

TÖBBSZABADSÁGFOKÚ LENGŐRENDSZER GERJESZTETT LENGÉSEI VIZSGÁLATÁNAK EGY MÓDSZERE S NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

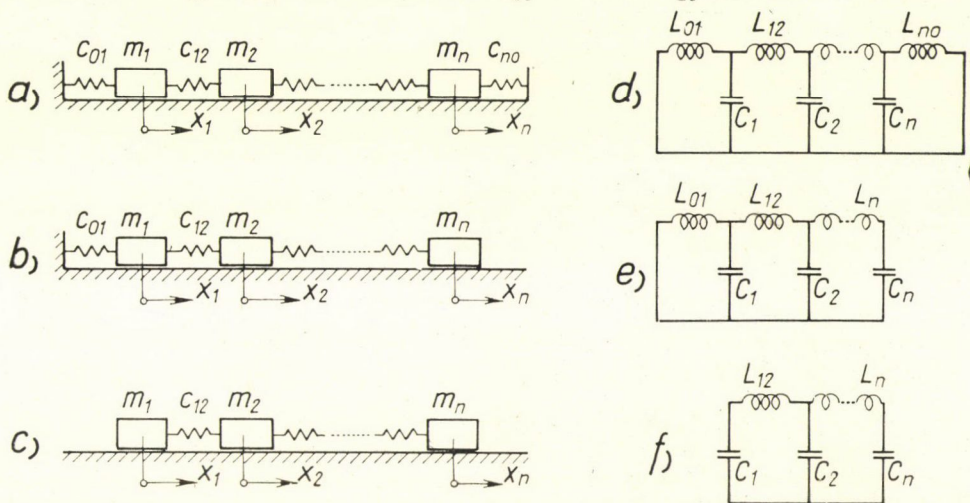
BOSZNAY ÁDÁM

1. Bevezetés, célkitűzés

Véges sok szabadságfokú lengőrendszer periódusos gerjesztő erők hatására kialakuló, a gerjesztő hatás periódusával megegyező periódusú lengése amplitúdójának meghatározása elméleti és gyakorlati szempontból is jelentős feladat, s mind a műszaki és elméleti mechanikában, mind a műszaki és elméleti villamoságban gyakran találkozunk vele. Ezt a feladatot kell például megoldani belsőégésű motor főtengelye csavaró lengés okozta többletigénybevételének meghatározásakor, vagy pl. mechanikai vagy villamos szűrők vizsgálatánál. Dolgozatunk célja: ennek a feladatnak a megoldására alkalmas, előnyösnek ítélt eljárás és az eljárás néhány alkalmazási lehetőségének bemutatása. A dolgozat kifejezés módja elsősorban a mechanikai lengőrendszereket tartja szem előtt, de minden eredménye átvihető az ismert módon megfelelő villamos kapcsolásokra is.

2. Az eljárás ismertetése

A szóbanforgó eljárás közvetlenül és a legegyszerűbben az 1. ábra szerinti mechanikai lengőrendszer-modellekre vagy a velük egyenértékű és az ábrán



1. ábra

ugyancsak feltüntetett villamos kapcsolásokra alkalmazható. További vizsgálatainkban az 1b ábrán rajzolt modellt tartjuk szem előtt, az ezzel kapcsolatban nyert eredmények jól ismert módon átvihetők az 1. ábra többi modelljére.

Az 1b ábrán látható modell kis kitérésű gerjesztett lengéseit az

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{23} & u_{33} & u_{34} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_{n-1,n} & u_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{k-1} & k & \underbrace{k+1} & \underbrace{n-1} & \underbrace{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}$$

mátrixok bevezetésével az

$$(1) \quad \mathbf{E} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$$

mátrixdifferenciálegyenlet írja le. Periódusos $P_k(t)$, ($k = 1, \dots, n$) gerjesztő erők esetén (1) lineáris felépítése miatt érvényes a szuperpozíció elve, vagyis a feladat megoldását

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_{0i} \cdot \sin \omega t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakú gerjesztő erőkhöz tartozó megoldások összegeként nyerjük. A gerjesztő hatás periódusával megegyező vagy röviden állandósult lengésnek

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} \cdot \sin \omega t = \mathbf{x}_0 \cdot \sin \omega t$$

megoldásvektor felel meg. (1)-be visszahelyettesítve és $\sin \omega t$ -vel egyszerűsítve

$$(2) \quad (-\omega^2 \mathbf{E} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{p}_0$$

inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk $\mathbf{x}_0$ meghatározására
Részletesen kiírva:

[illegible]

Módszerünk alapgondolata az, hogy $\mathbf{x}_0$ meghatározását $\alpha = \omega$ kör-frekvenciájú saját lengés lengésképeinek meghatározására vezetjük vissza. Ez a gondolat a (3) egyenletrendszerrel kapcsolatban úgy szemléltethető, hogy az i -edik egyenlet jobboldalát az alábbi módon a baloldalra vesszük át (feltéve, hogy $x_{0i} = 0$):

$$u_{i-1,i} \cdot x_{0,i-1} + \left[-\omega^2 \left(m_i + \frac{P_{0i}}{\omega^2 \cdot x_{0i}} \right) + u_{ii} \right] x_{0i} + u_{i,i+1} \cdot x_{0,i+1} = 0.$$

