

RÉFRIGÉRATION DE RETOUR DES MATIÈRES GRANULEUSES¹

par

GEORGES ADLER

Introduction

On appelle réfrigération de retour la méthode de réfrigération où le médium réfrigérant et la matière à réfrigérer circulent dans des directions opposées. L'appareil le plus simple qui sert à la réfrigération de retour des liquides se compose de deux tuyaux concentriques. Le médium réfrigérant circule dans l'espace cylindrique entre les deux tuyaux, tandis que la matière à réfrigérer circule dans le tuyau intérieur dans une direction opposée au mouvement du médium réfrigérant. Les calculs se rapportant à cet appareil réfrigérant peuvent être trouvés dans de nombreux manuels (voir p. e. [3]).

Dans le cas où la matière à réfrigérer n'est pas un liquide, l'appareil réfrigérant peut être représenté par un seul tuyau, dans lequel le liquide réfrigérant et la matière à réfrigérer continuent à circuler dans des directions opposées, de telle façon que les granules de la matière à réfrigérer sont en contact immédiat avec le médium réfrigérant.

Supposons que la capacité calorifique de l'appareil servant à mouvoir la matière à réfrigérer dans le contre-courant est nulle, c'est-à-dire qu'elle est négligeable dans nos calculs. Supposons de plus que les diamètres des granules peuvent être considérés comme nuls en comparaison avec les autres données de l'appareil et que la matière à réfrigérer se répartit uniformément dans le médium réfrigérant, c'est-à-dire que la quantité de la partie de la matière à réfrigérer qui peut être trouvée dans un certain volume du médium réfrigérant est proportionnelle à la grandeur du volume en question.

Si la matière à réfrigérer avait une conductibilité thermique infinie, alors la température s'égaliserait pendant une durée nulle dans les granules respectifs, et ainsi la température des granules serait une fonction de la seule coordonnée longitudinale parallèle à l'axe du tuyau formant l'appareil réfrigérant. Pour cette raison, les calculs relatifs au réfrigérant de retour servant à la réfrigération des liquides peuvent être appliqués dans ce cas aussi, sans aucune modification.

Par contre, dans le cas où la conductibilité thermique de la matière à réfrigérer est finie, nous devons tenir compte du processus de conduction de la chaleur se produisant dans les granules respectifs. Dans cet ouvrage nous voulons justement nous occuper de ce dernier cas des matières à réfrigérer de conductibilité thermique finie.

¹ Les calculs contenus dans cet ouvrage ont été effectués sur la commande de l'Institut de Recherche de l'Industrie du Froid, de la Viande et des Conserves.

Ce travail se rattache intimement au travail [1] de l'auteur. C'est pourquoi les équations resp. conditions (I), (a), (b), (c_1) ou bien (c_1^*) et (c_2) se rapportant au réfrigérant de retour sont conformes à celles de mêmes numéros du travail [1]. Il en résulte que la méthode de solution sera la même que celle de l'étude mentionnée [1]. Vu que dans ce travail [1] nous avons démontré l'existence de la solution du problème traité, et que cette démonstration peut être appliquée au problème actuel, nous ne nous occuperons pas de problèmes d'existences se rapportant au cas général, mais nous effectuerons les calculs traitant le cas le plus important du point de vue des applications. Donc le problème de la réfrigération de retour des matières granuleuses de conductibilité thermique finie peut être considéré comme un exemple se rapportant au type nouveau des problèmes aux limites traité dans le travail [1].

À l'encontre de l'analogie des problèmes traités dans le travail [1] et dans l'ouvrage présent, vu la différence de signe dans les conditions (b) (dans le travail présent β est négatif: $\beta = -1$), le principe du maximum figurant dans l'ouvrage [1] ne peut pas être appliqué dans le cas du réfrigérant de retour. Ainsi, au lieu du principe du maximum du travail [1], nous démontrerons deux autres principes du maximum correspondant à la nature du problème présent.

Dans le § 1 nous établirons les équations et les conditions caractérisant le processus de réfrigération. Dans le § 2 nous démontrerons deux principes du maximum et l'unicité de la solution du problème. Dans la partie I du § 3 nous effectuerons les calculs pour un cas concret, celui des granules de forme sphérique. Les démonstrations des assertions moins essentielles qui se présentent au cours des calculs seront effectuées dans la partie II du paragraphe, pour ne pas troubler la marche du calcul. Dans le § 4 nous ferons connaître le mode de détermination de la longueur du réfrigérant. Dans ce paragraphe, nous nous baserons en grand partie sur un point de vue purement physique en faisant abstraction aux considérations mathématiques rigoureuses. Enfin dans l'appendice nous examinerons la répartition des racines des équations (20.a) et (20.b), appelées équations caractéristiques, dans le plan des nombres complexes. Nous effectuerons cet examen séparément (d'ailleurs cet examen aurait lieu dans la partie II du § 3), parce qu'au cours de la solution des équations aux dérivées partielles à l'aide de la transformation de Laplace se présentent souvent des équations caractéristiques de type semblable à celles ci-dessus (voir p. e. [4], [7] p. 153, [9]), mais dans les manuels généralement connus on ne trouve pas la discussion des racines de ces équations. Nous sommes d'avis, que notre méthode² peut être appliqué avec succès dans d'autres cas aussi.

Les notations employées sont indiquées à la fin de l'article.

Définitions: Soit Σ un sous-ensemble de la frontière \mathfrak{B} du domaine \mathfrak{A} . Supposons la fonction $f(P)$ continue et admettant une borne supérieure sur l'ensemble $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} - \Sigma)$. Nous dirons alors que la fonction $f(P)$ possède une discontinuité de type **A** sur la portion Σ de la frontière. Si nous remplaçons dans cette définition la borne supérieure par la borne inférieure, nous dirons que la discontinuité est de type **A**. Dans le cas où une fonction possède simultanément une discontinuité de type **A** et de type **A** sur la portion Σ , la discontinuité sera dite de type **A**.

² L'idée de l'application du théorème de Rouché sous la forme figurant dans la démonstration est due à M. FREUD.

Nous dirons que le point P_0 de la frontière S du domaine C possède la propriété **B**, si le domaine C contient l'intérieur d'une sphère Γ , dont P_0 est sur la frontière. Dans le cas où chaque point de la frontière S possède la propriété **B**, nous dirons que la frontière S possède la propriété **B**.

On appelle surface de Liapounoff toute surface jouissant des trois propriétés suivantes (voir [5]):

1) il existe un plan tangent, et par conséquent une normale à la surface en chacun de ses points,

2) soit ϑ l'angle des normales appartenant aux points M_1 et M_2 , alors

$$\vartheta < E \overline{(M_1 M_2)}^\delta \quad (0 < \delta \leq 1),$$

où E et δ sont des nombres fixés,

3) il existe un nombre $d > 0$ qui possède la propriété suivante: une droite parallèle à la normale appartenant à un point arbitraire M de la surface n'a que tout au plus un seul point commun avec la partie de la surface qui se trouve dans la sphère de centre M et de rayon d .

Nous appelons fonction calorique d'unité du domaine C la fonction $E_C^{(\alpha)}(P, t)$ satisfaisant à l'équation de la chaleur (1) (voir [1], p. 118) pour $t > 0$ dans le domaine C limité par la surface S , de plus

1. au cas où $\alpha > 0$, continue dans

$$(C + S) \times (t \geq 0),$$

2. au cas où $\alpha = 0$, continue dans $[C \times (t \geq 0)] + [S \times (t > 0)]$, et ayant une discontinuité de type **A** sur la portion $S \times (t = 0)$ de la surface de ce domaine et qui satisfait à la condition initiale et à la condition aux limites suivantes:

$$E_C^{(\alpha)}(P, 0) = 0 \quad (P \in C)$$

$$E_C^{(\alpha)}(P, t) + \alpha \frac{\partial E_C^{(\alpha)}(P, t)}{\partial n} = 1 \quad (t > 0, P \in S).$$

Dans toute l'étude, nous supposons que les solutions de l'équation de la chaleur possèdent des secondes dérivées continues selon les coordonnées de lieu x_i et des premières dérivées continues selon le temps t sur l'ensemble, où elles satisfont à l'équation de la chaleur, de plus que la frontière S des granules est une surface mesurable [6].

§ 1. Établissement du problème

Le tuyau constituant l'appareil réfrigérant est installé le long de l'intervalle $(0, l)$ de l'axe x , et il est thermiquement isolé de son milieu. Les granules de la matière à réfrigérer resp. le liquide réfrigérant circulent dans la direction des valeurs croissantes resp. décroissantes de la coordonnée x . Les granules sont superposables et leur diamètre est négligeable en comparaison de la longueur et du diamètre du tuyau. Pour simplifier nous supposons les granules homogènes, restriction non essentielle en ce qui concerne la méthode de la solution. Nous nous limiterons au cas stationnaire, indépendant du temps, à savoir que la température du liquide réfrigérant resp. la répartition de la température dans les granules respectifs sont les fonctions de la seule coordonnée x . Cela signifie que les granules se trouvent continuellement dans les mêmes

circonstances thermiques extérieures et intérieures dans une certaine section transversale du tuyau.

Considérons un granule assujéti au système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) . Désignons par C ce granule resp. le domaine qu'il occupe. Soit S la frontière du domaine C . Suivons avec attention ce granule à partir de l'instant de son entrée dans le tuyau. Mesurons le temps à partir de cet instant. Soit $u(P, t)$ la température du granule. Cette fonction u doit satisfaire à l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad \left(a^2 = \frac{\rho_1 \sigma_1}{k} > 0 \right)$$

dans le domaine C .

Soit $F(x)$ la température du liquide réfrigérant. A l'instant t le granule C peut être trouvé au lieu $x = c_1 t$, et ainsi la température de son milieu au moment t sera

$$F(c_1 t) = f(t).$$

En raison de ce fait nous prescrivons la condition aux limites suivante sur la surface S du granule:

$$(a) \quad u(P, t) + \alpha \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = f(t) \quad (t > 0, P \in S), \quad \left(\alpha = \frac{k}{h} \geq 0 \right).$$

Nous distinguerons deux cas selon que h est fini ou bien infini. Dans le premier cas $\alpha > 0$, dans le second $\alpha = 0$.

En considérant que la fonction $f(t)$ figurant dans la condition (a) est aussi inconnue, nous avons besoin d'une équation de plus contenant la fonction $f(t)$. Cette équation sera fournie par le bilan thermique du système réfrigérant.

