LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA SZIMPLEX MÓDSZERREL

Bevezetés

KREKÓ BÉLA

A gazdasági életben felmerülő matematikai problémák megoldása számos esetben a *lineáris programozás* néven ismert módszerre vezethető vissza [1]. A lineáris programozásnál egy olyan elsőfokú függvény extremális értékének meghatározásáról van szó, amelynek értelmezési tartományát egy — az adott gazdasági feltételeket reprezentáló — lineáris egyenlőtlenségrendszer szabja meg. Ennek következtében a kérdéses értelmezési tartomány olyan konvex halmazt alkot, amelynek véges számú csúcspontja van. Ha a vizsgálandó függvénynek van extremális értéke, azt e csúcspontok valamelyikében feltétlenül felveszi. A megoldásra szolgáló módszerek közül legelterjedtebb a G. B. DANTZIGtól származó *szimplex módszer* [2]. A szimplex módszernek az az alapgondolata, hogy az értelmezési tartomány egyik csúcspontjából kiindulva úgy haladjunk csúcspontról csúcspontra, hogy közben a függvény helyettesítési értékei monoton sorozatot alkossanak. S mivel a csúcspontok száma véges, a kérdéses extrémum — amennyiben létezik — véges számú lépésben meghatározható.

A szimplex módszer elemzése közben kiderült, hogy annak alapvető mozzanata az az eljárás, amelyet a továbbiakban *elemi transzformáció*nak fogunk nevezni. Ez olyan speciális lineáris transzformációt jelent, amelynek révén egy adott bázisból olyan új bázisba térünk át, amely csupán egyik vektorában különbözik az eredetitől. S mivel bármely lineáris transzformáció elemi transzformációk sorozatára bontható fel, érthető, hogy ezen az úton lehetőség nyílik számos lineáris algebrai probléma egyszerű — determinánsmentes — tárgyalására.[1]

Ebben a dolgozatban csupán a lineáris egyenletrendszerek megoldásával kívánunk foglalkozni. A bemutatandó eljárással kapcsolatban, amelyet az előzőek alapján ugyancsak *szimplex módszer*nek fogunk nevezni, előrebocsátjuk a következőket:

a) Közvetlenül alkalmazható bármilyen végesdimenziójú lineáris egyenletrendszer megoldására. (Az inhomogén rendszereket nem kell előbb átalakítani homogén rendszerekké.)

b) A kompatibilitás és a rang kérdésének eldöntésével egyidejűleg explicit formában kapjuk meg a megoldást is. Nincs tehát szükség további rekurzív

[1] Erre már az [1] alatt (164—175) rámutattunk.

számítások elvégzésére, mint a diadikus felbontáson alapuló egyéb módszereknél.[2]

c) Az alkalmazandó numerikus számítások mennyisége azonos nagyságrendű, mint a mátrix-számításon alapuló egyéb módszereknél.

A továbbiakban először az elemi transzformációval foglalkozunk, majd megmutatjuk, hogyan lehet felhasználni az elemi transzformációkat valamely adott **A** matrix egy speciális bázisfelbontására. Ez a felbontás teszi lehetővé a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egyszerű tárgyalását. Ehhez kapcsolódik a matrixok inverziója, amely lényegében több olyan egyenletrendszer szimultán megoldását jelenti, amelyek azonos együtthatómátrixszal bírnak. A módszer hatékonyságát néhány numerikus példa bemutatásával kívánjuk illusztrálni.

1. §. Az elemi transzformáció és a bázisfelbontás

Legyenek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ vektorok az m-dimenziós lineáris tér egyik bázisának vektorai. Ismeretes, hogy ez esetben a tér bármely $\mathbf{x}$ vektora felírható az

$$(1.1) \qquad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1, + \ldots + x_i \mathbf{b}_i + \ldots + x_m \mathbf{b}_m$$

lineáris forma segítségével, ahol az $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ skalárok a kérdéses bázisra vonatkozó koordináták. Amint már említettük, a szimplex módszer alapvető mozzanata az az eljárás, amellyel a bázis egyik vektorát kicseréljük a tér valamely alkalmasan megválasztott **a** vektorával. Ezt az eljárást nevezzük *elemi transzformációnak*. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{b}_i$ bázisvektort kicserélhessük a kérdéses **a** vektorral, az, hogy az **a**-nak a $\mathbf{b}_i$-re vonatkozó koordinátája 0-tól különböző legyen, vagyis az

