ÜBER DIE UMORDNUNG BEDINGT KONVERGENTER REIHEN

von

P. SZÜSZ

Es sei $P = \psi(k)$ $(k=1, 2,\ldots)$ eine Permutation der natürlichen Zahlenreihe, d. h. es sei $\psi(k)$ eine für natürliche k definierte Funktion, die nur die natürlichen Zahlen und jede natürliche Zahl genau einmal annimmt. A. S. KRONROD[1] hat die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass es eine bedingt konvergente Reihe $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gibt derart, dass die Reihe $P_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)}$ divergiert. In der vorliegenden Note zeige ich, dass falls die Glieder der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genügend schnell gegen Null streben, so wird ihre Summe durch die Permutation P nicht beeinträchtigt. (So schnell brauchen die a_k nicht gegen Null zu streben, dass obige Behauptung trivial wird; es braucht nämlich nicht $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ zu sein.) Es wird folgender Satz bewiesen:

Satz. *Es sei $P = \psi(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine Permutation der natürlichen Zahlen. Dann gibt es eine nur von P abhängige Folge positiver Zahlen $c_k (k = 1, 2, \ldots)$, die folgendes erfüllt:*

$$c_k \geqq c_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty, \tag{2}$$

so, dass falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$ eine beliebige konvergente numerische Reihe ist, die der Bedingung

$$|a_k| \leqq c_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

genügt, so ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)}$ auch konvergent, und es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)} = \alpha.$$

---

[1] On permutation of terms of numerical series, Математический Сборник, T. 18 (60), 2, S. 239—276. (Russisch mit englischer Zusammenfassung.)

Bemerkung. Ohne die Beschränkung (2) wäre natürlich alles trivial.

Beweis. Ist $\psi(k)$ gegeben, so definiere man $n(k)$, bzw. $N(k)$ folgendermassen:

$n(k)$ bedeutet die *grösste* Zahl derart, dass unter den

$$\psi(1),\ \psi(2), \ldots,\ \psi(k)$$

alle Zahlen

$$1,\ 2, \ldots, n(k)$$

vorkommen. Diese Definition ist gleichbedeutend mit

$$n(k) = \min_{l>k} \psi(l) - 1\,.$$

Da es sich um eine Permutation der natürlichen Zahlenreihe handelt, strebt $n(k)$ mit wachsendem k monoton gegen Unendlich.

$N(k)$ sei definiert durch

$$N(k) = \max_{1 \leqq l \leqq k} \psi(l).$$

Offenbar gilt

$$N(k) \geqq n(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Nun sei $k_1, k_2, \ldots$ eine streng zunehmende Folge natürlicher Zahlen, die folgendes erfüllt:

$$k_{r+1} - 2k_r + k_{r-1} \geqq 0\,, \tag{5}$$

$$n\,(k_{r+1}) \geqq k_r\,, \tag{6}$$

$$k_{r+1} \geqq N(k_r) \tag{7}$$

(5), (6) und (7) können bei beliebig gegebener Permutation $\psi(k)\ldots$ allein durch genügend starkes Anwachsen der k_r erfüllt werden. Man setze ferner

$$c_k = \frac{1}{(k_{r+1} - k_r)\,r}\,, \quad \text{falls} \quad k_r \leqq k < k_{r+1}\,. \tag{8}$$

Wegen (5) gilt (1); wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent.

Nun zeige ich, dass bei beliebig klein gegebenem positiven ε

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{\psi(k)}) \right| < \varepsilon \tag{9}$$

gilt, falls (3) mit den durch (8) definierten c_k gilt und $m \geqq m_0(\varepsilon)$ bestel t. Es sei r definiert durch

$$k_r \leqq m < k_{r+1}\,. \tag{10}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{\psi(k)}) = \sum_{k=n(m)+1}^{m} a_k - \sum_{\substack{k \leqq m \\ \psi(k) \geqq n(m)+1}} a_{\psi(k)}\,. \tag{11}$$

Da wegen (6), (7) und (10) $\psi(k) \leqq N(m) \leqq N(k_{r+1}) \leqq k_{r+2}$ und $n(m) + 1 > n(k_r) > k_{r-1}$ ist, so ist wegen (3)

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{\psi(k)}) \right| \leqq \sum_{k=n(m)+1}^{m} c_k + \sum_{k=n(m)+1}^{N(m)} c_k \tag{12}$$

also

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{\psi(k)}) \right| \leqq 2 \sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_{r+2}} c_k \leqq 2\left(\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} \right). \tag{13}$$

Für genügend grosses m ist die rechte Seite von (13) kleiner als ε. Damit ist (9), also auch unser Satz bewiesen.

(Eingegangen 15. Februar 1959.)

FELTÉTELESEN KONVERGENS SOROK ÁTRENDEZÉSÉRŐL

SZÜSZ P.

Kivonat

Tétel: Legyen $\psi(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a természetes számsor egy permutációja. Akkor megadható egy olyan monoton zérushoz tartó divergens összegű pozitív c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ számsorozat úgy, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$; és $|a_n| \leqq c_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = A$; másszóval minden permutációhoz megadható oly divergens összegű monoton zérussorozat, hogy ha egy feltételesen konvergens sor tagjai abszolút értékben kisebbek a zérus sorozat tagjainál, akkor a permutáció a sor összegét nem változtatja meg.

О ПЕРЕСТАНОВКЕ ЧЛЕНОВ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

P. SZÜSZ

Резюме

Теорема. Пусть $\psi(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть некоторая перестановка последовательности натуральных чисел. Тогда существует такая монотонная сходящаяся к нулю положительная числовая последовательность c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ с расходящейся суммой, для которой имеет место следующее: если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $|a_n| \leqq c_n$ то $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = A$; иными словами к каждой перестановке можно так подобрать монотонную нулевую последовательность с расходящейся суммой, что, если члены условно сходящего ряда по модулю меньше членов этой последовательности, то перестановка не изменит суммы ряда.