Considérons le segment $(x, x + dx)$ du système. Les granules arrivent à ce segment pendant la durée $t = \frac{x}{c_1}$ mesurée à partir de leur entrée dans le tuyau. Dans ce segment un granule perd la quantité de chaleur

$$-k \int_S \frac{\partial u \left(P, \frac{x}{c_1} \right)}{\partial n} dS dt$$

pendant le temps dt , donc tous les granules qui se trouvent dans le segment $(x, x + dx)$ perdent ensemble la quantité de chaleur

$$Q_1 = -k \int_S \frac{\partial u \left(P, \frac{x}{c_1} \right)}{\partial n} dS dt NK dx$$

pendant le temps dt . Le médium réfrigérant gagne dans ce segment $(x, x + dx)$ la quantité de chaleur

$$Q_2 = [F(x) - F(x + dx)] w K c_2 \rho_2 \sigma_2 dt = -w K c_2 \rho_2 \sigma_2 F'(x) dx dt$$

pendant le même temps. L'équation cherchée est fournie par l'équation $Q_1 = Q_2$ exprimant la conservation de la chaleur, l'équation nommée bilan thermique:

$$-k \int_s^{\cdot} \frac{\partial u(P, \frac{x}{c_1})}{\partial n} dS dt NK dx = -w K c_2 \rho_2 \sigma_2 F'(x) dx dt.$$

En effectuant les simplifications possibles et en introduisant la variable $t = \frac{x}{c_1}$ au lieu de x , notre équation prend la forme:

$$(b) \quad \int_s \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} dS = \gamma f'(t) \quad \left(\gamma = \frac{c_2 w \rho_2 \sigma_2}{c_1 N k} > 0 \right).$$

Finalement le problème sera complètement déterminé par la température initiale du médium réfrigérant et par la répartition initiale de la température des granules:

$$(c_1) \quad F(l) = f(t_l) = F_l \quad \left(t_l = \frac{l}{c_1} \right),$$

$$(c_2) \quad u(P, 0) = u_0(P) \quad (P \in C).$$

Dans ce qui suit nous aurons besoin de la connaissance de la valeur $F(0) = F_0$. F_0 peut être déterminé à partir de la mesure de la réfrigération à atteindre par le système réfrigérant. En effet, supposons que nous voulons dériver une quantité q de chaleur de chaque granule au cours de la réfrigération. Alors nous devons dériver en somme la quantité de chaleur

$$q_1 = q K c_1 N dt$$

de la matière à réfrigérer pendant le temps dt . La quantité totale de chaleur gagnée par le médium réfrigérant pendant le temps dt est:

$$q_2 = w K c_2 \rho_2 \sigma_2 (F_0 - F_l) dt.$$

F_0 peut être calculé à partir de la condition $q_1 = q_2$:

$$F_0 = F_l + q \frac{c_1 N}{c_2 w \rho_2 \sigma_2}.$$

De cette façon la condition (c_1) peut être remplacée par la condition

$$(c_1^*) \quad F(0) = f(0) = F_0.$$

Enfin nous résumons toutes les équations et conditions du problème:
L'équation de la chaleur:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (a^2 > 0).$$

La condition aux limites:

$$(a) \quad u(P, t) + a \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = f(t) \quad (t > 0, P \in S), (a \geq 0).$$

Le bilan thermique:

$$(b) \quad \int_S \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} dS = \gamma f'(t) \quad (t > 0), (\gamma > 0).$$

Les conditions initiales:

$$(c_1) \quad f(t_i) = F_i \quad (t_i > 0),$$

ou se qui revient au même:

$$(c_1^*) \quad f(0) = F_0,$$

et

$$(c_2) \quad u(P, 0) = u_0(P) \quad (P \in C).$$

Nous remarquons que la méthode mentionnée au commencement du § 4 du travail [1] nous permet de ramener la solution du problème, dans le cas où $u_0(P) \neq 0$, à la solution d'un problème où $u_0(P) \equiv 0$. Mais dans ce nouveau problème la condition (b) augmente d'un membre, conformément au membre $Q(t)$ figurant dans la condition (b) de l'ouvrage [1].

Dans ce qui précède nous n'avons pas tenu compte des conditions de continuité et de dérivabilité des fonctions en question. Pour fixer les idées, nous faisons les restrictions suivantes:

Condition F: la fonction $u(P, t)$ admet des secondes dérivées continues selon les coordonnées de lieu x_i et une première dérivée continue selon le temps t dans le domaine $C \times (t > 0)$, elle satisfait ici à l'équation (1) de la chaleur et remplit les conditions (a) et (b) pour $t > 0$. (Ici nous avons implicitement supposé que la fonction $u(P, t)$ est dérivable même sur la surface S du domaine C pour $t > 0$.)

Condition $F_{a>0}$: au cas où $a > 0$, $u(P, t)$ est continue dans le domaine $(C + S) \times (t \geq 0)$.

Condition $F_{a=0}$: au cas où $a = 0$, $u(P, t)$ est continue dans le domaine $\{C \times (t \geq 0)\} + \{S \times (t > 0)\}$, et possède une discontinuité de type A sur la portion $S \times (t = 0)$ de ce domaine.

Condition G: la fonction $f(t)$ admet une dérivée continue pour $t > 0$ et est continue même au point $t = 0$.

§ 2. Principes du maximum; unicité de la solution

Dans ce qui suit nous aurons besoin de trois lemmes. Les deux premiers d'entre eux sont identiques aux deux premiers lemmes figurant dans le travail [1] de l'auteur, c'est pourquoi nous ne faisons pas connaître ici leurs démonstrations.

Lemme 1. Soit

$$D = C \times (0 < t \leq T),$$

$$H = \{C \times (t = 0)\} + \{S \times (0 \leq t \leq T)\},$$

de plus

$$\Sigma = S \times [(t = t_1) + \dots + (t = t_i)] \quad (0 \leq t_1 < \dots < t_i \leq T).$$

Supposons que la fonction $V(P, t)$ satisfasse à l'équation de la chaleur (1) dans D , soit continue dans $D + H - \Sigma$ et possède une discontinuité de type A sur la portion Σ de la frontière de D . Soit M la limite supérieure des valeurs de la fonction prises sur $H - \Sigma$:

$$M = \sup_{(P, t) \in H - \Sigma} V(P, t).$$

Alors, la fonction $V(P, t)$ ne peut pas prendre une valeur supérieure à M dans D .

Lemme 2. Supposons que le point P_0 de la frontière S du domaine C possède la propriété B et que la fonction $V(P, t)$ non identiquement constante satisfait sur $C \times (0 < t \leq T)$ à l'équation (1), est continue dans

$$B = \{C \times (0 < t \leq T)\} + (P_0, T)$$

et prend le minimum de ses valeurs prises dans B au point (P_0, T) . Alors

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in l}} \inf \frac{V(P, T) - V(P_0, T)}{PP_0} > 0,$$

où l est une demie-droite partant de P_0 qui forme un angle aigu avec la normale intérieure de la sphère Γ appartenant à P_0 . (Quant à Γ , voir la définition de la propriété B.)

Le fait, qu'au cas $\alpha = 0$ la fonction $u(P, t)$ ne doit pas être continue (et en effet, elle ne l'est pas) sur la partie $S \times (t = 0)$ de la frontière de l'ensemble $C \times (t \geq 0)$ (voir la condition $F_{\alpha=0}$) causera quelque difficulté dans les démonstrations des principes du maximum, c'est pourquoi nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 3. Soit la surface S du domaine C une surface de Jordan composée des surfaces de Liapounoff en nombre fini, de plus supposons qu'existe la fonction calorique d'unité $E^{(0)}(P, t)$. Alors, au cas où $\alpha = 0$, les inégalités suivantes sont valables:

a) si

$$\inf_{P \in C} u_0(P) \geq F_1,$$

alors

$$F_0 \geq F_1;$$

b) si

$$F_l \leq \sup_{P \in C} u_0(P),$$

alors

$$F_0 \leq \sup_{P \in C} u_0(P).$$

Démonstration. a) Supposons que $F_0 < F_l$. Soit $F_0 < \mu \leq F_l$, et soit t^* la valeur la plus petite ($t^* > 0$), pour laquelle $f(t^*) = \mu$ (voir fig. 1). Soit alors $u^*(P, t)$ la solution de l'équation (1) dans $C \times (0 < t \leq t^*)$ qui satisfait à la condition initiale et à la condition aux limites suivantes:

$$u^*(P, 0) = \inf_{R \in C} u_0(R) \quad (P \in C),$$

$$u^*(P, t) = \mu \quad (0 < t \leq t^*, P \in S),$$

de plus qui possède une discontinuité de type A sur la partie $S \times (t = 0)$ de la frontière de l'ensemble $C \times (0 < t \leq t^*)$.

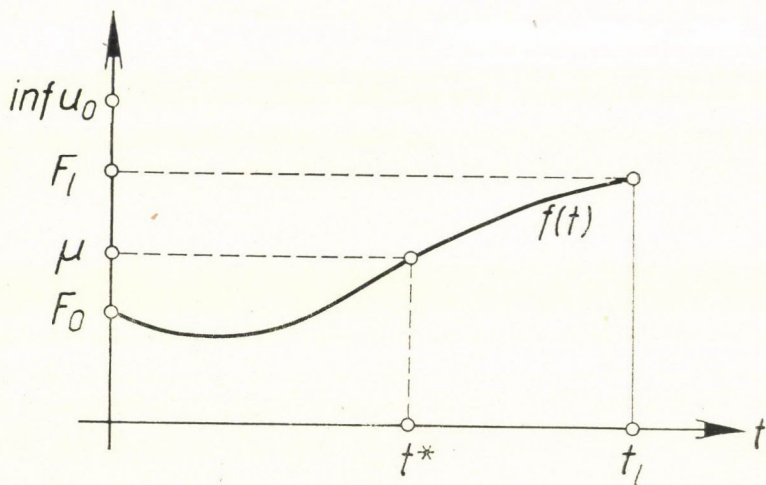


Figure 1

Alors il découle du lemme 1, que

$$(2) \quad u^*(P, t) \geq u(P, t) \quad (0 \leq t \leq t^*, P \in C).$$

D'autre part, vu que le minimum de $u^*(P, t)$ sur un ensemble arbitraire $(C + S) \times (0 < t \leq t^*)$ ($0 < t \leq t^*$) est justement la valeur μ prise sur la frontière S , il s'ensuit que

$$(3) \quad \frac{\partial u^*(P, t)}{\partial n} \leq 0 \quad (0 < t \leq t^*, P \in S).$$

En utilisant l'équation(1) et le théorème de Gauss³, on obtient le rapport suivant:

$$\begin{aligned}
 \int_C [u(P, 0) - u(P, t^*)] dC &= - \int_C \int_0^{t^*} \frac{\partial u(P, t)}{\partial t} dt dC = - \frac{1}{a^2} \int_C \int_0^{t^*} \Delta u(P, t) dt dC = \\
 (4) \quad &= - \frac{1}{a^2} \int_C \int_0^{t^*} \Delta u(P, t) dC dt = - \frac{1}{a^2} \int_0^{t^*} \int_S \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} dS dt.
 \end{aligned}$$