$$(1.2) \qquad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + a_i \mathbf{b}_i + \ldots + a_m \mathbf{b}_m$$

lineáris kombinációban teljesüljön az $a_i \neq 0$ követelmény.[3] Ha (1.2)-ből kifejezzük $\mathbf{b}_i$-t, és az így nyert formulát behelyettesítjük a (1.1)-be, az

$$\mathbf{x} = (x_1 - \delta_i a_1)\,\mathbf{b}_1 + \ldots + \delta_i \mathbf{a} + \ldots + (x_m - \delta_i a_m)\,\mathbf{b}_m$$

kifejezést nyerjük, ahol

$$\delta_i = \frac{x_i}{a_i}.$$

E kifejezésből az új bázisra vonatkozó koordináták közvetlenül kiolvashatók. A szükséges számításokat célszerű az alábbi elrendezés szerint elvégezni[4]

[2] Mint pl. a [3], [4] és [5] alatt tárgyalt módszereknél.
[3] Lásd az [1]-et a 101. oldalon!
[4] A bázisból kilépő, ill. a bázisba belépő vektort egy-egy nyíllal jelöltük meg.

(1.3)

I. Bázis	x	a	II. Bázis	x	a
$\mathbf{b}_1$	x_1	a_1	$\mathbf{b}_1$	$x_1 - \delta_i a_1$	0
$\mathbf{b}_2$	x_2	a_2	$\mathbf{b}_2$	$x_2 - \delta_i a_2$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow \mathbf{b}_i$	x_i	a_i	$\rightarrow \mathbf{a}$	δ_i	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}_m$	x_m	a_m	$\mathbf{b}_m$	$x_m - \delta_i a_m$	0

A transzformációt meghatározó a_i skalárt *generáló elem*nek nevezzük. Az említett feltétel értelmében *generáló elem csak 0-tól különböző szám lehet.*

Tegyük fel ezután, hogy az

(1.4) $$\underset{(m,n)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

mátrix oszlopvektorai a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ bázisban megadott vektorok. Ezzel kapcsolatban tűzzük ki az alábbi feladatot: Az adott bázis vektorait cseréljük ki, az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraival!

E feladat több egymás után végrehajtott elemi transzformációval oldható meg. Az egyes transzformációs lépéseknél a generáló elemet úgy kell megválasztani, hogy mindig valamely $\mathbf{b}_i$ vektor cseréltessék ki egy lehetséges $\mathbf{a}_j$ vektorral. Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg találunk az előbbi követelménynek eleget tevő — 0-tól különböző — generáló elemet. Az utolsó bázisban található $\mathbf{a}_j$ vektorok szükségképpen bázisát alkotják az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által meghatározott altérnek, az ún. *oszlopvektortérnek.* S mivel a mátrix rangja megegyezik az oszlopvektortér dimenziójával, a bázisba beépíthető $\mathbf{a}_j$ vektorok maximális száma egyúttal az $\mathbf{A}$ rangját is jelenti. Maga az egész eljárás nem tételezi fel eleve a rang ismeretét, ellenkezőleg: algoritmusként használható a rang meghatározására.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ rangja r, és az előbb vázolt eljárás alapján éppen az első r

(1.5) $$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$$

oszlopvektor került be a bázisba. Ez nem sérti a tárgyalás általánosságát, hiszen — mint ismeretes — a rang független a vektorok sorrendjétől.[5] Mivel az $\mathbf{A}$ bármelyik oszlopvektora kifejezhető az oszlopvektortér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként, azért

(1.6) $$\mathbf{a}_j = \mathbf{A}_1 \mathbf{k}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

[5] Megjegyezzük azonban, hogy a számítások gyakorlati végrehajtásánál nem kell tekintettel lennünk a vektorok sorrendjére. Itt csak a tárgyalás egyszerűsítése végett folyamodtunk ehhez a feltevéshez.

ahol

$$(1.7)\qquad \mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r],$$

a $\mathbf{k}_j$ pedig olyan vektor, amelynek komponensei a j-edik oszlopvektornak az (1.5) alatti bázisra vonatkozó koordinátái. Az (1.6) és az (1.7) alapján

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{k}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{A}_1 \mathbf{k}_n] = \mathbf{A}_1[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n] = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 .$$

