximum ; unicité de la solution

Dans ce paragraphe, nous démontrerons un principe du maximum concernant les solutions $u\,(P, t)$ du problème établi dans le § 1.

Supposons qu'il existe une normale en chacun des points de la frontière S du domaine borné C, de plus, qu'un point quelconque P_0 de S possède la propriété suivante : C contient l'intérieur d'une hypersphère dont P_0 est situé sur la frontière.

La fonction $u\,(P, t)$ satisfait à l'équation (1) de la chaleur sur l'ensemble $C \times (0, T]$, et

1. au cas $a = 0$, est continue dans

$$\{C \times [0, T]\} + \{S \times (0, T]\}$$

et possède une discontinuité de type $\underline{A}$ sur la portion $S \times (t = 0)$ de la frontière de $C \times (0, T]$,

2. au cas $a > 0$, est continue dans le domaine fermé

$$(C + S) \times [0, T]\,.$$

Nous prescrirons les conditions aux limites suivantes pour la fonction $u\,(P, t)$ pour $0 < t \leq T$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(6)} \quad Q(t) = \beta \int_S \frac{\partial u(P,t)}{\partial n}\, d\sigma + \gamma f'(t) \qquad (\beta, \gamma > 0) \\ &\text{(7)} \quad u(P,t) + a \frac{\partial u(P,t)}{\partial n} = f(t) \qquad (a \geqq 0) \end{aligned}\right\} P \in S,$$

et nous supposerons la fonction $f(t)$, déterminée par l'équation aux dérivées partielles (1) et par les conditions (6) et (7), continue dans l'intervalle $[0, T]$. (La condition pour que $f(t)$ ait une dérivée dans l'intervalle $(0, T]$ est déjà implicitement contenue dans la condition (6).)

Théorème. *Si pour chaque instant* $0 \leqq t \leqq T$

$$Q(t) \geqq 0,$$

de plus

$$f(0) \geqq 0, \; u(P, 0) \geqq 0 \qquad (P \in C),$$

alors dans $C \times (0, T]$:

$$u(P, t) \geqq 0 .$$

Démonstration. Supposons, au contraire de notre assertion, que pour un point $(P_0, t_0) \in C \times (0, T]$ l'on ait :

$$u(P_0, t_0) = \mu < 0.$$

Il résulte alors du lemme 1, que pour une valeur $0 < t_1 \leqq t_0$ et pour un point $P_1 \in S$

$$u(P_1, t_1) = \mu.$$

Au cas où $\alpha = 0$ il résulte de la continuité de $f(t)$ et de la condition (7) tandis que pour le cas où $\alpha > 0$, il résulte de la continuité de $u(P, t)$, l'existence d'un t^* $(0 < t^* \leqq t_1)$, pour lequel on peut encore trouver un point $P^* \in S$ tel que

$$u(P^*, t^*) = \mu, \tag{8}$$

mais

$$\begin{cases} u(P, t) > \mu, \\ \text{si} \quad (P, t) \in \{C \times [0, t^*)\} + \{S \times (0, t^*)\}. \end{cases} \tag{9}$$

Nous montrerons que c'est impossible.

De la définition de t^* et du lemme 2, il vient

$$\frac{\partial u(P^*, t^*)}{\partial n} < 0 . \tag{10}$$

1° Soit $\alpha = 0$. De la condition (7) et de la définition de t^*, il résulte que

$$f'(t^*) \leqq 0. \tag{11}$$

Nous écrirons (6) pour $t = t^*$:

$$Q(t^*) = \beta \int_S \frac{\partial u(P, t^*)}{\partial n} d\sigma + \gamma f'(t^*) . \tag{12}$$

En vertu de la condition (7) :

$$u(P, t^*) = u(P^*, t^*) \qquad (P \in S).$$

C'est pourquoi l'inégalité (10) est aussi valable outre P^* pour un point quelconque $P \in S$:

$$\frac{\partial u(P, t^*)}{\partial n} < 0 \qquad (P \in S). \tag{10'}$$

Ainsi le second membre de l'équation (12) est négatif d'après (10') et (11), tandis que son premier membre est non-négatif selon les conditions. Ainsi nous sommes arrivés à une contradiction.

2° Soit $\alpha > 0$. Nous écrirons (7) pour le point (P^*, t^*) :

$$u(P^*, t^*) + \alpha \frac{\partial u(P^*, t^*)}{\partial n} = f(t^*).$$

Il suit de (8) et de (10) que

$$f(t^*) < \mu.$$

Étant donné que $f(0) \geqq 0$, on en tire l'existence d'une valeur $0 < t_2 < t^*$ pour laquelle

$$f(t_2) = \mu, \quad f'(t_2) \leqq 0. \tag{13}$$

Écrivons (6) pour $t = t_2$, en utilisant la condition (7) :

$$Q(t_2) = \frac{\beta}{\alpha} \int_S [f(t_2) - u(P, t_2)]\, d\sigma + \gamma f'(t_2).$$

Selon cette équation il résulte de (13) et de $Q(t_2) \geqq 0$ que pour certains points $P \in S$ $u(P, t_2) \leqq \mu$, ce qui contredit (9) à cause de $t_2 < t^*$. C. q. f. d.