En considérant l'inégalité (2), en transformant de la manière ci-dessus l'intégrale de volume qui se produit, à l'aide du théorème de Gauss, en une intégrale de surface, enfin en faisant usage de l'inégalité (3), nous arrivons à l'inégalité suivante:

$$\int_C [u(P, 0) - u(P, t^*)] dC \geq \int_C [u^*(P, 0) - u^*(P, t^*)] dC = - \frac{1}{a^2} \int_0^{t^*} \int_S \frac{\partial u^*(P, t)}{\partial n} dS dt \geq 0.$$

Après avoir comparé notre résultat à (4), nous obtenons

$$(5) \quad \int_0^{t^*} \int_S \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} dS dt \leq 0.$$

Intégrons tous les deux membres de l'équation (b) selon t entre les bornes $t = 0$ et $t = t^*$:

$$(6) \quad \int_0^{t^*} \int_S \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} dS dt = \gamma \int_0^{t^*} f'(t) dt = \gamma[f(t^*) - f(0)] = \gamma(\mu - F_0).$$

Or c'est impossible, parce que selon (5) le premier membre de cette équation est non-positif, cependant le second membre est une quantité certainement positive d'après l'hypothèse.

b) Dans ce cas aussi nous pouvons procéder de la même manière qu'au cas précédent a). Soient

$$\sup_{P \in C} u_0(P) \leq \mu < F_0$$

et t^* la valeur la plus petite ($t^* > 0$) pour laquelle $f(t^*) = \mu$. En définissant la fonction auxiliaire $u^*(P, t)$ de la même façon qu'au cas a), et en considérant que la valeur μ est le maximum de $u^*(P, t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq t^*$, nous

³ Pour pouvoir appliquer le théorème de Gauss on a besoin des conditions supplémentaires se rapportant à la fonction $u(P, t)$ pour $t = 0$. Mais on peut voir aisément que si l'on écrit la limite $t \rightarrow + 0$ au lieu de $t = 0$, l'exactitude de nos transformations sera vérifiée.

pouvons aboutir à l'inégalité (6) avec cette différence que maintenant le premier membre resp. le second membre se présentent non-négatif resp. certainement négatif. C. qu. f. d.

Après cela passons à l'étude des principes du maximum.

Pour pouvoir nous exprimer plus facilement convenons de ce que c'est en effet une réfrigération (et non le chauffage) qui s'effectue dans l'appareil réfrigérant. Alors notre premier théorème exprime que la température des granules à réfrigérer ne peut pas être plus basse que la température d'entrée F_l du médium réfrigérant à supposer que le minimum de la température des granules au moment initial ne soit pas inférieur à F_l . Le deuxième théorème exprime que la température du médium réfrigérant ne peut pas dépasser le maximum de la température initiale des granules.

Dans nos théorèmes nous supposons que la surface S possède la propriété **B**. Mais vu qu'aux cas $\alpha = 0$ nous aurons besoin du lemme 3, dans ces cas nous devons encore supposer que la surface soit une surface de Jordan composée des surfaces de Liapounoff en nombre fini.

Théorème 1. Si

$$\inf_{P \in C} u_0(P) \geq F_l,^4$$

alors

$$\min_{P \in C+S} u(P, t) \geq F_l \quad (0 < t \leq t_1)$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un point (P_0, t_0) ($0 < t_0 \leq t_1$) tel que

$$u(P_0, t_0) = \mu < F_l.$$

1° Soit $\alpha > 0$. Alors (en vertu de la continuité de $u(P, t)$, voir la condition $F_{\alpha > 0}$) du théorème de ТЫКХОНОВ (voir p. e. [10]) découle l'existence d'un point (P_1, t_1) ($0 < t_1 \leq t_0$, $P_1 \in S$), pour lequel

$$u(P_1, t_1) = \mu.$$

De la continuité de $u(P, t)$ résulte l'existence d'un t^* , le plus petit possible ($0 < t^* \leq t_1$), pour lequel on peut encore trouver un point $P^* \in S$ tel que

$$u(P^*, t^*) = \mu,$$

mais

$$u(P, t) > \mu, \quad \text{si } (P, t) \in \{(C + S) \times (0 \leq t < t^*)\}.$$

voir fig. 2). Alors il s'ensuit du lemme 2 que

$$(7) \quad \frac{\partial u(P^*, t^*)}{\partial n} < 0.$$

Il vient de la condition (a) en vertu de (7) que

$$\min_{P \in C+S} u(P, t^*) = \mu > f(t^*).$$

⁴ Au cas de $\alpha > 0$, en vertu de la condition de continuité se rapportant à $u(P, t)$ (condition $F_{\alpha > 0}$) on peut écrire „minimum" au lieu de „infimum".

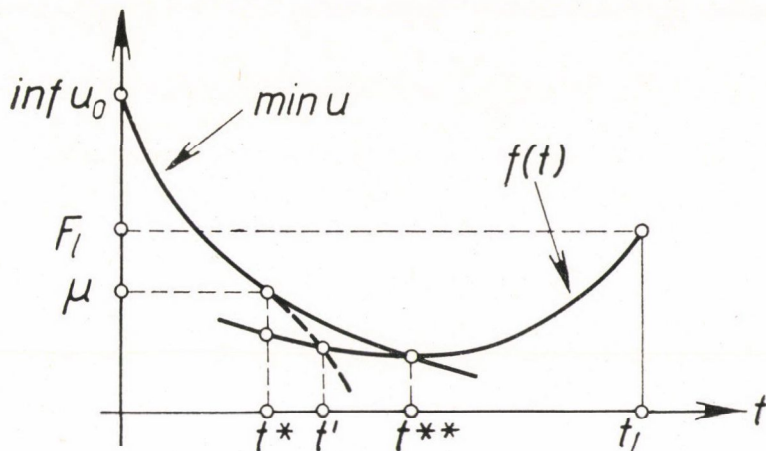


Figure 2

Pour cela à fortiori

$$u(P, t^*) > f(t^*) \quad (P \in S)$$

pour chaque point P de S , et de cette manière il découle de (a) que

$$\frac{\partial u(P, t^*)}{\partial n} < 0 \quad (P \in S)$$

pour chaque point $P \in S$.

En faisant usage de cette inégalité on obtient de (b):

$$f'(t^*) < 0.$$

Étant donné que

$$f(t^*) < F_l \text{ et } f'(t^*) < 0,$$

il doit exister un point $t^{**} > t^*$, le plus proche à droite de t^* , où

$$f'(t^{**}) = 0.$$

Dans l'intervalle $t^* < t \leq t^{**}$ la courbe $\min_{P \in C+S} u(P, t)$ ne peut pas couper la courbe $f(t)$. En effet, si elle la coupe, alors désignons par t' ($t^* < t' \leq t^{**}$) le point d'intersection le plus proche de t^* . Étant donné que la fonction $f(t)$ est strictement décroissante dans l'intervalle $t^* \leq t \leq t'$, c'est pourquoi

$$\min_{P \in C+S} u(P, t') < \min_{P \in C+S} u(P, t^*) = \min_{\substack{P \in C+S \\ 0 \leq t \leq t^*}} u(P, t),$$

et ainsi

$$\min_{P \in C+S} u(P, t') = \min_{\substack{P \in C+S \\ 0 \leq t \leq t'}} u(P, t) = u(P', t') \quad (P' \in S).$$

Donc, en vertu du lemme 2

$$\frac{\partial u(P', t')}{\partial n} < 0;$$

d'autre part en vertu de (a)

$$\frac{\partial u(P', t')}{\partial n} = 0.$$

Nous sommes ainsi arrivés à une contradiction. Par contre si les deux courbes ne se coupent pas dans l'intervalle $t^* < t \leq t^{**}$, donc même pas au point t^{**} , alors il résulte de (a):

$$\frac{\partial u(P, t^{**})}{\partial n} < 0 \quad (P \in S)$$

pour chaque point $P \in S$ et de cette manière il découle de (b):

$$f'(t^{**}) < 0,$$

ce qui contredit le choix de t^{**} .

2° Soit $\alpha = 0$. Envisageons maintenant la condition (a) réduite simplement à la condition

$$(8) \quad u(P, t) = f(t) \quad (P \in S).$$

En se basant sur le lemme 3a) on a $f(0) = F_0 \geq F_l$, et de cette façon la fonction $f(t)$ atteint le minimum de ses valeurs prises dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_l$ à un point intérieur t^* de cet intervalle (fig. 3). (Il existe peut-être plusieurs points de cette espèce.) Il résulte de la définition de t^* et du lemme 1 que la fonction $u(P, t)$ atteint le minimum de ses valeurs prises dans $(C + S) \times (0 < t \leq t^*)$ au moment t^* , et ce qui est plus, en vertu de (8), simultanément sur toute la frontière de C . Pour cela il découle du lemme 2 que

$$\frac{\partial u(P, t^*)}{\partial n} < 0 \quad (P \in S)$$

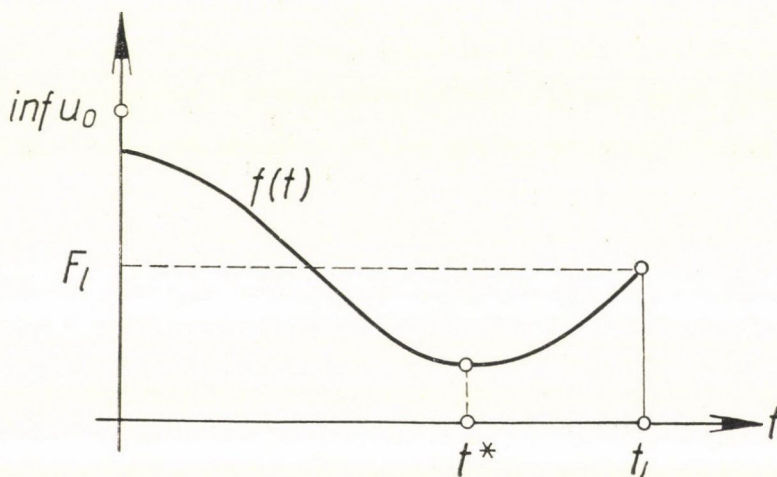


Figure 3

pour chaque point $P \in S$, et de cette manière, selon la condition (b)

$$(9) \quad f'(t^*) < 0.$$

D'autre part du fait que t^* est un point intérieur de l'intervalle $0 \leq t \leq t_1$, et ici $f(t)$ a un minimum, il résulte $f'(t^*) = 0$, ce qui contredit (9). C. qu. f. d.