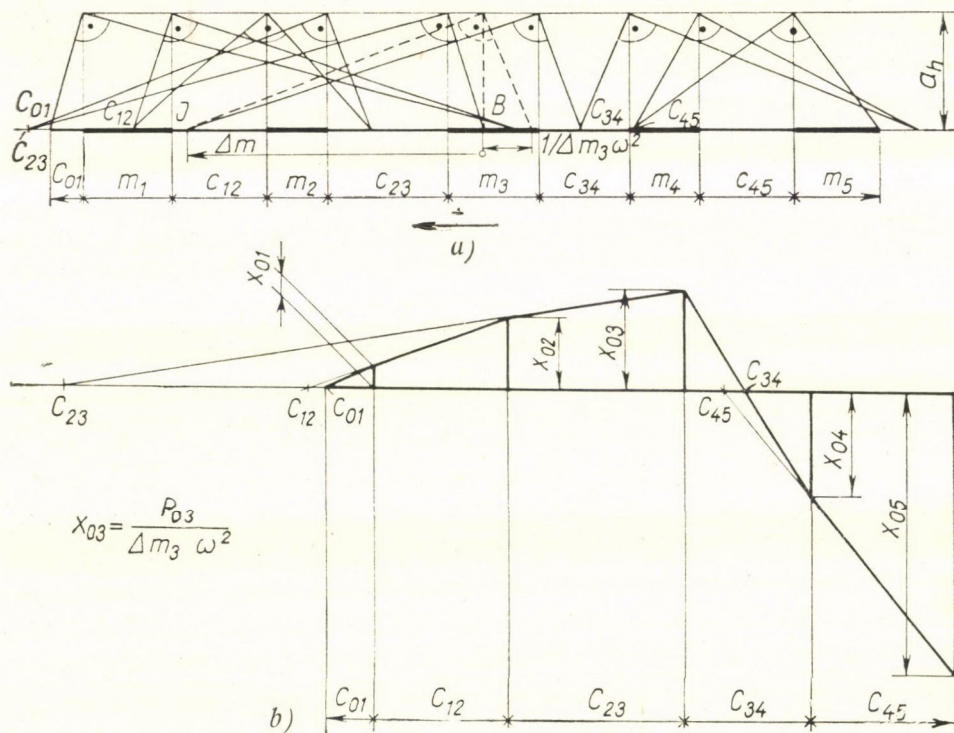
Ez után az átalakítás után (3) alakja olyan, mint az eredetitől csak az i -edik tömeg tekintetében különböző lengőrendszer ω körfrekvenciájú sajátlengésformáját meghatározó egyenletrendszer; ω tehát a sajátkörfrekvencia szerepét tölti be. A módosított i -edik tömeg:

$$(4) \dots \quad m'_i = m_i + \frac{P_{0i}}{\omega^2 \cdot x_{0i}}.$$

A fent x_{0_k} -kra felírt homogén lineáris egyenletrendszer együtthatói most mind ismeretesek, kivéve x_{0_i} együtthatóját az i -edik egyenletben, ebben ugyanis maga az x_{0_i} ismeretlen is szerepel. Az a feltétel, hogy az egyenletrendszernek legyen a triviálisól különböző megoldása, x_{0_i} számára ad meghatározó egyenletet. x_{0_i} -ből m'_i számítható, s így már minden együttható ismeretes.

Az egyenletrendszer számításhoz megoldására az alábbi út kínálkozik. Bár az ismert x_{0i} már egyértelműen meghatározza az összes ismeretlent,

vegyük fel mégis egyelőre x_{01} -et tetszés szerint, legyen ez a tetszés szerint felvett érték x_{01}^* . Ebből — sorról sorra haladva — a többi, ehhez az x_{01}^* értékhez tartozó s ugyancsak csillaggal jelölt ismeretlen is meghatározható. Az $(i - 1)$ -edik sorból adódó x_{0i}^* általában nem egyezik meg az előbb számított (helyes) x_{0i} -vel. Az eddig kiszámított, csillaggal jelölt mennyiségekből a (3) egyenletrendszert kielégítő értékeket azoknak x_{0i}/x_{0i}^* -al való szorzásával kapjuk. Ezután sorról sorra továbbhaladva meghatározhatjuk a többi ismeretlent. Az utolsó egyenlet kontrollként szolgál. A fent vázolt — csillagos mennyiségekkel történő — számítás az egyenletrendszer mátrixának kontinuáns voltát kihasználva elkerüli a determinánsokkal való számolást.



2. ábra

$i = 1$ vagy $i = n$ esetén (azaz ha éppen az első vagy az utolsó tömegre működtetünk gerjesztést) az eljárás annyiban egyszerűbb, hogy a csillagos mennyiségekkel való számolás elmarad.

Az eljárás *grafikus változata* az eredetileg sajátkörfrekvencia és sajátlengésforma meghatározására konstruált Kohn-féle szerkesztést [2] alkalmazza.¹ A szerkesztést azzal készítjük elő, hogy alkalmas m_x [cm/kpsec²cm⁻¹] tömeg-

¹ Sajátkörfrekvenciák és sajátlengésformák meghatározására szolgáló eljárás gerjesztett lengések vizsgálatára való alkalmazásának gondolatát először HOLZERNÉL találjuk meg [9]. A Kohn-szerkesztést tudomása szerint a szerző alkalmazta először erre a célra [3], majd SÁLYI kiterjesztette alkalmazhatóságát sebességgel arányos csillapítással kiegészített modell gerjesztett lengésének vizsgálatára [4].

és $c_x [\text{cm/cmkp}^{-1}]$ rugóállandómérték felvétele után felrajzoljuk a lengőrendszer úgynevezett vázát (2a ábra), majd tőle $a_h = \frac{\sqrt{m_x \cdot c_x}}{\omega}$ távolságban vele pár-

huzamosat húzunk. Ábránkon példaképpen ötszabadságfokú, egyik végén kötött lengőrendszer vázát rajzoltuk fel, s a 3. tömeget támadja $P_{03} \cdot \sin \omega t$ gerjesztőerő.