A jelen esetben

$$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{E}_r, \mathbf{D}],$$

ahol az $\mathbf{E}_r$ egy r-edrendű egységmatrix. Ezért

$$(1.8)\qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_1[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}] .$$

Ezzel az $\mathbf{A}$ matrix egy speciális bázisfelbontásához jutottunk[6]. Az elnevezés azon a könnyen belátható tényen alapszik, hogy az $\mathbf{A}_2$ sorvektorai meg az $\mathbf{A}$ sorvektorai által meghatározott altérnek, az ún. *sorvektortér*nek, adják meg egy bázisát.[7] Egy adott numerikus példában a $\mathbf{D}$ matrix elemei az utolsó elemi transzformáció végrehajtása után nyert táblázatból közvetlenül kiolvashatók.

Példaképpen tekintsük az

$$(1.9)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrixot. A számítások elvégzéséhez az alábbi táblázat szerint három elemi transzformáció szükséges.

(1.10)

Bázis	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
$\leftarrow\mathbf{b}_1$	2	$\boxed{1}$	1	3	2
$\mathbf{b}_2$	1	—6	1	3	5
$\mathbf{b}_3$	3	2	3	4	5
$\mathbf{b}_4$	—1	2	—1	—2	—3
$\rightarrow\mathbf{a}_2$	2	1	1	3	2
$\mathbf{b}_2$	13	0	7	21	17
$\leftarrow\mathbf{b}_3$	—1	0	$\boxed{1}$	—2	1
$\mathbf{b}_4$	—5	0	—3	—8	—7

[6] Megjegyezzük, hogy egy mátrixnak számtalan sok bázisfelbontása lehetséges. Egy adott $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2$ bázisfelbontásból azonban az $(\mathbf{A}_1 \mathbf{M})$ $(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2)$ formula alapján bármely más bázisfelbontás előállítható. Az $\mathbf{M}$ egy alkalmasan megválasztott nem szinguláris kvadratikus mátrixot jelent. (Lásd: [3] p. 431.)

[7] Ugyanekkor az $\mathbf{A}_1$ sorvektorai az $\mathbf{A}$ sorvektorainak az $\mathbf{A}_2$ által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit adják.

(1.10)

Bázis	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$
$\mathbf{a}_2$	3	1	0	5	1
$\mathbf{b}_2$	20	0	0	35	10
$\rightarrow\mathbf{a}_3$	—1	0	1	—2	1
$\leftarrow\mathbf{b}_4$	—8	0	0	—14	$\boxed{-4}$
$\mathbf{a}_2$	1	1	0	1,5	0
$\mathbf{b}_2$	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	—3	0	1	—5,5	0
$\rightarrow\mathbf{a}_5$	2	0	0	3,5	1

További elemi transzformációra azért nem kerülhet sor, mert a $\mathbf{b}_2$-nek megfelelő sorban már nem tudunk választani generáló elemet.

Az elmondottak alapján a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1{,}5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -5{,}5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

bázisfelbontást nyerjük. Ha az oszlopvektorok sorrendjét történetesen az $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$ sorrendnek megfelelően választottuk volna meg, akkor a felbontást pontosan az (1.8) alatti formulának megfelelően kaptuk volna meg.

A számításokat nagymértékben leegyszerűsíthetjük, ha érvényesítjük az alábbi szempontokat.

a) Az eredeti bázis vektorainak szimbólumát nem tüntetjük fel.

b) A bázisba belépő vektorokhoz tartozó oszlopokat rendre elhagyjuk.

c) Az egymás után következő táblázatokat nem egymás alá, hanem egymás mellé írjuk.

Ezen az alapon az (1.9) alatti táblázat a következővel helyettesíthető:

(1.11)

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_2$	2	$\boxed{1}$	1	3	2	2	1	3	2	3	5	1	1	1,5
	1	—6	1	3	5	13	7	21	17	20	35	10	0	0
$\mathbf{a}_3$	3	2	3	4	5	—1	$\boxed{1}$	—2	1	—1	—2	1	—3	—5,5
$\mathbf{a}_5$	—1	2	—1	—2	—3	—5	—3	—8	—7	—8	—14	$\boxed{-4}$	2	3,5

2. §. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Tekintsük az

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{2.1}$$

egyenletrendszert. Ezt az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindazon $\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ pontok halmazát, amelyek kielégítik a (2.1) alatti követelményt. Ha e halmaz nem üres, az egyenletrendszert *kompatibilis*nek nevezzük, ellenkező esetben *inkompatibilis*nek. Kézen fekvő, hogy a kompatibilitás ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a $\mathbf{c}$ benne fekszik az $\mathbf{A}$ oszlopvektorterében.