Théorème 2. Si

$$F_l \leq \sup_{P \in C} u_0(P),^5$$

alors

$$f(t) \leq \sup_{P \in C} u_0(P) \quad (0 < t \leq t_1).$$

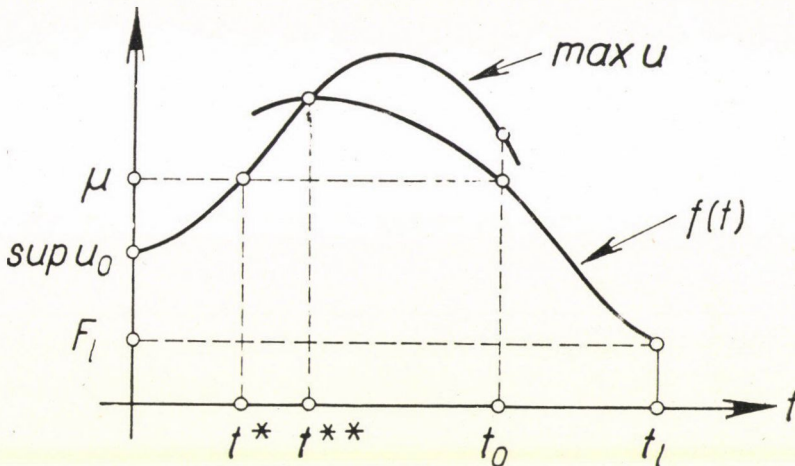


Figure 4

Démonstration. Supposons qu'il existe une valeur $t = t_0$, pour laquelle

$$f(t_0) = \mu > \sup_{P \in C} u_0(P).$$

1° Soit $\alpha > 0$. En tenant compte de ce que $f(t)$ n'est pas identiquement constante (en effet, $f(t_1) = F_l < \mu$), nous pouvons choisir les valeurs de μ et de t_0 de manière telle que

$$f'(t_0) < 0$$

(fig. 4). Alors il résulte de la condition (b) qu'il existe un point $P_0 \in S$ tel que

$$\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial n} < 0,$$

et de cette manière

$$\max_{P \in C+S} u(P, t_0) > f(t_0) = \mu.$$

⁵ Au cas de $a > 0$, en vertu de la condition $F_{a>0}$, on peut écrire „maximum“ au lieu de „supremum“.

Il s'ensuit de la continuité de $u(P, t)$ (condition $F_{a>0}$) en reproduisant la suite des idées suivie au commencement de la démonstration du théorème 1, qu'il existe un t^* ($0 < t^* < t_0$), le plus petit pour lequel on peut trouver un point $P^* \in S$ tel que

$$u(P^*, t^*) = \mu,$$

mais

$$u(P, t) < \mu, \quad \text{si } (P, t) \in \{(C + S) \times (0 \leq t < t^*)\}.$$

Alors il découle du lemme 2 que

$$(10) \quad \frac{\partial u(P^*, t^*)}{\partial n} > 0.$$

On obtient de la condition (a) d'après (10):

$$\max_{P \in C+S} u(P, t^*) = u(P^*, t^*) < f(t^*),$$

et de cette façon il s'ensuit de (a), conformément au résultat obtenu dans la démonstration du théorème 1, que

$$\frac{\partial u(P, t^*)}{\partial n} > 0 \quad (P \in S)$$

pour chaque point $P \in S$. De là en vertu de (b) il résulte

$$f'(t^*) > 0.$$

Étant donné que $f'(t_0) < 0$ et $f'(t^*) > 0$, il faut qu'il existe un point t^{**} ($t^* < t^{**} < t_0$), le plus proche de t^* , pour lequel

$$f'(t^{**}) = 0.$$

En reproduisant mot à mot la partie de la démonstration du théorème 1 qui vient sur ce point, n'en changeant que le terme minimum avec celui maximum et le signe $<$ avec le signe $>$, nous aboutissons à l'inégalité

$$f'(t^{**}) > 0,$$

ce qui contredit la définition de t^{**} .

2° Soit $a = 0$. Nous nous référons de nouveau au fait que la condition (a) au cas de $a = 0$ se réduit à la condition (8). Puisque selon le lemme 3b)

$$f(0) = F_0 \leq \sup_{P \in C} u_0(P),$$

la fonction $f(t)$ prend le maximum de ses valeurs prises dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_i$ en un point t^* intérieur à cet intervalle. En suivant complètement les raisonnements employés dans le point 2° de la démonstration du théorème 1, on obtient les résultats $f'(t^*) > 0$ et $f'(t^*) = 0$, qui se contredisent mutuellement. C. qu. f. d.

Corollaire. L'unicité du système de solution $\{u(P, t), f(t)\}$ résulte d'un quelconque des principes du maximum ci-dessus de la manière bien connue.

En effet, s'il existait deux systèmes de solution, notamment $\{u_1, f_1\}$ et $\{u_2, f_2\}$, alors le système $\{u_1 - u_2, f_1 - f_2\}$ satisfairait aux conditions initiales *homogènes*, c'est pourquoi nous aurions en même temps, en vertu du théorème 1 resp. du théorème 2,

$$u_1 - u_2 \geq 0, \quad u_1 - u_2 \leq 0,$$

resp.

$$f_1 - f_2 \geq 0, \quad f_1 - f_2 \leq 0,$$

d'où l'on obtiendrait $u_1 - u_2 \equiv 0$, resp. $f_1 - f_2 \equiv 0$, et suivant la condition (a) $f_1 - f_2 \equiv 0$, resp. $u_1 - u_2 \equiv 0$. Ce dernier résultat $u_1 - u_2 \equiv 0$ découle du théorème d'unicité bien connu (voir [9] pp. 83—85) selon lequel la condition aux limites (a) (où maintenant $f(t)$ est supposée connue) détermine sans équivoque avec la condition initiale (c_2) la fonction $u(P, t)$. Pour pouvoir se référer à ce théorème d'unicité on doit se servir des restrictions imposées sur la surface S dans le lemme 3.

§ 3. La solution du problème au cas des granules de forme sphérique

Partie I

Nous nous occuperons du cas où les granules sont des sphères de rayon R . La température initiale $u_0(P)$ figurant dans la condition (c_2) soit une constante indépendante du lieu:

$$u_0(P) = u_0 \quad (= \text{constante}).$$

Alors la fonction $u(P, t)$, en ce qui concerne les coordonnées de lieu, ne dépend que de la seule coordonnée radiale r mesurée à partir du centre de la sphère:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u(r, t).$$

Il s'ensuit que la condition (b) peut s'écrire sous la forme:

$$4 R^2 \pi \frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = \gamma f'(t),$$

ou plus simplement:

$$\frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = \delta f'(t) \quad \left(\delta = \frac{c_2}{c_1} \frac{w \varrho_2 \sigma_2}{4 R^2 \pi N k} \right).$$

Effectuons la transformation

$$u(r, t) = u_0 [1 + v(r, t)],$$

$$f(t) = u_0 [1 + g(t)].$$

Alors les nouvelles fonctions $v(r, t)$ et $g(t)$ doivent satisfaire aux équations resp. aux conditions suivantes:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = a^2 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (t > 0, \quad 0 \leq r < R),$$

$$(12) \quad v(R, t) + \alpha \frac{\partial v(R, t)}{\partial r} = g(t) \quad (t > 0),$$

$$(13) \quad \frac{\partial v(R, t)}{\partial r} = \delta g'(t) \quad (t < 0),$$

$$(14) \quad g(0) = g_0 = \frac{F_0}{u_0} - 1,$$

$$(15) \quad v(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < R).$$

Nous avons effectué cette transformation essentiellement pour obtenir une condition initiale *homogène* pour la fonction $v(r, t)$.

Nous établirons la solution du problème à l'aide du principe de Duhamel (voir [2]). Soit $E^{(\alpha)}(r, t)$ la fonction calorique d'unité du domaine $0 \leq r < R$.

En connaissance de cette fonction nous voulons établir la solution de notre problème conformément au principe de Duhamel sous la forme

$$(16) \quad v(r, t) = \int_0^t g'(\tau) E^{(\alpha)}(r, t - \tau) d\tau + g_0 E^{(\alpha)}(r, t).$$

Étant donné que cette fonction satisfait à l'équation (11) et aux conditions (12) et (15) dans des conditions suffisamment faibles concernant la fonction $g(t)$ — conditions qui seront vérifiées —, notre problème se réduit à la détermination de la fonction $g(t)$ à partir de la condition (13). La fonction $g(t)$ sera calculée à l'aide de la transformation de Laplace.

Soit \mathcal{L} l'opérateur de la transformation de Laplace selon la variable t . Par la suite nous nous servirons de l'identité

$$(17) \quad \mathcal{L} \left[\int_0^t \Phi(\tau) \Psi(t - \tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[\Phi] \mathcal{L}[\Psi]$$

se rapportant à la transformée laplacienne de l'intégrale

$$\int_0^t \Phi(\tau) \Psi(t - \tau) d\tau$$

nommée produit de convolution des fonctions $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$.

Soient

$$\mathcal{L} [g(t)] = \varphi(p),$$

$$\mathcal{L} [E^{(\alpha)}(r, t)] = e^{(\alpha)}(r, p).$$

Remplaçons l'expression (16) dans la condition (13):

$$\int_0^t g'(\tau) \frac{\partial E^{(\alpha)}(R, t - \tau)}{\partial r} d\tau + g_0 \frac{\partial E^{(\alpha)}(R, t)}{\partial r} = \delta g'(t).$$

La transformée laplacienne de cette équation est:

$$[p \varphi(p) - g_0] \frac{\partial e^{(\alpha)}(R, p)}{\partial r} + g_0 \frac{\partial e^{(\alpha)}(R, p)}{\partial r} = \delta [p \varphi(p) - g_0],$$

d'où

$$\varphi(p) = \frac{\delta g_0}{p \left[\delta - \frac{\partial e^{(a)}(R, p)}{\partial r} \right]}$$

La transformée laplacienne $e^{(a)}(r, p)$ selon [7] est:

$$e^{(a)}(r, p) = \frac{R^2 \operatorname{sh}(a \sqrt{p} r)}{rp[(R - a) \operatorname{sh}(a \sqrt{p} R) + a a \sqrt{p} R \operatorname{ch}(a \sqrt{p} R)]}$$

Cette formule est valable pour $a > 0$ ainsi que pour $a = 0$. En dérivant selon r :

$$\frac{\partial e^{(a)}(R, p)}{\partial r} = \frac{a \sqrt{p} R \operatorname{ch}(a \sqrt{p} R) - \operatorname{sh}(a \sqrt{p} R)}{p[(R - a) \operatorname{sh}(a \sqrt{p} R) + a a \sqrt{p} R \operatorname{ch}(a \sqrt{p} R)]}$$

En remplaçant cette dérivée dans l'expression de $\varphi(p)$:

$$(18) \quad \varphi(p) = \delta g_0 \frac{(R - a) \operatorname{sh}(a \sqrt{p} R) + a a \sqrt{p} R \operatorname{ch}(a \sqrt{p} R)}{[\delta(R - a) p + 1] \operatorname{sh}(a \sqrt{p} R) + (a \delta p - 1) a \sqrt{p} R \operatorname{ch}(a \sqrt{p} R)}$$

Maintenant notre problème consistera à déterminer la transformée inverse $g(t)$ de la fonction $\varphi(p)$, ce qui se fera à l'aide de la formule

$$(19) \quad g(t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\omega - i \infty}^{\omega + i \infty} \varphi(p) e^{pt} dp$$

de Riemann—Mellin et du théorème des résidus.