A szerkesztés abban áll, hogy a modellváznak mind a bal-, mind a jobboldali végpontjából kiindulva megrajzoljuk az ábra alapján követhető módon a Kohn-szerkesztés törtvonalát, de mindkét oldalról csak a gerjesztett tömeg képéig, ábránkon a B, illetve J pontig. Ha ez a két pont egybeesne, az [2] szerint azt jelentené, hogy ω a lengőrendszer egyik sajátkörfrekvenciája volna, azaz a rezonancia esete állna fenn. Példánkban a $\vec{BJ}$ — tömegmértékben Δm_3 — B-től J felé irányított távolság zérustól különböző és a berajzolt pozitív irány-nyal megegyező. Ez azt jelenti, hogy m_3 helyett $m'_3 = m_3 + \Delta m_3$ -at véve, a módosított lengőrendszernek ω az egyik sajátkörfrekvenciája lesz. A módosított lengőrendszer tehát külső erőhatás nélkül ω körfrekvenciájú sajátlengést végezhetne; a módosított tömeg $x_3 = x_{03} \cdot \sin \omega t$ törvényszerűség szerint lenghetne. Ennek a módosított rendszernek ezt a lengésképét valamelyik amplitúdó tetszés szerinti felvétele után a $C_{01}, C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{45}$ (részben valós, részben képzetes) csomópontok ismeretében könnyen megrajzolhatjuk. $\Delta m_3 \neq 0$ ismeretében (4) x_{03} -at egyértelműen megadja:

$$x_{03} = \frac{P_{03}}{\Delta m_3 \cdot \omega^2}.$$

Az x_{03} kifejezésében szereplő $\frac{1}{\Delta m_3 \cdot \omega^2}$ szorzónak rugóállandómértékben megfelelő távolságot igen egyszerű, s az eddig végzett szerkesztésbe jól beleillő szerkesztéssel is meghatározhatjuk (szaggatott vonalak a 2a ábrán).

Ha $\vec{BJ}$ a berajzolt pozitív irány-nyal ellenkezőnek adódik, Δm_3 is negatív. Az elmondottak értelemszerűen alkalmazhatók akkor is, ha a tekintetbe vett gerjesztő erő valamelyik szélső tömeget támadja.

A szerkesztés — egyszerűsége folytán — igen előnyösen alkalmazható különböző típusú rezonanciagörbék (frekvencia-munkadiagramok) pontról-pontra történő megszerkesztésére is.

Az ismertetett szerkesztő eljárásnak megfelelő számítás alkalmazásával — az egyszerűség és gyorsaság megmaradása mellett — a pontosság tetszés szerint fokozható.

² Ez az összefüggés a kinetikai szemléletből is kiadódik. Úgy tekinthetjük ugyanis, hogy az eredeti rendszert támadó gerjesztő erő m_3 -ra éppen akkora erőhatást fejt ki, mint amekkorát a hozzákapcsoltnak gondolt Δm_3 fejtene ki rá, azaz a gerjesztő erő Δm_3 -at kinetikai szempontból mindenben helyettesíti. Newton 2. axiómája alapján, ha a szokásnak megfelelően x_3 -ra és a gerjesztő erőre egymással megegyező pozitív irányt veszünk fel:

$$-\Delta m_3 \cdot \ddot{x}_3 = P_{03} \cdot \sin \omega t, \text{ vagyis } \Delta m_3 \cdot \omega^2 \cdot x_{03} = P_{03},$$

s ebből csakugyan

$$x_{03} = \frac{P_{03}}{\Delta m_3 \omega^2}$$

adódik.

3. Az eljárás alkalmazhatóságának kiterjesztése általános lineáris lengőrendszerre

Az általános lineáris lengőrendszer gerjesztett lengésének mátrix-differenciálegyenlete:

$$(5) \quad \mathbf{E}^0 \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}^0,$$

itt $\mathbf{E}^0$ és $\mathbf{U}^0$ általános szimmetrikus mátrixok, főátlójukban pozitív elemekkel, s $\mathbf{E}^0$ pozitív definit. Erre a rendszerre a 2. pontban leírt számítás és szerkesztés közvetlenül nem alkalmazható. Ahhoz, hogy a szerkesztést ilyen lengőrendszerekre is alkalmazhassuk, a lengőrendszer mozgását leíró differenciálegyenletrendszert egy vagy több (1) alakú differenciálegyenletrendszerre kell transzformálni. A transzformációt például az [5] által adott véges iterációs eljárással végezhetjük.

4. A gerjesztett lengések elmélete néhány tételének szemléletes bemutatása

Ismeretes, hogy olyan 1. ábra szerinti lengőrendszerrel, amelynek csak a j -edik tömegét támadja ω körfrekvenciájú szinuszos gerjesztő erő, a j -edik, $(j+1)$ -edik és így tovább ... n -edik tömeg nyugalomban maradhat állandósult állapotban, ha a j -edik tömegnél befogottnak képzelte, s az első $(j-1)$ tömegből álló lengőrendszernek ω az egyik sajátkörfrekvenciája. Ez az ún. *részleges lengés* jelensége; gyakorlatilag pl. veszteségmentes lengésszigetelésre hasznosítható (dinamikus lengéscsökkentő). A 3. ábra az ismertetett szerkesztés segítségével ötszabadságfokú, a 3. tömegén gerjesztett lengőrendszerre közvetlenül szemlélteti ezt a tételt; könnyen belátható, hogy a szerkesztésnek ebben a tekintetben lényeges eredményét sem a szabadságfok, sem az egyes rugóállandók, illetve tömegek nagyságai, sem j értéke nem befolyásolják.

