

ANWENDUNG DER OPERATORENRECHNUNG VON MIKUSIŃSKI ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALDIFFERENZENGLEICHUNGEN

von
T. FÉNYES

§ 1. Einleitende Bemerkungen

Betrachten wir die folgende Differentialdifferenzengleichung

$$(1) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x^{(\mu)}(t + va) = g(t), \quad 0 \leq t < \infty$$

wo $g(t)$ eine in dem betrachteten Intervall stetige Funktion ist. Ist $\alpha > 0$ so setzen wir voraus, dass die Koeffizienten a_{mv} , $v = 0, 1, \dots, n-1$ alle gleich Null sind. Das bedeutet, dass die höchste Ableitung nur mit dem Argument von maximaler Verschiebung auftreten soll. Wir werden die betrachtete Differentialdifferenzengleichung mit Hilfe der Operatorenrechnung lösen, und zeigen, dass die zu der Gleichung (1) gehörenden Anfangsbedingungen sich automatisch aus der Operatorgleichung ergeben.

§ 2. Darstellung der Lösung

Es sei

$$\{x(t)\} = f(s)$$

ein Element des Mikusińskischen Quotientenkörpers. Mit Hilfe des Verschiebungsoperators und des Differentiationsoperators lässt sich $x^{(\mu)}(t + va)$ einfach darstellen. Aus den Regeln der Operatorenrechnung folgt es, dass

$$(2) \quad e^{-avs} \{x(t + av)\} = \begin{cases} \{x(t)\} & \text{für } av \leq t < \infty \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < av. \end{cases}$$

ist.

Wir wollen $x(t)$ auf der ganzen positiven Halbgeraden in der Operator-schreibweise darstellen. Wenden wir das Integral von Ryll-Nardzewski an, so erhalten wir

$$(3) \quad \int_0^{av} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda = \begin{cases} \{x(t)\} & \text{für } 0 \leq t \leq av \\ 0 & \text{für } t > av. \end{cases}$$

Aus (2) und (3) folgt, dass

$$(4) \quad \{x(t + \alpha v)\} = e^{\alpha v s} \left[f(s) - \int_0^{\alpha v} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right]$$

ist.

Ziehen wir in Betracht, dass

$$x^{(\mu)}(t + v\alpha) = s^\mu x(t + v\alpha) - s^{\mu-1}x(v\alpha) - s^{\mu-2}x'(v\alpha) - \dots - x^{(\mu-1)}(v\alpha)$$

$$(5) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \mu \leq m, \\ 0 &\leq v \leq n \end{aligned}$$

ist. Wenn wir (4) und (5) in (1) substituieren, erhalten wir die folgende gewöhnliche algebraische Gleichung:

$$(6) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n a_{\mu v} \left\{ s^\mu e^{\alpha v s} \left[f(s) - \int_0^{\alpha v} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right] - \right. \\ \left. - x(\alpha v) s^{\mu-1} - x'(\alpha v) s^{\mu-2} - \dots - x^{(\mu-1)}(\alpha v) \right\} = \{g(t)\}.$$

Aus dieser Operatorgleichung erhalten wir die allgemeine Lösung unserer Differentialdifferenzgleichung. Die Lösung lautet:

$$(7) \quad \begin{aligned} f(s) = \{x(t)\} = & \left[\{g(t)\} + \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n a_{\mu v} s^\mu e^{\alpha v s} \int_0^{\alpha v} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda + \right. \\ & + \sum_{\mu=0}^m \left\{ s^{\mu-1} \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x(\alpha v) + s^{\mu-2} \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x'(\alpha v) + \dots \right\} : \\ & \left. : \left[\sum_{v=0}^n e^{\alpha v s} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu \right] \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck zeigt uns, dass man $x(t)$ in $0 \leq t \leq \alpha n$ als $m-1$ -mal differenzierbare Funktion angeben muss. Damit ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Wir haben unser Problem schon gelöst. Wollen wir (7) in Symbolen der klassischen Analysis schreiben, so müssen wir den Ausdruck auf folgende Weise in eine unendliche Reihe entwickeln.

Es ergibt sich durch eine einfache Umformung:

$$(8) \quad \left(\sum_{v=0}^n e^{\alpha v s} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu \right)^{-1} = \frac{e^{-\alpha n s}}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu \left(1 + \frac{\sum_{v=0}^{n-1} e^{\alpha v s} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu} e^{-n\alpha s} \right)}.$$

Der Operator

$$e^{-nas} \frac{\sum_{v=0}^{n-1} e^{avs} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu}$$

stellt, wie sich das leicht einsehen lässt, eine Funktion aus der Klasse K dar. Wir können daher den Operator

$$\left(1 + e^{-nas} \frac{\sum_{v=0}^{n-1} e^{avs} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu} \right)^{-1}$$

in eine Reihe entwickeln, welche im Sinne der Operatorenrechnung konvergent ist :

$$(9) \quad \left(\dots \dots \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sum_{v=0}^{n-1} e^{avs} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu} \right)^k e^{-nkas}.$$

Setzen wir (9) in die Gleichung (8) ein, so erhalten wir für die Lösung (7) den folgenden Ausdruck :

$$(10) \quad f(s) = \{x(t)\} = \left\{ \{g(t)\} + \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n a_{\mu v} s^\mu e^{avs} \int_0^{av} x(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=0}^m \left[s^{\mu-1} \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x(av) + s^{\mu-2} \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x'(av) + \dots \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x^{(\mu-1)}(av) \right] \right\} \times \\ \times \frac{e^{-nas}}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sum_{v=0}^{n-1} e^{avs} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu n} s^\mu} \right)^k e^{-nkas}.$$

Aus diesem Ausdruck kann man $x(t)$ in der üblichen Schreibweise aufschreiben. Sind m und n grosse Zahlen, so ergibt sich zwar eine ziemlich komplizierte Formel, prinzipielle Schwierigkeiten treten jedoch nicht auf.