Dans la formule (19), ω signifie un nombre tel que la fonction $\varphi(p)$ est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geq \omega$. L'existence d'un tel ω sera démontrée dans la partie II (point 1°) du paragraphe.

Les singularités de la fonction $\varphi(p)$ ne peuvent avoir lieu qu'aux points où le dénominateur s'annule. Les racines négatives resp. positives (dans le cas où il existe des racines positives) du dénominateur, après les substitutions

$$a \sqrt{p} R = i \mu, \quad p = -\frac{\mu^2}{a^2 R^2},$$

resp.

$$a \sqrt{p} R = \kappa, \quad p = \frac{\kappa^2}{a^2 R^2},$$

sont fournies par les racines réelles différentes de zéro des équations suivantes, nommées équations caractéristiques:

$$(20.a) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\mu + \frac{\alpha \delta}{a^2 R^2} \mu^3}{1 - \frac{\delta(R - a)}{a^2 R^2} \mu^2},$$

resp.

$$(20.b) \quad th \kappa = \frac{\kappa - \frac{\alpha \delta}{a^2 R^2} \kappa^3}{1 + \frac{\delta(R - \alpha)}{a^2 R^2} \kappa^2}.$$

Nous démontrerons dans l'appendice que les racines réelles des équations (20.a) et (20.b) fournissent toutes les racines du dénominateur de la fonction $\varphi(p)$, c'est-à-dire toutes les racines du dénominateur en question sont réelles; les racines des équations (20.a) resp. (20.b) peuvent être relevées sur les figures 5.a resp. 5.b. On peut voir immédiatement sur ces figures que le dénominateur

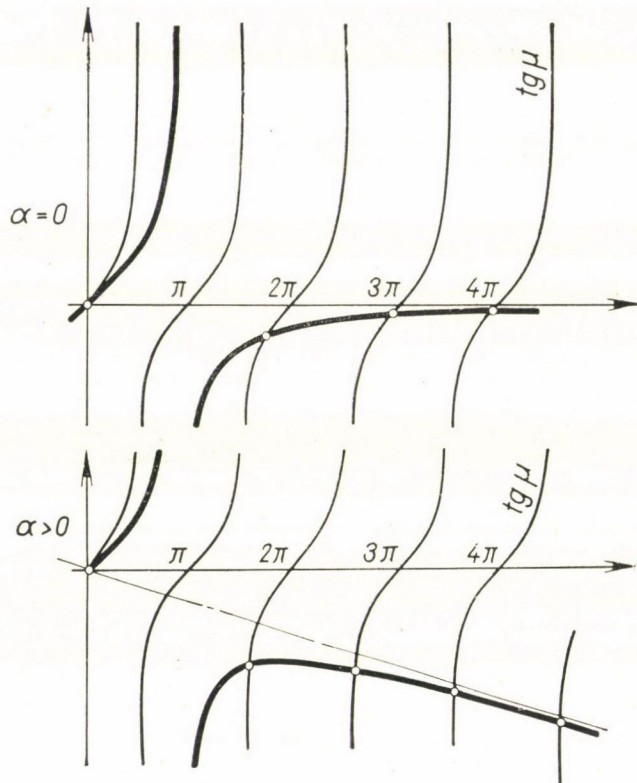


Figure 5a

de $\varphi(p)$ possède une infinité de racines négatives et un nombre fini de racines positives. (Il n'existe peut-être pas de racines positives.) Plus précisément: nous démontrerons dans l'appendice qu'au cas où

$$\frac{3 \delta}{a^2 R} \geq 1$$

le dénominateur de $\varphi(p)$ ne possède pas de racine positive, tandis qu'au cas où

$$\frac{3\delta}{a^2 R} < 1$$

il a précisément 1 racine positive. Nous reviendrons sur l'interprétation physique de ce phénomène à la fin du § 4.

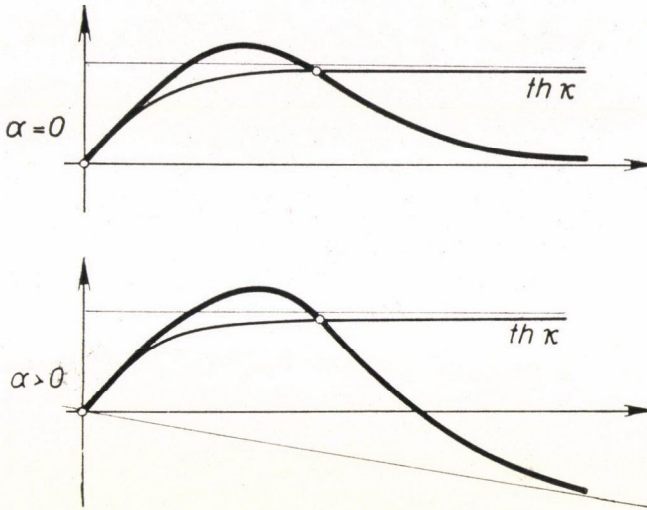


Figure 5b

Considérons la portion du chemin d'intégration figurant dans l'intégrale (19) qui se trouve entre les branches de la parabole

$$(21.a) \quad \eta^2 = \frac{4 m^2 \pi^2}{a^2 R^2} \left(\xi + \frac{m^2 \pi^2}{a^2 R^2} \right) \quad (m \text{ est un nombre entier})$$

resp. de la parabole

$$(21.b) \quad \eta^2 = \frac{4 \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}{a^2 R^2} \left(\xi + \frac{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}{a^2 R^2} \right) \quad (m \text{ est un nombre entier})$$

suivant que $a > 0$ ou bien $a = 0$. Ici ξ resp. η signifient la partie réelle resp. imaginaire de la variable p : $p = \xi + i \eta$. Désignons cette portion par L_1 , et par L_2 la portion de la parabole se trouvant dans le demi-plan $\text{Re } p \leq \omega$. Comme on le verra dans la partie II (point 2°), pour des m suffisamment grands la fonction $\varphi(p)$ ne possède pas de singularité sur la courbe L_2 , et ainsi, selon le théorème des résidus:

$$(22) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \varphi(p) e^{pt} dp = \sum_{L_1+L_2} \text{Res} [\varphi(p) e^{pt}],$$

où Σ se rapporte aux singularités de $\varphi(p)$ se trouvant à l'intérieur de la courbe fermée $L_1 + L_2$. Nous montrerons dans la partie II (point 2°), qu'au cas où $m \rightarrow \infty$, l'intégrale prise sur L_2 tend vers zéro :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{L_2} \varphi(p) e^{pt} dp = 0,$$

et ainsi

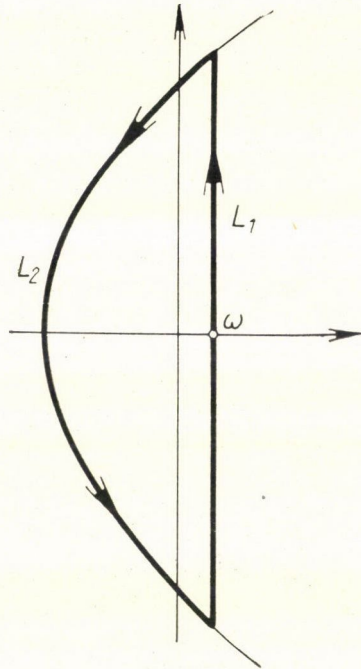


Figure 6

$$(23) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \varphi(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{L_1} \varphi(p) e^{pt} dp = \Sigma \text{Res}[\varphi(p) e^{pt}],$$

où Σ se rapporte à toutes les singularités de la fonction $\varphi(p)$.

Vu que la fonction à intégrer dans l'intégrale (19) prend des valeurs conjuguées aux lieux conjugués, la valeur de l'intégrale est purement imaginaire, c'est-à-dire la fonction $g(t)$ est réelle; cela est par ailleurs naturel selon la nature du problème.

Soient $\Phi(p)$ resp. $\Psi(p)$ le numérateur resp. le dénominateur de $\varphi(p)$:

$$\Phi(p) = \delta g_0[(R - a) \text{sh}(a\sqrt{p}R) + aa\sqrt{p}R \text{ch}(a\sqrt{p}R)],$$

$$\Psi(p) = [\delta(R - a)p + 1] \text{sh}(a\sqrt{p}R) + (a\delta p - 1)a\sqrt{p}R \text{ch}(a\sqrt{p}R).$$

Étant donné que le point $p = 0$ est un point de ramification et une racine de $\Phi(p)$ ainsi que de $\Psi(p)$, c'est pourquoi nous calculons le résidu de la fonction $\varphi(p) e^{pt}$ au point $p = 0$ à l'aide du développement en série des fonctions $\Phi(p)$, $\Psi(p)$ et e^{pt} :

$$\frac{\Phi(p)}{a \sqrt{p} R} = R + p \left(\frac{a^2 R^3}{6} + \frac{a a^2 R^2}{3} \right) + p^2(\dots) + \dots,$$

$$\frac{\Psi(p)}{a \sqrt{p} R} = p \left(\delta R - \frac{a^2 R^2}{3} \right) + p^2 \left[-\frac{a^4 R^4}{30} + \delta \left(\frac{R}{6} + \frac{a}{3} \right) a^2 R^2 \right] +$$

$$+ p^3 \left[-\frac{a^6 R^6}{840} + \delta \left(\frac{R}{120} + \frac{a}{30} \right) a^4 R^4 \right] + p^4(\dots) + \dots,$$

$$e^{pt} = 1 + pt + \dots$$

Il en résulte que

pour $\frac{a^2 R}{3 \delta} \neq 1$

$$\text{Res}_{p=0} [\varphi(p) e^{pt}] = g_0 \frac{1}{1 - \frac{a^2 R}{3 \delta}},$$

tandis que

pour $\frac{a^2 R}{3 \delta} = 1$

$$\text{Res}_{p=0} [\varphi(p) e^{pt}] = g_0 \frac{10 R(R + 7 a) + 175 a^2}{7(R + 5 a)^2} + g_0 \frac{5}{\delta(R + 5 a)} t.$$

Le fait que chacun des membres des équations caractéristiques (20.a) et (20.b) est une fonction impaire, ainsi, dans la détermination des résidus, outre la racine $p = 0$, il est suffisant de nous limiter aux racines positives des équations caractéristiques. Nous désignons les racines positives de l'équation (20.a) par μ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), et par \varkappa la racine positive (si elle existe) de l'équation (20.b). (Comme nous l'avons déjà mentionné, l'équation (20.b) a tout au plus 1 racine positive.)