Si dans ce théorème nous supposons les inégalités contraires :

$$Q(t) \leqq 0 \qquad (0 \leqq t \leqq T)$$

et

$$f(0) \leqq 0, \quad u(P, 0) \leqq 0 \qquad (P \in C),$$

de plus que la fonction $u(P, t)$ possède une discontinuité de type $\bar{A}$ au lieu de celle de type A, alors l'inégalité figurant dans l'assertion du théorème sera également remplacée par l'inégalité de sens contraire :

$$u(P, t) \leqq 0 \qquad ((P, t) \in C \times (0, T]).$$

Corollaire. Si de plus, en conservant les conditions de continuité relatives aux fonctions $u(P, t)$ et $f(t)$ dans le théorème ci-dessus, nous supposons, au cas où $\alpha = 0$, que la fonction $u(P, t)$ a une discontinuité de type A sur la portion $S \times (t = 0)$ de la frontière, alors l'unicité du système de solution $\{u(P, t), f(t)\}$ résulte du principe du maximum ci-dessus de la manière bien connue :

En effet, s'il existait deux systèmes de solution, notamment $\{u_1, f_1\}$ et $\{u_2, f_2\}$, alors le système $\{u = u_1 - u_2,\ f = f_1 - f_2\}$ satisferait aux conditions initiales et aux conditions aux limites homogènes, c'est pourquoi nous aurions en même temps

$$u \geqq 0, \; u \leqq 0,$$

d'où l'on obtiendrait $u \equiv 0$, et suivant la condition (7), $f \equiv 0$.

Plus généralement, il résulte également du principe du maximum démontré ci-dessus que le système de solution est une fonction continue des fonctions $Q(t)$, $u_0(P)$ et de la valeur de f_0.

§ 4. Solution du problème

Cherchons la solution de l'équation (1) avec les conditions aux limites et initiales (a), (b), (c_1) et (c_2) (voir § 1). En considérant la linéarité de l'équation et celle des conditions, nous cherchons la solution sous la forme

$$u(P, t) = u_1(P, t) + u_2(P, t),$$

où u_1 satisfait aux conditions

$$u_1(P, 0) = u_0(P) \qquad (P \in C),$$

$$u_1(P, t) + \alpha \frac{\partial u_1(P, t)}{\partial n} = 0 \qquad (t > 0, P \in S),$$

et u_2 aux conditions

$$u_2(P, 0) = 0 \qquad (P \in C),$$

$$u_2(P, t) + \alpha \frac{\partial u_2(P, t)}{\partial n} = f(t) \qquad (t > 0, P \in S),$$

$$Q^*(t) = Q(t) - \beta \int_S \frac{\partial u_1}{\partial n} d\sigma = \beta \int_S \frac{\partial u_2}{\partial n} d\sigma + \gamma f'(t) .$$

Vu que la détermination de $u_1(P, t)$ conduit à la solution du premier resp. du troisième problème aux limites classiques au cas où $\alpha = 0$ resp. où $\alpha > 0$, nous supposerons la fonction $u_1(P, t)$ déjà connue ; il nous reste donc à déterminer la fonction $u_2(P, t)$. Par suite, sans restriction de la généralité, nous pouvons nous borner au cas

$$(c_2^*) \qquad u_0(P) \equiv 0.$$

* *

Le principe de la méthode de solution de M. Freud ([4] et [1]) consiste à chercher la fonction $u(P, t)$ sous la forme

$$u(P, t) = \int_0^t \int_S W(R, \tau)\, \pi(P, R, t, \tau)\, d\sigma_R\, d\tau ,$$

où $\pi(P, R, t, \tau)$ est la fonction calorique de la source ponctuelle de chaleur, dont nous nous sommes déjà servi dans le lemme 1 du § 2. C'est-à-dire, nous dérivons la température $u(P, t)$ à partir d'une répartition continue des sources de chaleur en activité sur la frontière du corps avec une intensité $W(P, t)$. De cette façon, nous avons ramené notre problème à la détermination de la fonction $W(P, t)$ qui est seulement la fonction des points de la surface S et du temps. Dans le cas linéaire ($m = 1$) la fonction $W(P, t)$ se réduit seulement à une fonction du temps, ainsi cette méthode simplifie de beaucoup la solution de notre problème. Par contre au cas où $m > 1$, il ne serait pas convenable d'appliquer cette méthode. C'est pourquoi nous résolvons le problème d'une autre manière, à l'aide du principe de DUHAMEL [2]. Cette méthode nouvelle nous permet, dans le cas d'un nombre de dimensions quelconque, de ramener notre problème à la détermination d'une fonction unique ne dépendant que du temps.