Azt a feltételt, hogy a j -edik tömegnél befogottnak képzelte, s az első $(j-1)$ tömegből álló lengőrendszernek ω az egyik sajátfrekvenciája, azzal elégítettük ki, hogy olyan m_1 , c_{12} , m_2 és c_{23} mérőszámokat vettünk fel, hogy a Kohn-szerkesztés baloldalt elindított törtvonala c_{23} képének jobboldali végpontjába fusson be. (Egyszerűség kedvéért úgy szerkesztettük ezt a részlengőrendszert, hogy ω a *legnagyobb* sajátkörfrekvenciája legyen.) A 2a ábra szerinti szerkesztés értelemeszerű alkalmazásával J a végesben levőnek, B végtelen távolinak, s így Δm_3 is végtelennek adódik. Ennek az a következménye, hogy (4) szerint $-P_{03} \neq 0$ lévén $x_{03}=0$ lesz, azaz a 3. tömeg mozdulatlan marad. Ennek következtében x_{03} -al nem lehet osztani, s így nem vihetjük át a 2. pontban vázolt módon a 3. tömeg mozgásegyenletének jobboldalát a baloldalra. Ez azonban eredményeink helyességét nem befolyásolja.

A 2b ábra szerkesztésének alkalmazása $x_{03}=0$ miatt $x_{04}=x_{05}=0$ eredményt szolgáltat.

x_{01} és x_{02} egyelőre határozatlanok. x_{02} abból a feltételből határozható meg, hogy a nyugalomban levő, és jobboldalról is erőmentes rugóhoz kapcsolódó 3. tömeg csak akkor lehet nyugalomban, ha a baloldalt hozzá-

kapcsolódó rugó által rá gyakorolt erő minden pillanatban kiegyensúlyozza a $P_{03} \cdot \sin \omega t$ gerjesztést, azaz ha

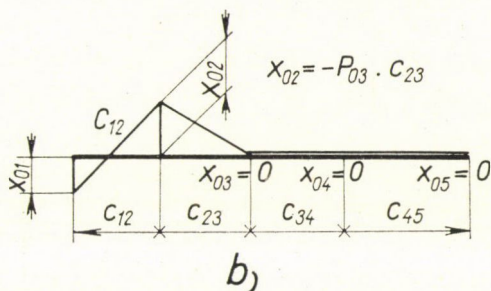
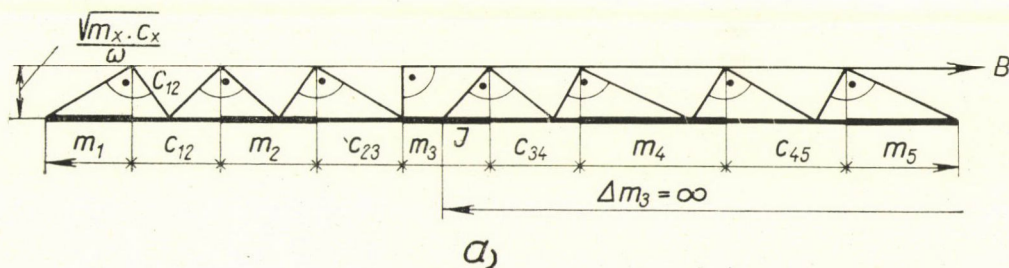
$$x_{02} = -P_{03} \cdot c_{23}.$$

Ezután x_{01} a 2b ábra szerinti módon adódik.

Figyelemreméltó jelenségként tartja számon az irodalom az úgynevezett *látszatrezonanciát* [6]. Ez abban áll, hogy adott feltételek kielégülése esetén a legalább háromszabadságfokú lengőrendszer valamennyi tömege véges amplitúdóval leng, annak ellenére, hogy valamelyik sajátkörfrekvenciájával megegyező körfrekvenciájú gerjesztő erők támadják. Csupán azt az esetet vizsgáljuk, amelyben csak egyetlen tömeget támad a rendszer valamelyik sajátkörfrekvenciájával megegyező körfrekvenciájú gerjesztő erő. Ilyen esetek szuperpozíciójával arra az általánosabb esetre is következtethetünk, amelyben valamennyi tömeget egymással megegyező körfrekvenciájú gerjesztő erők támadják.

A 2. és 3. ábrával kapcsolatban nyert eredmények alapján belátható, hogy egyetlen tömeget támadó, és e rendszer egyik a sajátkörfrekvenciájával megegyező körfrekvenciájú gerjesztő erő esetén csak akkor nem adódnak végtelen amplitúdók, ha az adott sajátkörfrekvenciához tartozó Kohn-szerkesztés a gerjesztett tömeg képét a végtelenben osztja két részre. A 4a ábra egy ilyen, négyszabadságfokú, 2. tömegén gerjesztett lengőrendszer képét és a megfelelő, balról elindított Kohn-törtvonalat mutatja. A B pont most a jobboldali, a J a baloldali végtelen távoli pontban van, így Δm_2 végtelen.