Soient p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) resp. p_{-1} les valeurs de la variable p correspondant à $\mu = \mu_\nu$ resp. à \varkappa . Comme nous le verrons dans l'appendice (et en partie on peut le voir sur les figures 5.a et 5.b aussi), toutes les racines positives des équations caractéristiques ont une multiplicité simple. Par conséquent

$$\text{Res}_{l=p_\nu} [\varphi(p) e^{pt}] = \frac{\Phi(p_\nu)}{\Psi'(p_\nu)} e^{p_\nu t} \quad (\nu = -1, 1, 2, 3, \dots),$$

et pour cette raison l'expression (23) peut s'écrire de la façon suivante:

$$(24) \quad g(t) = g_0(A_0^{(0)} + A_0^{(1)} t) + \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{\Phi(p_\nu)}{\Psi'(p_\nu)} e^{p_\nu t},$$

où Σ^* signifie que le terme correspondant à $\nu = 0$ ne figure pas dans la somme, et

$$\text{pour } \frac{a^2 R}{3 \delta} \neq 1$$

on a

$$A_0^{(0)} = \frac{1}{1 - \frac{a^2 R}{3 \delta}}, \quad A_0^{(1)} = 0,$$

$$\text{pour } \frac{a^2 R}{3 \delta} = 1$$

on a

$$A_0^{(0)} = \frac{10 R(R + 7 a) + 175 a^2}{7(R + 5 a)^2}, \quad A_0^{(1)} = \frac{5}{\delta(R + 5 a)}.$$

La dérivée du dénominateur $\Psi(p)$ est:

$$\begin{aligned} \Psi'(p) = & \left[\delta(R - a) + \frac{1}{2} (\alpha \delta p - 1) a^2 R^2 \right] \text{sh} (a \sqrt{p} R) + \\ & + \left(\frac{1}{2} \delta R + \alpha \delta \right) a \sqrt{p} R \text{ch} (a \sqrt{p} R). \end{aligned}$$

En effectuant les substitutions

$$p_\nu = -\frac{\mu_\nu^2}{a^2 R^2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

et

$$p_{-1} = \frac{\kappa^2}{a^2 R^2}$$

dans (24), on obtient:

$$(25) \quad g(t) = g_0 A_0 + g_0 A_{-1} e^{\frac{\kappa^2}{a^2 R^2} t} + g_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\frac{\mu_\nu^2}{a^2 R^2} t},$$

où

$$A_\nu = \frac{(R - a) \text{tg } \mu_\nu + a \mu_\nu}{\left(R - a - \frac{a^2 R^2}{2 \delta} - \frac{\alpha}{2} \mu_\nu^2 \right) \text{tg } \mu_\nu + \left(\frac{R}{2} + a \right) \mu_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

et

$$A_{-1} = \frac{(R - a) \text{th } \kappa + a \kappa}{\left(R - a - \frac{a^2 R^2}{2 \delta} - \frac{\alpha}{2} \kappa^2 \right) \text{th } \kappa + \left(\frac{R}{2} + a \right) \kappa}$$

En y substituant la valeur de $\operatorname{tg} \mu_\nu$ de (20.a), resp. la valeur de $\operatorname{th} \kappa$ de (20.b):

$$A_\nu = \frac{2}{\left(3 - \frac{a^2 R}{\delta}\right) - \left(2 \frac{a}{R} + \delta \frac{R-a}{a^2 R^2}\right) \mu_\nu^2 - \frac{a^2 \delta}{a^2 R^3} \mu_\nu^4} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

resp.

$$A_{-1} = \frac{2}{\left(3 - \frac{a^2 R}{\delta}\right) + \left(2 \frac{a}{R} + \delta \frac{R-a}{a^2 R^2}\right) \kappa^2 - \frac{a^2 \delta}{a^2 R^3} \kappa^4}$$

Considérant — comme on peut le voir de l'équation (20.a) ou bien sur la figure 5.a — que pour $a > 0$ resp. $a = 0$ on a

$$\mu_\nu \sim (2\nu + 1) \frac{\pi}{2},$$

resp.

$$\mu_\nu \sim \nu \pi,$$

c'est-à-dire dans tous les deux cas

$$\frac{1}{\mu_\nu} = O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

on voit aisément que les coefficients A_ν tendent fortement vers zéro, et ainsi la série (25) converge bien. La vitesse de convergence est augmentée par les facteurs exponentiels.

En remplaçant la forme (25) de la fonction $g(t)$ dans l'expression (16) de $v(r, t)$, nous obtenons la répartition de la température dans les granules. Sur ce point nous avons encore à démontrer que la série (25) de $g(t)$ peut être remplacée dans l'expression (16) et que la dérivation selon r dans l'expression (16) de la fonction $v(r, t)$ après le signe d'intégrale est légitime.

La série dans (25) est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$, car au cas $a > 0$ $A_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)$, tandis qu'au cas $a = 0$

$A_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$. La série obtenue par la dérivation terme à terme de la série de $g(t)$

1. au cas $a > 0$ est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$, car ses coefficients sont d'ordre $O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$, tandis que

2. au cas $a = 0$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ elle est de nouveau absolument et uniformément convergente dans $(\varepsilon, +\infty)$, car ses coefficients sont d'ordre $O(1)$, et $g'(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ dans le voisinage du point $t = 0$, comme nous le démontrerons dans la partie II (point 3°).

Pour cette raison la série de la fonction $g(t)$ peut être en effet remplacée dans l'expression (16).

Comme il peut être vérifié à partir de la forme explicite de $E^{(\omega)}(r, t)$, dans le cas où $a = 0$, $\frac{\partial E^{(\omega)}(R, t)}{\partial r}$ est d'ordre $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ dans le voisinage du point $t = 0$, et naturellement est bornée même dans le voisinage du point $t = 0$ pour $a > 0$; la dérivation selon r dans l'expression (16) de $v(r, t)$ peut donc être effectuée après le signe d'intégrale.

Partie II

1° Il existe une valeur réelle ω telle que le dénominateur de la fonction $\varphi(p)$ ne s'annule pas dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \leq \omega$.

Démonstration. Considérant la relation entre p et μ , notre assertion sera vérifiée si nous montrons l'existence d'une valeur réelle Ω telle que l'équation (20.a) ne possède pas de racines dans le demi-plan $\operatorname{Im} \mu \leq \Omega$.

Étant donné que pour $\mu \rightarrow \xi - i\infty$ ($-\infty < \xi < +\infty$)

$$|\operatorname{tg} \mu| \rightarrow 1$$

uniformément en ξ , tandis qu'au cas $a > 0$ la valeur absolue du second membre de l'équation (20.a) tend vers ∞ , resp. au cas $a = 0$ elle tend vers 0 pour $\mu \rightarrow \infty$, par conséquent la valeur cherchée Ω existe.

2° Pour un m suffisamment grand le dénominateur de $\varphi(p)$ ne possède pas de singularité sur la courbe L_2 et

$$(26) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{L_2} \varphi(p) e^{pt} dp = 0.$$

Démonstration. Pour raison de brièveté nous nous limitons au cas $a = 0$. La cas $a > 0$ peut être traité de la même façon.

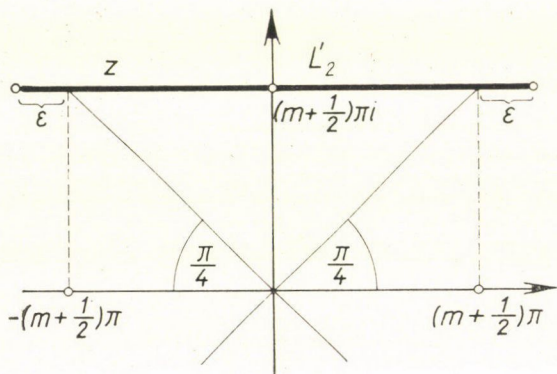


Figure 7

Employons la substitution

$$a\sqrt{p}R = z, \quad p = \frac{z^2}{a^2 R^2}$$

dans l'intégrale (26). Alors le chemin L_2 devient le chemin L'_2 donné sur la figure 7, ou $\varepsilon = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Le résultat de la substitution est donc:

$$J = \int_{L_2} \varphi(p) e^{pt} dp = \frac{2 \delta g_0}{a^2 R} \int_{L_2'} \frac{z \operatorname{sh} z}{\left(\frac{\delta}{a^2 R} z^2 + 1\right) \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z} e^{\frac{z^2}{a^2 R^2} t} dz =$$

$$= a_1 \int_{L_2'} \frac{z}{(1 + a_2 z^2) - z \operatorname{cth} z} e^{a_3 z^2 t} dz,$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes.

Effectuons la substitution

$$z = \lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

On obtient:

$$J = a_1 \int_{-(m+\frac{1}{2})\pi-\varepsilon}^{(m+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon} \frac{\lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i}{1 + a_2 \left[\lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i\right]^2 - \left[\lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i\right] \operatorname{th} \lambda} e^{a_3 \left[\lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i\right]^2 t} d\lambda.$$

Vu que $|\operatorname{th} \lambda| \leq 1$, la fraction dans la fonction à intégrer est d'ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$, ainsi elle ne peut pas posséder de singularité sur le segment

$$-\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi - \varepsilon \leq \lambda \leq \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi + \varepsilon$$

pour un m suffisamment grand. Nous obtenons l'estimation suivante pour J :

$$J = O\left(\frac{1}{m}\right) \int_{-(m+\frac{1}{2})\pi-\varepsilon}^{(m+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon} \left| e^{a_3 \left[\lambda + \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi i\right]^2 t} \right| d\lambda = O\left(\frac{1}{m}\right) \int_{-(m+\frac{1}{2})\pi-\varepsilon}^{(m+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon} e^{a_3 \left[\lambda^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2\right] t} d\lambda.$$

Ici l'intégrale est d'ordre $O(1)$, par conséquent

$$J = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

3° Au cas où $a = 0$, l'ordre de grandeur de la série dérivée de la série

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} e^{-\frac{\mu_{\nu}^2}{a^2 R^2} t}$$

est $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ dans le voisinage du point $t = 0$:

$$\psi'(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A'_{\nu} e^{-\frac{\mu_{\nu}^2}{a^2 R^2} t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad (t \sim 0).$$

Démonstration. Comme au cas $\alpha = 0$

$$A_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right),$$

on obtient pour les coefficients de la série dérivée:

$$A'_\nu = O(1).$$

Ainsi pour des constantes convenablement choisies a_1, a_2, a_3 et M (M est un nombre entier positif), l'inégalité suivante est valable:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &< a_1 + a_2 \sum_{\nu=M}^{\infty} e^{-a_3^2 \nu^2 t} < a_1 + a_2 \int_0^{\infty} e^{-a_3^2 \nu^2 t} d\nu = \\ &= a_1 + a_2 \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-a_3^2 \nu^2} d\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

§ 4. Détermination de la longueur de l'appareil réfrigérant

En remplaçant l'expression (25) de la fonction $g(t)$ dans $f(t)$, puis en remplaçant cette dernière dans l'équation $F(c_1 t) = f(t)$, de plus, en considérant la relation $x = c_1 t$, on obtient la température $F(x)$ du liquide réfrigérant:

$$(27) \quad F(x) = u_0 + (F_0 - u_0) \left[A_0^{(0)} + A_0^{(1)} t + A_{-1} e^{\frac{x^2}{a^2 R^2} \frac{x}{c_1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\frac{\mu_\nu^2}{a^2 R^2} \frac{x}{c_1}} \right].$$

La longueur l de l'appareil peut être déterminée à partir de la condition

$$(28) \quad F(l) = F_l.$$

Si $\frac{3\delta}{a^2 R} < 1$, et si nous ne tenons pas compte de la somme qui contient seulement des fonctions exponentielles de puissance négative, alors l'équation (28) peut se mettre sous la forme suivante:

$$u_0 + (F_0 - u_0) \left[A_0^{(0)} + A_{-1} e^{\frac{x^2}{a^2 R^2} \frac{l}{c_1}} \right] = F_l,$$

d'où

$$l = \frac{a^2 R^2 c_1}{x^2} \ln \frac{u_0 - F_l - A_0^{(0)}}{u_0 - F_0 - A_{-1}} \quad \left(\frac{3\delta}{a^2 R} < 1 \right).$$

Le cas $\frac{3\delta}{a^2 R} = 1$, étant pratiquement sans intérêt, nous ne le traitons pas.