Sind die Koeffizienten a_{mv} , $v = 0, 1 \dots n-1$ nicht alle gleich Null, und ist $n > 1$ so ist in der Operatorenrechnung kein ähnlicher Entwicklungssatz für den Operator (9) bekannt. Ist $n = 1$ so gilt die folgende Entwicklung :

$$\left(1 + \frac{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 0} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 1} s^\mu} e^{-a} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 0} s^\mu}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 1} s^\mu} \right)^k e^{-kas}.$$

Wir werden $f(s)$ in diesem Spezialfall nicht näher betrachten. Ist $\alpha < 0$ so setzen wir voraus dass die Koeffizienten a_{nv} , $v = 1, 2 \dots n$ alle gleich Null sind. Das bedeutet, dass die höchste Ableitung nur mit dem Argument ohne Verschiebung auftreten soll. Wir erhalten die folgende Lösung:

$$(11) \quad \{x(t)\} = \left[g(t) - \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n a_{\mu v} s^{\mu} \int_0^{\beta v} x(\lambda - v\beta) e^{-\lambda s} d\lambda + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=0}^m \left\{ s^{\mu-1} \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x(-v\beta) + \dots + \sum_{v=0}^n a_{\mu v} x^{(\mu-1)}(-v\beta) \right\} \right] \times \\ \times \frac{1}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 0} s^{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sum_{v=1}^n e^{-v\beta} \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} s^{\mu}}{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu 0} s^{\mu}} \right)^k$$

wo $\beta = -\alpha$ ist. Ist $x(t)$ in $-\beta n \leq t \leq 0$ als eine $m-1$ -mal differenzierbare Funktion gegeben, so ist die Lösung eindeutig bestimmt.

§ 3. Ein Beispiel

Wir werden die Lösungsmethode an Hand eines Beispielles schildern. Lösen wir die folgende Differentialdifferenzgleichung:

$$(12) \quad x''(t + \pi) + 2x'(t) + x(t) = e^t$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t) = \sin t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Es sind

$$(13) \quad \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(\pi) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \\ x'(\pi) &= -1 \end{aligned}$$

und

$$(14) \quad \int_0^{\pi} \sin \lambda e^{-\lambda s} d\lambda = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}.$$

Weiterhin ist

$$(15) \quad \begin{aligned} \{x''(t + \pi)\} &= s\{x'(t + \pi)\} - x'(\pi) = s^2\{x(t + \pi)\} - sx(\pi) - x'(\pi) = \\ &= s^2 e^{\pi s} f(s) - s^2 \frac{1 + e^{\pi s}}{1 + s^2} + 1. \end{aligned}$$

Mit (15) und

$$\{x'(t)\} = sf(s) - x(0) = sf(s)$$

erhalten wir die folgende Operatorgleichung

$$s^2 e^{\pi s} f(s) - s^2 \frac{1 + e^{\pi s}}{1 + s^2} + 1 + 2 s f(s) + f(s) = \{e^{t^2}\}$$

woraus

$$(16) \quad f(s) = \{x(t)\} = \frac{\{e^{t^2}\} + s^2 \frac{1 + e^{\pi s}}{1 + s^2} - 1}{s^2 e^{\pi s} + 2 s + 1}$$

folgt. Mit Anwendung der oben betrachteten Reihenentwicklung ergibt sich

$$(17) \quad (s^2 e^{\pi s} + 2 s + 1)^{-1} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + (1 + 2 s) e^{-\pi s}} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + 2 s}{s^2}\right) e^{-\pi s}} =$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1 + 2 s}{s^2}\right)^k e^{-k\pi s}.$$

Setzen wir nun (17) in (16), so erhalten wir für die Lösung

$$(18) \quad \{x(t)\} = f(s) = e^{-\pi s} \left(\frac{\{e^{t^2}\}}{s^2} + \frac{1 + e^{\pi s}}{1 + s^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1 + 2 s}{s^2}\right)^k e^{-k\pi s}.$$

Aus diesem Ausdruck kann man die Lösung ohne besonderen Schwierigkeiten, in der üblichen Schreibweise als eine Funktion von t aufschreiben.

(Eingegangen 20. Mai, 1959.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MIKUSIŃSKI, J.: *Operatorenrechnung*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

A MIKUSIŃSKI-FÉLE OPERÁTORSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS RETARDÁLT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSÁRA

FÉNYES T.

Kivonat

Szerző a Mikusinski-féle operátorszámítás segítségével előállítja a

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} x^{(\mu)}(t + \nu\alpha) = g(t)$$

difference-difference equation operátormegoldását.

Megmutatja, hogy a megoldás egyértelműségét biztosító, megadandó kezdeti feltételek a módszer alkalmazása révén az operátoregyenletből leolvashatók. Ezután egy eljárást mutat meg, amelynek alkalmazásával a megoldás a klasszikus analízis jelöléseivel is felírható.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. FÉNYES

Резюме

Автор с помощью операционного исчисления от Mikusiński находит операционное решение разностно-дифференциального уравнения

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} x^{(\mu)}(t + \nu\alpha) = g(t) .$$

Доказывает, что начальные условия, обеспечивающие единственность решения, могут быть определены с помощью операторного уравнения. После этого даётся метод, с помощью которого решения может быть записано и обозначениями классического анализа.