A 4b ábra lengésképén $x_{02} = 0$, azaz a 2. tömeg nyugalomban marad állandósult állapotban. x_{01} és x_{03} meghatározására csak a 2. tömeg egyensúlyát kifejező



3. ábra

$$P_{02} + \frac{1}{c_{12}} x_{01} + \frac{1}{c_{23}} x_{03} = 0$$

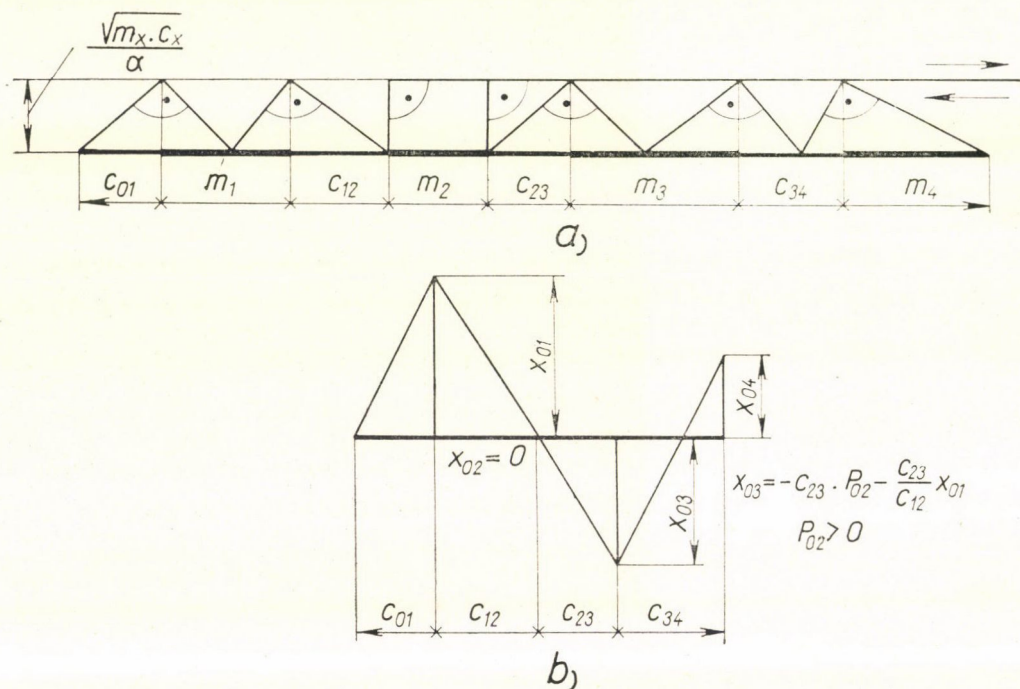
egyetlen egyenlet áll rendelkezésre. x_{01} és x_{03} meghatározása csak akkor lehetséges, ha a fizikai körülmények valami további feltétel kielégülését is megkívánják. Ha például x_{01} -et megszabjuk, $x_{03} = -c_{23} P_{02} - \frac{c_{23}}{c_{12}} x_{01}$ adódik.

A 4b ábrát ennek, és $P_{02} > 0$ -nak megfelelően rajzoltuk meg. x_{01} és x_{03} meghatározása után a többi (példánkban már csak egy ilyen van) amplitudó az ismert szerkesztéssel adódik.

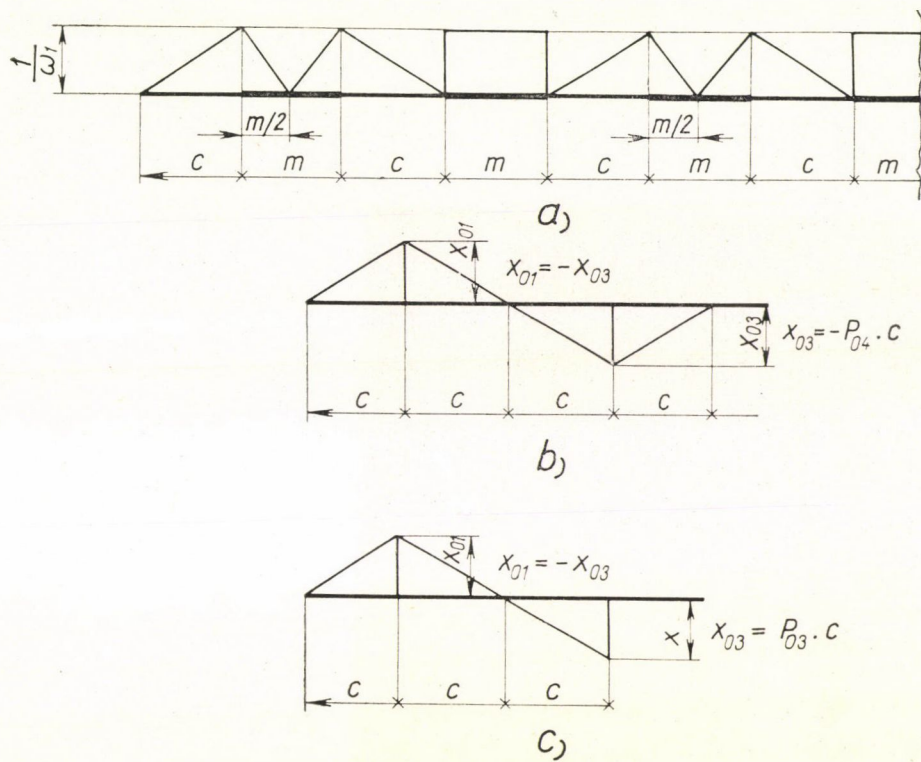
Eredményesen alkalmazható az ismertetett szerkesztés abban a különleges esetben is, ha a lengőrendszer homogén, azaz ha $m_i = m$ és $c_{ij} = c$. A következőkben néhány ilyen vizsgálatot mutatunk be. Az itt következő vizsgálat eredményeit egy általánosabb esetre érvényes jelenség felismerése és vizsgálata kapcsán Rózsa [8] a mátrixszámítás módszeres alkalmazásával nyerte.