Si $\frac{3\delta}{a^2 R} > 1$, et si nous n'envisageons que le premier terme de la somme

dans l'expression de la fonction $F(x)$, alors l'équation (28) fournit le résultat suivant:

$$l = \frac{a^2 R c_1}{\mu_1^2} \ln \frac{A_1}{\frac{u_0 - F_l}{u_0 - F_0} - A_0^{(0)}} \quad \left(\frac{3\delta}{a^2 R} > 1 \right).$$

Enfin nous voudrions rendre clair la signification physique de la quantité $\frac{3\delta}{a^2 R}$, et montrer pourquoi le fait que cette quantité est supérieure ou bien inférieure à 1 joue un rôle dans l'existence de la racine α .

Soit u_l la température moyenne des granules dans la section $x = l$, c'est-à-dire la température moyenne de sortie. Alors les granules transmettent au liquide réfrigérant la quantité de chaleur

$$K c_1 N \frac{4 R^3 \pi}{3} \varrho_1 \sigma_1 (u_0 - u_l)$$

par unité de temps. Le liquide réfrigérant prend pendant le même temps la quantité de chaleur

$$K c_2 w \varrho_2 \sigma_2 (F_0 - F_l)$$

des granules. Étant donné qu'il n'existe pas de transmission de chaleur vers l'extérieur, ces deux quantités sont égales:

$$K c_1 N \frac{4 R^3 \pi}{3} \varrho_1 \sigma_1 (u_0 - u_l) = K c_2 w \varrho_2 \sigma_2 (F_0 - F_l).$$

Cette équation, après avoir arrangé et utilisé les définitions de δ et de a :

$$\delta = \frac{1}{4 R^2 \pi} \frac{c_2 w \varrho_2 \sigma_2}{c_1 N k},$$

$$a^2 = \frac{\varrho_1 \sigma_1}{k},$$

peut se mettre sous la forme

$$(29) \quad \frac{3\delta}{a^2 R} = \frac{u_0 - u_l}{F_0 - F_l}.$$

Examinons ce qui se passe si $l \rightarrow \infty$ pour des valeurs u_0 et F_0 fixées. Si à ce passage à la limite u_l et F_l ont des limites, alors ces limites sont égales, car sur un chemin infiniment long les granules prennent la température du liquide réfrigérant:

$$u_\infty = F_\infty = T_\infty.$$

Alors l'équation (29) peut être écrite de cette manière:

$$(29^*) \quad \frac{3\delta}{a^2 R} = \frac{u_0 - T_\infty}{F_0 - T_\infty}$$

Au cas d'une réfrigération on a $u_0 > F_0 > T_\infty$, c'est pourquoi

$$\frac{3\delta}{a^2 R} > 1.$$

Donc, si pour $l \rightarrow \infty$ u_l et F_l possèdent des limites finies, alors

$$(30) \quad \frac{3\delta}{a^2 R} > 1;$$

il est évident que l'assertion inverse est également vraie: au cas où (30) se réalise, $u_\infty = F_\infty = T_\infty$ existe, et sa valeur peut être déterminée à partir de l'expression (27) de $F(x)$ (maintenant le membre contenant x ne se présente pas):

$$F(\infty) = u_0 + (F_0 - u_0) A_0^{(0)} = u_0 + (F_0 - u_0) \frac{1}{1 - \frac{a^2 R}{3\delta}}$$

Ce résultat coïncide parfaitement avec le résultat (29*) obtenu par un calcul élémentaire.

Par contre, au cas

$$\frac{3\delta}{a^2 R} < 1$$

les limites de u_l et F_l n'existent pas: u_l et F_l deviennent infinis. Dans ce cas la condition (29*) donne le résultat

$$\frac{u_0 - T_\infty}{F_0 - T_\infty} \leq 1,$$

et si T_∞ existait, cela donnerait

$$u_0 \leq F_0,$$

ce qui est naturellement impossible dans le cas d'une réfrigération.

Appendice

Discussion des racines des équations caractéristiques

Nous allons démontrer le théorème suivant se rapportant au dénominateur

$$\Psi(p) = [\delta(R - a)p + 1] \operatorname{sh}(a\sqrt{p}R) + (a\delta p - 1) a\sqrt{p}R \operatorname{ch}(a\sqrt{p}R)$$

de la fonction $\varphi(p)$.

Théorème.

- a) toutes les racines de la fonction $\Psi(p)$ sont réelles,
- b) les racines différentes de zéro possèdent une multiplicité simple,
- c) au cas de $\frac{3\delta}{a^2 R} \geq 1$ $\Psi(p)$ ne possède pas de racine positive, tandis qu'au

cas de $\frac{3\delta}{a^2 R} < 1$ elle possède exactement 1 racine positive.

Démonstration. Nous effectuerons la démonstration pour $a > 0$. Au cas de $a = 0$ la démonstration peut être faite d'une façon analogue, mais à l'aide d'une discussion essentiellement plus simple.

Avec les substitutions déjà employées

$$a \sqrt{p} R = i \mu$$

resp.

$$a \sqrt{p} R = \varkappa$$

de plus, en introduisant les notations

$$A = \frac{\alpha \delta}{a^2 R^2}, \quad B = \frac{\delta}{a^2 R},$$

l'équation $\Psi(p) = 0$, ou ce qui revient au même, les équations (20.a) resp. (20.b) peuvent s'écrire sous les formes suivantes:

$$(31) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\mu + A \mu^3}{1 - (B - A) \mu^2},$$

resp.

$$(32) \quad \operatorname{th} \varkappa = \frac{\varkappa - A \varkappa^3}{1 + (B - A) \varkappa^2}.$$

Les racines réelles de $\Psi(p)$ sont fournies par les racines réelles et purement imaginaires, et seulement par celles-ci de l'équation (31).⁶ Donc l'assertion sera vérifiée si l'on montre que toutes les racines de (31) sont ou bien réelle-ou bien purement imaginaires. (Les racines purement imaginaires sont fournies par les racines réelles de l'équation (32).)

Nous écrivons l'équation (31) sous la forme

$$(31^*) \quad [1 - (B - A) \mu^2] \sin \mu - (\mu + A \mu^3) \cos \mu = 0.$$

Sur le plan de la variable complexe μ , considérons le carré Q_n qui possède comme sommets les points $n\pi(1 + i)$, $n\pi(1 - i)$, $-n\pi(1 + i)$, $-n\pi(1 - i)$

⁶ Si pour une valeur $\mu = \mu^*$ tous les deux membres de l'équation (31) deviennent infinis en même temps, alors cette valeur μ^* fournit aussi une racine de la fonction $\Psi(p)$. C'est pourquoi nous considérons ces valeurs μ^* aussi comme racines de l'équation (31). De telles valeurs μ^* ne peuvent exister qu'au cas où $B - A > 0$ et où les racines de l'équation $1 - (B - A) \mu^2 = 0$ sont en même temps des racines de l'équation $\cos \mu = 0$. Ces racines sont de multiplicité simple.

(fig. 8). Il résulte des asymptotiques valables pour $\mu \rightarrow \pm i \infty$ des fonctions $\sin \mu$ et $\cos \mu$, de plus de leurs expressions précises valables le long des droites $\operatorname{Re} \mu = \pm n \pi$, que pour un n suffisamment grand, sur la frontière du carré Q_n on a :

$$|(\mu + A \mu^3) \cos \mu| > |[1 - (B - A) \mu^2] \sin \mu|,$$

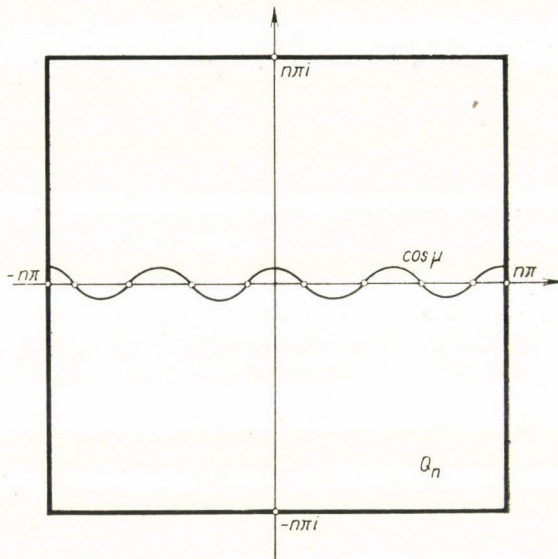


Figure 8

et ainsi selon le théorème de Rouché (voir p. e. [8]) le nombre des racines de l'équation (31*) qui se trouvent dans Q_n est égal au nombre des racines de l'équation

$$(33) \quad (\mu + A \mu^3) \cos \mu = 0$$

qui se trouvent dans Q_n (chaque racine prise autant de fois que sa multiplicité).

Pour un n suffisamment grand l'équation (33) possède $2n + 3$ racines dans Q_n . Donc l'équation (31*) et de cette manière l'équation (31) possède aussi exactement $2n + 3$ racines dans Q_n .