**

Le principe de DUHAMEL affirme qu'en supposant la fonction calorique d'unité $E_C^{(\alpha)}(P, t)$ du domaine C connue (voir § 2), la solution de l'équation différentielle (1) déterminée par les conditions

$$u(P, 0) = 0, \qquad (P \in C)$$

$$u(P, t) + \alpha \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = f(t) \qquad (t > 0, P \in S)$$

peut être obtenue sous la forme

$$u(P, t) = \int_0^t f'(\tau) E_C^{(\alpha)}(P, t - \tau) \, d\tau + f(0) E_C^{(\alpha)}(P, t) \,, \tag{14}$$

sous certaines conditions de régularité concernant la fonction $f(t)$. (Nous reviendrons à ces conditions.)

En envisageant les conditions (a) et (c_2^*), nous cherchons la solution de notre problème sous la forme (14). De cette façon, après avoir utilisé les conditions (a), (c_1) et (c_2^*), il nous reste à déterminer la fonction unique $f(t)$ dépendant seulement du temps, ce qui est possible à l'aide de la condition (b) encore non utilisée.

En substituant (14) à la condition (b), on obtient :

$$\begin{aligned} Q(t) &= \beta \int_S \left[\int_0^t f'(\tau) \frac{\partial E_C^{(\alpha)}(P, t - \tau)}{\partial n} d\tau + f_0 \frac{\partial E_C^{(\alpha)}(P, t)}{\partial n} \right] d\sigma + \gamma f'(t) = \\ &= \beta \int_0^t f'(\tau) K^{(\alpha)}(t - \tau) \, d\tau + \beta f_0 K^{(\alpha)}(t) + \gamma f'(t) \,, \end{aligned} \tag{15}$$

où

$$K^{(\alpha)}(t) = \int_S \frac{\partial E_C^{(\alpha)}(P, t)}{\partial n} d\sigma \,.$$

En introduisant les notations

$$\varphi(t) = f'(t) \,,$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\gamma} \,,$$

$$M^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\gamma} Q(t) - \frac{\beta}{\gamma} f_0 K^{(\alpha)}(t) \,,$$

notre équation prend la forme suivante :

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^t \varphi(\tau)\, K^{(\alpha)}(t-\tau)\, d\tau = M^{(\alpha)}(t) \; . \tag{16}$$

C'est une équation intégrale de seconde espèce du type de Volterra. Le noyau $K^{(\alpha)}(t - \tau)$ de cette équation est borné pour $\alpha > 0$. Au cas où $\alpha = 0$, supposons que chaque point de la surface S possède la propriété 2. du lemme **3** du § 2 ; supposons de plus que les longueurs des rayons des sphères Γ_2 figurant dans ce lemme ont une borne inférieure positive. Alors, comme on peut le voir immédiatement par la démonstration du lemme 3, l'estimation $\dfrac{\partial E_C^{(0)}}{\partial n} < \dfrac{a+\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$ $(\varepsilon > 0)$ au cas où $t \to 0$ est valable uniformément pour chaque point de la surface S, et de cette manière, le noyau $K^{(0)}$ est de singularité faible. (Il résulte du lemme **3** que dans le cas où la surface S est suffisamment régulière, la singularité de $K^0(t)$ est justement de caractère $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.) Si nous supposons la fonction $Q(t)$ absolument intégrable dans l'intervalle $[0, T]$, alors le second membre $M^{(\alpha)}(t)$ de l'équation intégrale est aussi absolument intégrable dans l'intervalle $[0, T]$; ainsi, selon la théorie des équations intégrales [6], la solution $\varphi(t)$ existe dans l'intervalle $[0, T]$ pour une valeur quelconque de λ.

De l'équation (16) il découle que les singularités éventuelles de $\varphi(t)$ sont conformes à celles de $M^{(\alpha)}(t)$. Ainsi, si $Q(t)$ est absolument intégrable, alors la fonction $u\,(P, t)$ peut se mettre sous la forme (14). De plus, si nous supposons $Q(t)$ bornée, excepté le seul point $t = 0$, où elle peut avoir une singularité de caractère $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, alors dans l'expression (14) la dérivation normale peut s'exécuter dans la fonction à intégrer et l'ordre des intégrales dans l'expression (15) peut être interverti, comme il résulte de la convergence uniforme des intégrales en question.