Az 5. ábra egyik végén kötött, szabad végén $P_0 \cdot \sin \omega_1 t = P_0 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{m}}} t$

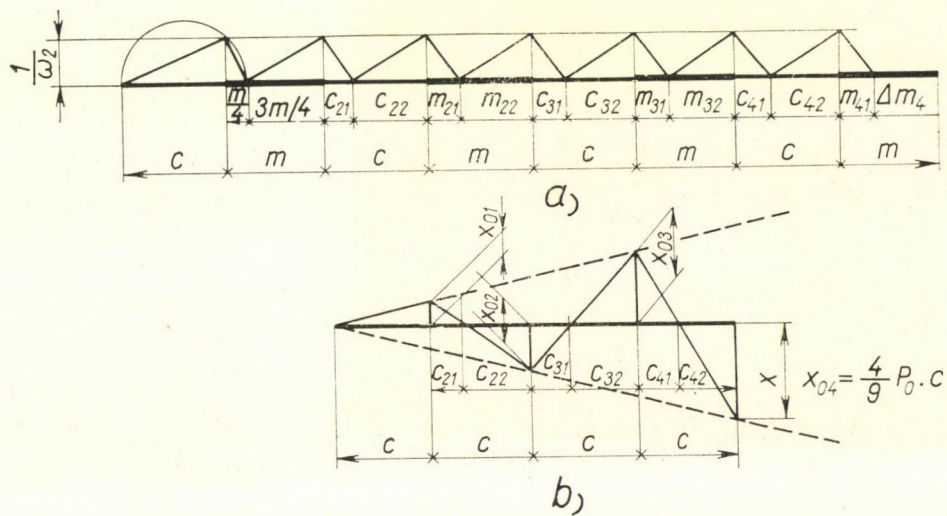
erővel gerjesztett rendszer amplitudóeloszlásának szerkesztését szemlélteti. A vázra rajzolt törtvonal (5a ábra) világosan mutatja, hogy minden második tömeg csomópontba esik, azaz nyugalomban marad. Ennek a következménye az is, hogy az amplitudók abszolút értékei megegyeznek egymással. Ha tehát



4. ábra



5. ábra



6. ábra

páros számú tömegből áll a rendszer, a végső tömeg a gerjesztés ellenére nyugalomban marad. Az 5b ábra példaképpen négyszabadságfokú rendszeren részletezi a szerkesztést. x_{03} -at a 3b ábrával kapcsolatban mondottak szerint határoztuk meg. Páratlan számú tömeg esetét háromszabadságfokú rendszeren az 5c ábra magyarázza. Itt a 2. pontban szerepelt $\Delta m_3 = m/2$ és így (4) alapján

$$x_{03} = \frac{P_{03}}{\Delta m_3 \cdot \omega_1^2} = P_{03} \cdot c.$$

Az előző feladatban ω_1 helyett $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{c \frac{m}{4}}}$ körfrekvenciát véve a 6.

ábrán látható eredmény adódik. Itt az eredmény szempontjából közömbös, hogy a szabadságfok páros vagy páratlan. Az ábrán példaképpen négyszabadságfokú rendszert vizsgálunk. A 6a ábrából következik, hogy általában:

$$c_{k1} = \frac{k-1}{2k-1} c$$

és

$$m_{k2} = \frac{2k+1}{4k} m.$$

Példánkban (4) alapján

$$x_{04} = \frac{P_{04}}{\Delta m_4 \cdot \omega_2^2} = \frac{4}{9} P_{04} c,$$

s általában:

$$x_{0k} = \frac{P_{0k}}{m_{k2} \cdot \omega_2^2} = \frac{k}{2k+1} P_{0k} c.$$

A 6b ábrából pedig ugyancsak elemi módon kapjuk, hogy általában

$$|x_{0k}| = \frac{c_{k2}}{c_{k1}} |x_{0,k-1}| = \frac{k}{k-1} |x_{0,k-1}|.$$

Ennek következtében

$$|x_{0k}| - |x_{0,k-1}| = 1,$$

azaz az amplitudók a gerjesztés helyétől számítva lineárisan csökkennek, tehát a 6b ábra szaggatottan rajzolt vonalai egyenesek.

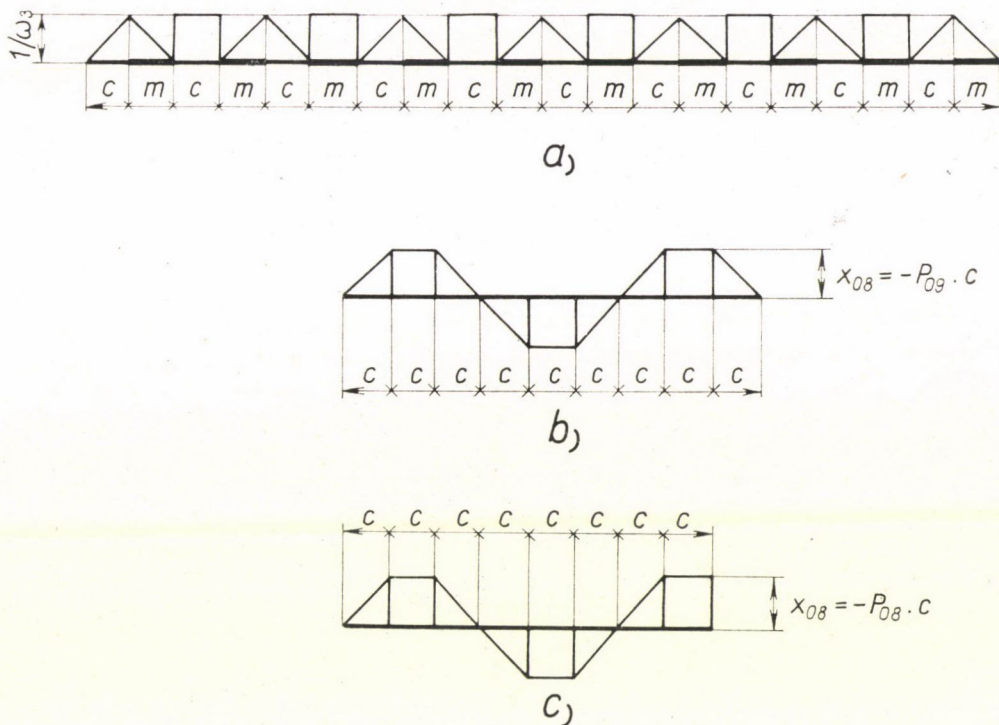
Az n indexű tömegre ($k = n$) minden határon túl növekvő szabadságfok (vagyis $n \rightarrow \infty$) esetére a fenti képletekből a következők adódnak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{n2} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta m_n = \frac{1}{2} m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{0n} = \frac{1}{2} P_{0\infty} \cdot c,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{0n}|}{|x_{0,n-1}|} = 1.$$