Tegyük fel, hogy egyenletrendszerünk kompatibilis, továbbá: az $\mathbf{A}$ az (1.8)-nak megfelelően az

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}] \tag{2.2}$$

alakban bontható fel. A kompatibilitás követelménye értelmében a $\mathbf{c}$ is kifejezhető az $\mathbf{A}_1$ által meghatározott bázisban, azaz

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\,. \tag{2.3}$$

A (2.2) és a (2.3) alapján azonban a (2.1) így írható fel:

$$\mathbf{A}_1[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\,. \tag{2.4}$$

Mivel az $\mathbf{A}_1$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek a (2.1), illetve a (2.4) alatti egyenletrendszer ekvivalens az

$$[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2.5}$$

egyenletrendszerrel, amely már könnyen megoldható. Bontsuk fel ugyanis az $\mathbf{x}$ vektort az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ szimbolumokkal jelölt blokkokra, ahol az $\mathbf{x}_1$ komponenseinek száma r, az $\mathbf{x}_2$ komponenseinek száma pedig $n - r = s$. Ez esetben a (2.5) helyett az

$$[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{d}$$

egyenlőséget nyerjük, ahonnan

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{d} - \mathbf{D}\,\mathbf{x}_2\,. \tag{2.6}$$

Ez pedig éppen az egyenletrendszer megoldását jelenti a szokásos formában. Az $\mathbf{x}_1$ komponensei az ún. *kötött ismeretlenek*, az $\mathbf{x}_2$ komponensei meg az ún. *szabad ismeretlenek*. Mivel az $\mathbf{x}_2$ komponensei egymástól függetlenül bármilyen valós értéket felvehetnek, az s skalárt az *egyenletrendszert szabadságfok*ának nevezzük.

A (2.6) alatti megoldást olyan formában is felírhatjuk, amely — úgy véljük — mélyebb bepillantást enged a dolog lényegébe. Csatoljuk ugyanis a (2.6)-hoz a triviálisan teljesülő

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{E}_s\,\mathbf{x}_2$$

egyenlőséget, ahol az $\mathbf{E}_s$ egy s-edrendű egységmátrix. Ezzel az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_s \end{bmatrix} \mathbf{x}_2$$

kifejezéshez jutunk. Ha az $\mathbf{x}_2$ helyébe, amelynek komponensei úgyis tetszőlegesek, a $\mathbf{t}$ vektort írjuk, a megoldást az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_s \end{bmatrix} \mathbf{t} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\,\mathbf{t} \tag{2.7}$$

formában kapjuk meg. E formulában a $\mathbf{t}$ helyébe bármilyen s komponensű vektort behelyettesíthetünk. Ebből viszont az következik, hogy az $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ vektorhoz tartozó *partikuláris megoldás*t jelenti, a $\mathbf{B}\,\mathbf{t}$ pedig a $\mathbf{B}$ oszlopvektorterének valamelyik vektorát. Innen könnyen adódik az ismert tétel, amely szerint a **B** **t** alakú vektorok egy, az **A** sorvektorterére merőleges alteret alkotnak, amelynek a dimenziója s. Az állítás első része az

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{A}_1[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

összefüggésből következik, a második része pedig abból a tényből, hogy a **B** olyan trapéz alakú mátrix, amelynek egyik blokkja egy s-edrendű egységmátrix.

Összefoglalva: a (2.3) alatti egyenletrendszer összes lehetséges megoldásai egy olyan s dimenziós hipersíkot állítanak elő, amely merőleges az együtthatómátrix sorvektorterére.

A kérdéses most már az, hogy egy adott numerikus példában hogyan kaphatjuk meg a megoldásban szereplő állandókat. A **D** mátrixot illetőleg már láttuk, hogy az — elemi transzformációk segítségével — r lépésben meghatározható. Nyilvánvaló azonban, hogy ugyanezek a transzformációk a **d** vektor meghatározására is alkalmasak. Semmi mást nem kell tenni, mint az **A** mátrixot kibővíteni a **c** oszlopvektorral és a szükséges számításokat ezzel a *bővített mátrixszal* elvégezni. A **c** koordinátái közül természetesen nem választhatunk generáló elemet. Az r-edik transzformációs lépés után kiderül, hogy a **c** benne fekszik-e az **A** oszlopvektorterében vagy nem, azaz: kompatibilis-e az egyenletrendszer vagy sem. A számítások tehát a rang, illetve a bázis kérdése mellett a kompatibilitás kérdését is automatikusan felderítik.