Donc nos résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant d'existence :

Théorème. *Supposons que la fonction calorique d'unité $E_C^{(\alpha)}(P, t)$ du domaine C existe, de même que $\dfrac{\partial E_C^{(\alpha)}}{\partial n}$ existe et soit intégrable sur la surface S pour $t > 0$. Au cas où $\alpha = 0$ chaque point de la surface S possède la propriété 2. du lemme 3 du § 2, et les longueurs des rayons des sphères Γ_2 figurant dans ce lemme possèdent une limite inférieure positive. Soit la fonction $Q(t)$ intégrable et bornée excepté au seul point $t = 0$, où elle peut avoir une singularité de caractère $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Alors la solution de l'équation* (1) *existe dans les conditions* (*a*), (*b*), (c_1) *et* (c_2^*) *et elle peut s'écrire sous la forme* (14) ; *la détermination de $f(t)$ est possible au moyen de l'équation (16).*

(Reçu le 4 Mai 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adler Gy. : „Hővezetési és diffuziós feladatok összetett peremfeltételekkel, II." *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, **1** (1956) 167—183.

[2] Courant, R.—Hilbert, D. : *Methoden der Mathematischen Physik*, II Verlag Springer, Berlin (1937) 183—184.

[3] Диткин, В. А.—Кузнецов, П. И.: *Справочник по операционному исчислению.* Гос. Изд. Техн.—Теор. Лит., Москва—Ленинград (1951) 88—90.

[4] Freud G. : „Hővezetési és diffuziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I." *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 369—394.

[5] Лыков, А. В. : *Теория теплопроводности.* Гос. Изд. Техн.—Теор. Лит., Москва (1952) 77—81, 95—98, 105—110.

[6] Михлин, С. Г.: *Интегральные Уравнения.* Гос. Изд. Техн.—Теор. Лит., Москва—Ленинград (1949) 23—27.

[7] Nirenberg, L. : „A strong maximum principle for parabolic equations." *Comm. on Pure and Applied Mathematics* **6** (1953) 167—177.

[8] de la Vallée Poussin, J. Ch. : *Cours d'Analyse Infinitésimale*, I. Gauthier-Villars, Paris (1923) 359—363.

[9] Тихонов, А. Н.—Самарский, А. А.: *Уравнения математической физики.* Гос. Изд. Техн.—Теор. Лит., Москва—Ленинград (1951) 184—187.

A HŐVEZETÉS PEREMÉRTÉKFELADATAINAK EGY ÚJ TÍPUSA

ADLER Gy.

Kivonat

A hővezetés három klasszikus peremfeltétele rendre a hőmérsékletet, a hőmérséklet normális menti deriváltját, illetve a hőmérséklet és a hőmérséklet normális menti deriváltjának lineáris kombinációját írja elő a test peremén. Ezek a peremfeltételek fizikailag akkor teljesülnek, ha a hővezető test környezetének állapota a hővezető testben lejátszódó folyamattól nem függ. Ezzel szemben, ha a testben végbemenő hővezetési folyamat a környezet állapotára visszahat, akkor a folyamat leírására új peremfeltételek válnak szükségessé. Ilyen peremfeltételek egy típusával foglalkozik a szerző (lásd (*a*) és (*b*) feltételek). Bebizonyítja ezen újtípusú probléma megoldásának unicitását és egzisztenciáját. Az egzisztencia-bizonyítás módszere konstruktív és gyakorlati feladatok megoldására alkalmas. (A szerző a probléma megoldását a Duhamel-elv segítségével másodfajú Volterra-típusú integrálegyenlet megoldására vezeti vissza.)

A második paragrafusban bebizonyított három lemma közül kiemeljük az 1. lemmát, melyben a szerző a hővezetés egyenletének elegettevő függvények maximumára vonatkozó közismert Tyihonov-tétel [9] nem-folytonos peremfeltételeket kielégítő hőmérsékleti függvényekre vonatkozó kiterjesztését bizonyítja be.

ОДИН НОВЫЙ ТИП ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Gy. ADLER

Резюме

Три классических граничных условий теплопроводности предписывают температуру, производную температуры вдоль нормали или их линейную комбинацию на поверхности тела. Эти граничные условия физически выполняются, если состояние окрестности теплопроводного тела не зави-

сит от процесса, протекающего в этом теле. Если же процесс теплопроводности, протекающий в теле, оказывает влияние на состояние окрестности, то для описания процесса требуются новые граничные условия. Автор занимается одним типом таких условий (смотри условия (a) и (b)). Доказывает существование и единственность решения этой новой проблемы. Доказательство существования конструктивно и годится для решения практических задач. (Автор с помощью принципа Duhamel-а сводит решение проблемы к решению интегрального уравнения Volterra второго рода).

Среди трёх лемм, доказанных во втором параграфе, отметим лемму 1, в которой автор доказывает распространение общеизвестной теоремы Тихонова [9] относительно максимума функций, удовлетворяющих уравнению теплопроводности, на температурные функции, удовлетворяющие ненепрерывным граничным условиям.