Vizsgáljuk meg még azt az esetet, amelyben a gerjesztő erő körfrekvenciája $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{cm}}$. A szerkesztés törtvonala ekkor a 7a ábrán látható módon alakul. Ebből kitűnik, hogy $3l - 2$ (itt $l = 1, 2, 3, \dots$) szabadságfokú modellnél $\Delta m = 0$, azaz rezonancia-jelenséget kapunk. Ha a szabadságfok $3l$, $\Delta m = \infty$, azaz a gerjesztő erővel terhelt tömeg nyugalomban marad, ha pedig a szabadságfok $3l - 1$, akkor $\Delta m = -m$. Az eddigiek alapján könnyen megérthető eredményeket a 7b és 7c ábrák tartalmaznak; az előbbi egy $3l$, az utóbbi egy $3l - 1$ szabadságfokú modellen.

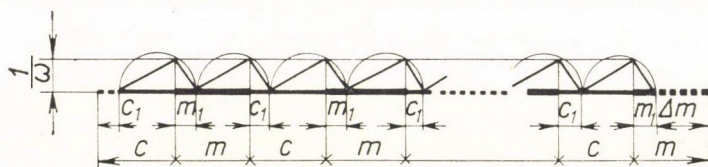
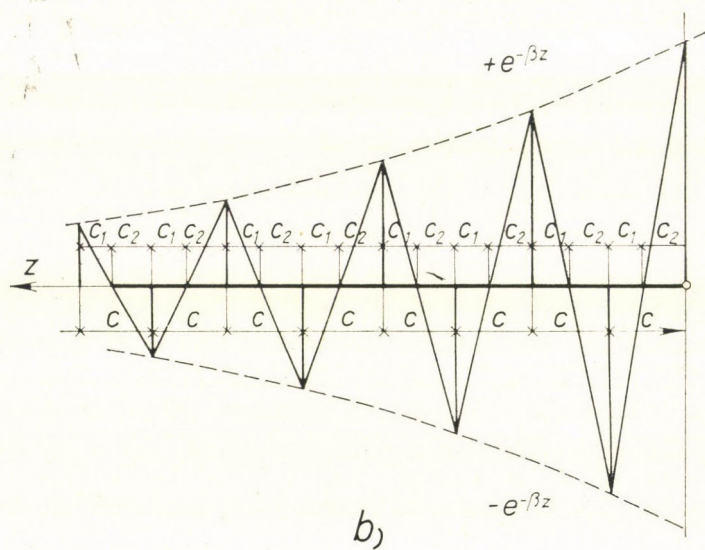
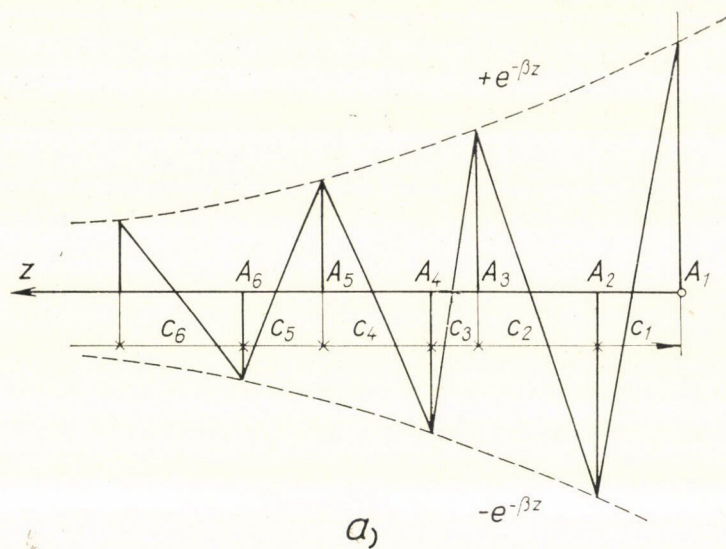


7. ábra

5. Előírt gerjesztett lengésképpel bíró lengőrendszer szerkesztése

A fentiekben ismertetett eljárás segítségével *előírt* gerjesztett lengés amplitudó eloszlással bíró lengőrendszert is szerkeszthetünk.

A 8. ábra a kötött vég felé exponenciális függvény szerint csökkenő amplitudóeloszlással bíró, egyik végén kötött, másik végén szabad és itt gerjesztett lengőrendszer paramétereinek szerkesztését mutatja be. Feladatunk szoros rokonságban van a ROUTH által vizsgált gerjesztett lengés problémával, az ún. Routh-féle jelenséggel [7]. A feladat nem egyértelműen határozott, így további kikötéseket tehetünk. Írjuk elő például, hogy a szóban forgó gerjesztett lengésképpben minden csomópont valós legyen, azaz hogy a szomszédos tömegek amplitúdói ellenkező előjelűek legyenek. Állapodjunk meg



c_1

8. ábra

továbbá abban, hogy az exponenciális függvény független változója a szabad végen levő, pontszerűnek veendő tömegtől számított távolság legyen, s tekintsük ezt arányosnak a rugóállandókban mért távolsággal.