A kompatibilitást illetőleg egyébként triviálisak az alábbi állítások.

a) A homogén egyenletrendszer (amikor tehát $\mathbf{c} = \mathbf{0}$) mindig kompatibilis.

b) Ha $r = m$ az egyenletrendszer ugyancsak kompatibilis.

A szabadságfok tekintetében gyakorlati szempontból külön figyelmet érdemel az az eset, amikor $s = 0$. Ekkor, amennyiben az egyenletrendszer kompatibilis, a megoldás egyetlen pontra redukálódik. (Az egyenletrendszer egyértelműen oldható meg.)

A numerikus eljárás illusztrálására megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ahol **A** az (1.9)-ben szereplő mátrix. A számítások végrehajtása tehát az ottanitól csupán abban fog különbözni, hogy az **A** oszlopvektorai mellett a táblázatban a **c** vektort is feltüntetjük. Az új táblázatban — a numerikus igényeknek megfelelően — a vektorszimbólumok helyett mindenütt a megfelelő ismeretlenek szimbólumát fogjuk feltüntetni.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_1	x_3	x_4	x_5		x_1	x_4	x_5		x_1	x_4	
x_2	2	$\boxed{1}$	1	3	2	7	1	1	3	2	7	3	5	1	3	1	1,5	2
	1	−6	1	3	5	−4	13	7	21	17	38	20	35	10	10	0	0	0
x_3	3	2	3	4	5	18	−1	$\boxed{1}$	−2	1	4	−1	−2	1	4	−3	−5,5	3
x_5	−1	2	−1	−2	−3	−2	−5	−3	−8	−7	−16	−8	−14	$\boxed{-4}$	−4	2	3,5	1

A (2.6)-nak megfelelően a megoldás tehát a következő:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - 1\,x_1 - 1{,}5\,x_4 \\ x_3 &= 3 + 3\,x_1 + 5{,}5\,x_4 \\ x_5 &= 1 - 2\,x_1 - 3{,}5\,x_4 \end{aligned}$$

Ez a (2.7) szerinti formában:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1{,}5 \\ 3 & 5{,}5 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

A bemutatott eljárás jól alkalmazható a *mátrixok inverzének* meghatározására is. Egy adott $\mathbf{A}$ matrix jobboldali inverzén például, mint ismeretes, azt az $\mathbf{X}$ mátrixot értjük, amely eleget tesz az

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}$$

követelményeknek. Az $\mathbf{X}$ meghatározása az azonos $\mathbf{A}$ együtthatómátrixszal rendelkező

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \qquad (i - 1, 2, \ldots, m)$$

alakú egyenletrendszerek szimultán megoldására vezethető vissza, ahol az $\mathbf{x}_i$ az $\mathbf{X}$ mátrix, az $\mathbf{e}_i$ pedig az $\mathbf{E}$ mátrix i-edik oszlopvektora. Ebből következik, hogy eljárásunkat csupán annyiban kell módosítanunk, hogy a $\mathbf{c}$ vektor helyébe az $\mathbf{E}$ oszlopvektorait kell írnunk. Könnyen belátható, hogy a jobboldali inverz akkor és csak akkor létezik, ha az $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan függetlenek.

Határozzuk meg példaképpen az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jobboldali inverzét. A megoldást az alábbi táblázatból olvashatjuk ki:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$				$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$				$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$				$\mathbf{a}_4$			
a_1	$\boxed{1}$	1	1	3	1	0	0	1	1	3	1	0	0	−1	−2	−1	1	0	−1	−0,5	0	0,5
a_2	2	1	0	1	0	1	0	$\boxed{-1}$	−2	−5	−2	1	0	2	5	2	−1	0	3	1	1	−1
a_3	3	1	1	1	0	0	1	−2	−2	−8	−3	0	1	$\boxed{2}$	2	1	−2	1	1	0,5	−1	0,5

E szerint a keresett inverz:

$$\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

ahol a t bármilyen skalár lehet.