A 8a ábrából kitűnik, hogy a megadott feltételeket a rugók képeinek végpontjait jelentő $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok tetszés szerinti felvételével kielégíthetjük. A 8b ábra azt szemlélteti, hogy a baloldali c_{01} rugóállandót kivéve egymással megegyező rugóállandókat is felvehetünk; az exponenciális függvény tulajdonságából következik, hogy ebben az esetben a csomópont mindegyik rugóképet úgy metszi ketté, hogy a „baloldali” részek egymással egyenlők és a „jobboldali” részek is egymással egyenlők. A továbbiakban ezzel az utóbbi felvétellel dolgozunk tovább. A 8c ábra szemlélteti, hogy a jobb szélső tömeget kivéve valamennyi tömeget is egymással megegyezőnek vehetjük; ennél a választásnál a legcélszerűbb, ha a tömegnek megfelelő távolságdarabokat a c rugóállandónak megfelelő távolságdarabbal megegyező hosszúságúnak vesszük. A 8c ábra ezt a lehetőséget és az n -edik tömeg amplitudójának számításához szükséges Δm_n -et mutatja. Elemi megfontolással kiadódik, hogy ebben a legutóbbi esetben a tömegek osztópontja ugyanúgy kell, hogy elhelyezkedjék, mint a rugókon a csomópontok. Ebből a 8c ábrán látható módon kiadódik az előírt csomópontokat létesítő gerjesztő körfrekvencia reciprok értékével arányos „magasság” is. Utolsó lépésként az m_x tömeg-, a c_x rugóállandó- és az ω_x [cm/sec⁻¹] körfrekvencia-léptékek közül kettőt tetszés szerint felvehetünk, a harmadik a felvettekből az $1/\omega_x = \sqrt{m_x \cdot c_x}$ kapcsolatból számítható, és ezzel a kitűzött feladat egy lehetséges megoldása rendelkezésünkre áll.

(Beérkezett: 1959. május 15.)

IRODALOM

- [1] RAUSCH, E.: *Ingenieur Archiv* **2** (1930) 203.
- [2] KOHN, P.: „Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Torsionsschwingungen von Wellen”. *Maschinenbau* **5** (1926) 220.
- [3] BOSZNYAI Á.: „Többszabadságfokú lengőrendszerek sajátkörfrekvencia- és gerjesztett lengéskép meghatározásának egy módszeréről, és annak gyakorlati alkalmazásáról”. Kandidátusi disszertáció. Budapest (1956).
- [4] SÁLYI I.: „Csillapított rendszerek gerjesztett lengései”. *A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei*, Miskolc **1** (1957) 327.
- [5] FALK, S.: „Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette”. *Ingenieur Archiv* **23** (1955) 314.
- [6] HOLZER, H.: „Die Beseitigung der Resonanzgefahr”. *Schweizerische Bauzeitung* **82** (1923) 310.
- [7] ROUTH, E. J.: *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*. Macmillan, London (1884) 230–232.
- [8] RÓZSA P.: „Elastikusán kapcsolt korpuszikuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálata a mátrixszámítás alkalmazásával”. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 51.
- [9] HOLZER, H.: „Torsionsschwingungen von Wellen mit beliebigen Massen”. *Schiffbau* **8** (1907) 823.

EINE METHODE ZUR UNTERSUCHUNG DER ERZWUNGENEN SCHWINGUNGEN VON SCHWINGUNGSSYSTEMEN MIT MEHREREN FREIHEITSGRADEN UND DEREN ANWENDUNGEN

von

Á. BOSZNAY

Zusammenfassung

Die Arbeit gibt eine — auf der (ursprünglich für die Bestimmung von Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden dienenden) Kohnschen Konstruktion [2] beruhende — Konstruktion zur Bestimmung der erzwungenen Schwingungsausschläge von Schwingungssystemen. Die Konstruktion kann auch in extremen Fällen als z. B. beim Phänomen der sogenannten partialen Schwingung und der Scheinresonanz angewendet werden.

Den Gedanken, dass eine Methode für die Bestimmung von Eigenfrequenzen auch für die Bestimmung von erzwungenen Schwingungsformen angewendet werden kann, findet man schon bei HOLZER [9]; eine solche Anwendung der Kohnschen Konstruktion — nach dem Wissen des Verfassers — wurde erstmals vom Verfasser [3] aufgeworfen.

Die Arbeit demonstriert ferner, dass die vorgeschlagene Methode auch zur Lösung des umgekehrten Problems (die Konstruktion eines Schwingungssystems mit vorgeschriebener erzwungener Schwingungsform) anwendbar ist.

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И НЕСКОЛЬКО ЕГО ПРИЛОЖЕНИЙ

Á. BOSZNAY

Резюме

Работа даёт построение для определения форм возбужденных колебаний колеблющихся систем с несколькими степенями свободы, основанное на построении Конн-а [2] для определения собственных круговых частот колеблющихся систем с несколькими степенями свободы. Построение может наглядно указывать на некоторые явления, встречающиеся в особых случаях, например, явление частичного колебания и кажущегося резонанса.

Идея применения метода определения собственных круговых частот и для определения форм возбужденных колебаний встречается уже у HOLZER-а [9]; насколько автору известно, такое применение метода было впервые предложено им.

В работе, далее, показывается, что предложенный метод может применяться и к решению обратной проблемы (построение системы колебания с заданной формой возбужденных колебаний).