Numerikus szempontból érdeklődésre tarthat talán számot, hogy a számításokban további egyszerűsítéseket is eszközölhetünk. Ez abban áll, hogy az induló táblázatban nem írjuk fel az **E** oszlopvektorait. Az inverz mátrixban szereplő vektorok csak lépésről lépésre kerülnek be a táblázatba — az eredeti mátrixnak a bázisba bekerülő vektorai helyébe. Ha tehát az inverz vektorait rendre az $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots$ szimbólumokkal jelöljük, akkor az előbbi táblázat helyett a következőt alkalmazhatjuk:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_1$	$\boxed{1}$	1	1	3	1	1	1	3	−1	1	−1	−2	−0,5	0	0,5	−1
$\mathbf{a}_2$	2	1	0	1	−2	$\boxed{-1}$	−2	−5	2	−1	2	5	1	1	1	3
$\mathbf{a}_3$	3	1	1	1	−3	−2	−2	−8	1	−2	$\boxed{1}$	2	0,5	−1	0,5	1

(Beérkezett: 1958. február 15.)

IRODALOM

[1] Krekó—Bacskay: *Bevezetés a lineáris programozásba.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1957.

[2] Dantzig, G. B.: "Maximation of a linear function of variables subject to linear inequalities." *Koopmans: Activity analysis of production and allocation.* John Wiley. New York, 1951. p. 339—347.

[3] Egerváry J.: „Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról". *A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.

[4] Egerváry J.: "Mátrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására" *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11—32.

[5] Egerváry J.: „Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 109—123.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СИМПЛЕКСА

B. KREKÓ

Резюме

Автор показывает, что несколько измененный метод симплекса G. B. Dantzig-а может применяться и для решения систем линейных уравнений. Основа метода — так называемое элементарное преобразование. Это такое специальное линейное преобразование, с помощью которого из данного базиса можно перейти в такой новой базис, который отличается от исходного лишь в одном векторе.

Рассмотрим некоторую систему уравнений, заданную в виде

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Предположим, что ранг **A** равен r и что векторы, стоящие в её первых r столбцах, линейно независимы. В этом случае **A** может быть факторизованно по образцу соотношения

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1[\mathbf{E}_r\,\mathbf{D}]\,,$$

где $\mathbf{A}_1$ матрица, образованная из первых r столбцов **A**, а $\mathbf{E}_r$ некоторая единиччная матрица порядка r. Если система уравнений разрешима, то **b** может быть записан и в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_1\,\mathbf{d}\,.$$

Но тогда исходная система уравнений эквивалентна системе уравнений

$$[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{d}\,,$$

общее решение которой

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{D}\\ \mathbf{E}_s\end{bmatrix}\mathbf{t}\,.$$

Здесь $\mathbf{E}_s$ единичная матрица порядка s а t любой вектор порядка s. s — степень свободы системы уравнений.

С помощью r элементарных преобразований как **D**, так и d могут быть численно определены. Метод не предполагает заранее ни знания ранга, ни разрешимости.

С помощью этого метода может быть просто произведено и вычисление обратных матрий.

SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH THE SIMPLEX METHOD

by

B. KREKÓ

Abstract

This paper shows that the simplex method due to G. B. Dantzig is convenient — with some modification — to solve a set of simultaneous linear equations. The essence of the procedure is the so -called elementary transformation. It is a special linear transformation by the means of which we can go from a given basis to another basis differing only in a single vector.

Let us consider a system of linear equations in the folowing form:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

We suppose that the rank of **A** is r and — accidentally — the first r column — vectors of **A** are linear independent. In this case

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\,,$$

where $\mathbf{A}_1$ is a matrix containing the first r column-vector of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{E}_r$ is a unit matrix of order r. If the system of equations is compatible, we can write

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_1 \mathbf{d} .$$

In these circumstances the original system is equivalent with the system

$$[\mathbf{E}_r, \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{d} ,$$

having the general solution

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_s \end{bmatrix} \mathbf{t} ,$$

where $\mathbf{E}_s$ is a unit matrix of order s and $\mathbf{t}$ is an arbitrary vector with s components. s is the degree of freedom of the system.

With the help of r elementary transformations we can numerically determine both $\mathbf{D}$ and $\mathbf{d}$.

The procedure does not suppose the knowledge of the rank and the compatibility.

The procedure presented is also convenient to determine the inverse of a matrix nonsingular.