Dans ce qui suit nous compterons les racines de l'équation (31) dans Q_n . Pour cela nous distinguerons les 9 cas suivants :

- a) $B > \frac{1}{3}$ a. 1) $B - A > 0$,
 a. 2) $B - A < 0$,
 a. 3) $B - A = 0$,
- β) $B < \frac{1}{3}$ β . 1) $B - A > 0$,
 β . 2) $B - A < 0$,
 β . 3) $B - A = 0$,

$$\begin{aligned} \gamma) \quad B &= \frac{1}{3} & \gamma. 1) \quad B - A > 0, \\ & & \gamma. 2) \quad B - A < 0, \\ & & \gamma. 3) \quad B - A = 0. \end{aligned}$$

Avant de passer à la discussion détaillée des différents cas et de dessiner les figures, faisons observer avant tout les remarques suivantes:

I) En développant en série de Taylor tous les deux membres de l'équation (31) autour du point $\mu = 0$, l'équation prend la forme suivante:

$$(31) \quad \mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \dots = \mu + B\mu^3 + \dots$$

De là on peut voir que $\mu = 0$ est une racine de l'équation (31) de multiplicité tout au moins égale à 3, tandis que

II) au cas où $B = \frac{1}{3}$, $\mu = 0$ est une racine de l'équation (31) de multiplicité tout au moins égale à 5.

III) Au cas où $B > \frac{1}{3}$ la courbe représentant le second membre de l'équation (31) en partant du point $\mu = 0$ vers la droite passe au-dessus de la courbe $\text{tg } \mu$, tandis que

IV) au cas où $B < \frac{1}{3}$ elle passe au-dessous de la courbe $\text{tg } \mu$.

Sur cette base on peut dessiner les figures schématiques de l'équation (31) conformément aux 9 cas distingués ci-dessus (voir fig. 9).

On peut relever les résultats suivants des figures respectives (étant donné que les figures sont symétriques par rapport à l'origine, il suffit de dessiner le demi-plan droit; nos constatations se rapportent au carré entier Q_n):

a. 1) Ou bien il y a de point d'intersection (p. d'int.) sur chaque branche de la courbe tangente (le cas a. 1*), ou bien il n'y a pas de p. d'int. sur tout au plus 2 branches (le cas a. 1**), mais alors il y a tout au moins 3 p. d'int. sur la branche principale.

a. 2) Il y a 3 p. d'int. sur la branche principale, il n'y a pas de p. d'int. sur les branches qui passent par les points $\mu = \pm n\pi$, et il existe des p. d'int. sur toutes les autres branches.

a. 3) La situation est la même qu'au cas a. 2.

β . 1) Il y a des p. d'int. sur toutes les branches excepté tout au plus 2 branches.

β . 2) Il y a des p. d'int. sur toutes les branches excepté les branches passant par les points $\mu = \pm n\pi$.

β . 3) La situation est la même qu'au cas β . 2.

γ . 1) " " " " " " " " β . 1.

γ . 2) " " " " " " " " β . 2.

γ . 3) " " " " " " " " β . 2.

En tenant compte de tous ces faits, et n'oubliant pas les remarques I) és II), nous pouvons établir les faits suivants:

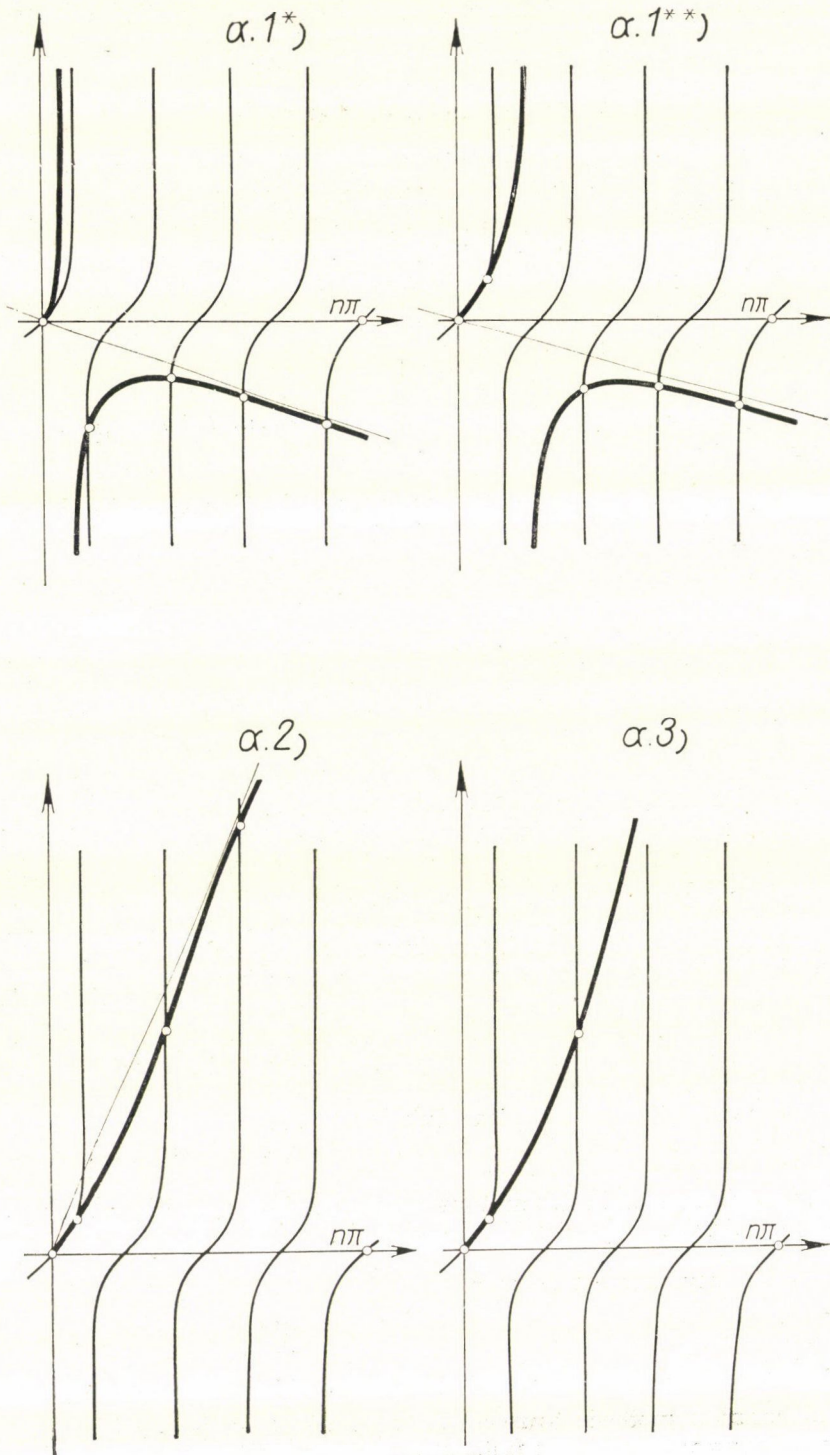


Figure 9

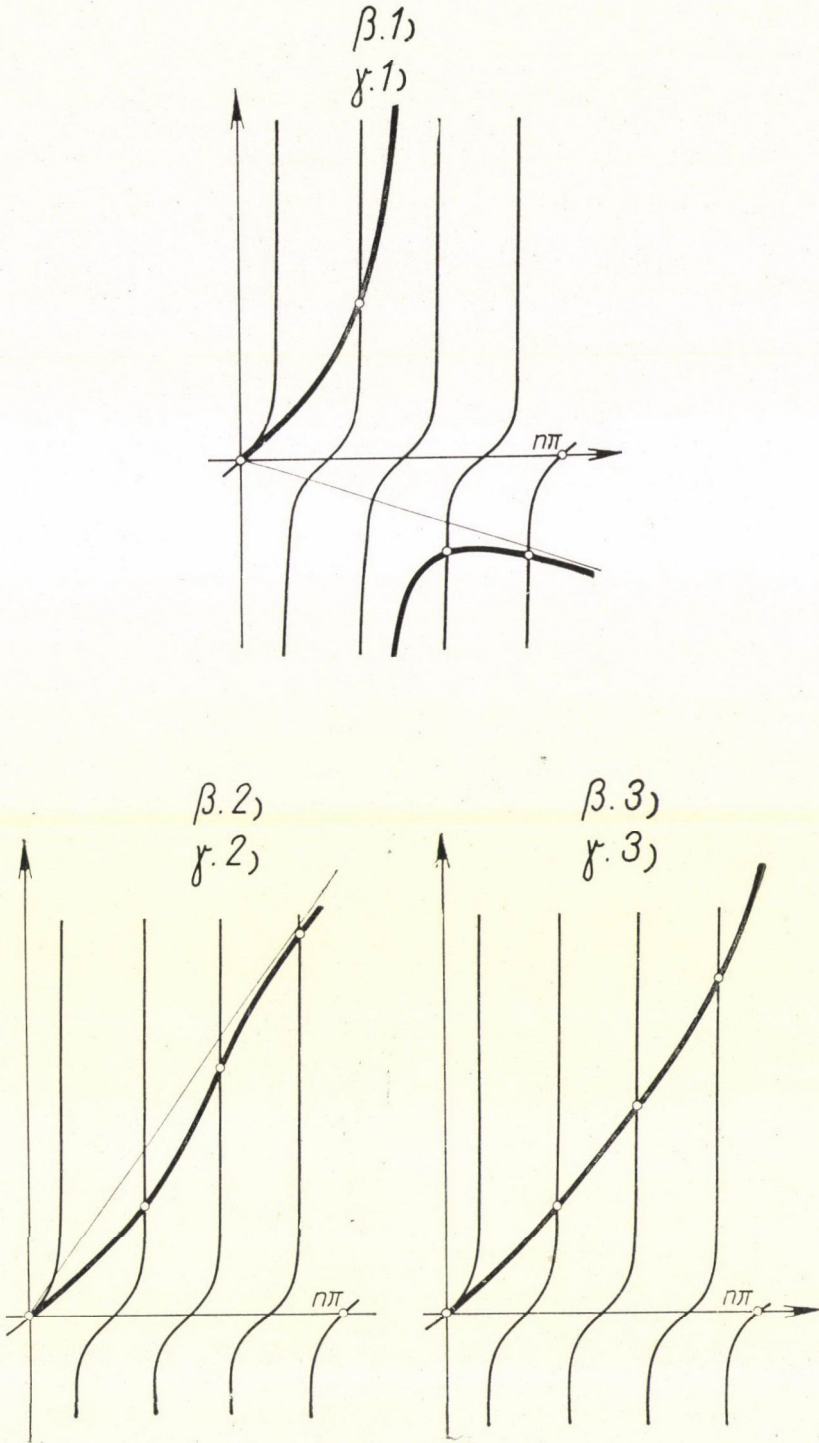


Figure 9

Au cas de $B \geq \frac{1}{3}$ l'équation (31) possède dans le carré Q_n tout au moins $2n + 3$ racines réelles. Puisque le nombre de toutes les racines dans Q_n est exactement $2n + 3$, c'est pourquoi toutes les racines de l'équation (31) sont réelles, et ces racines fournissent toutes les racines de la fonction $\Psi(p)$.

Au cas de $B < \frac{1}{3}$ l'équation (31) possède dans le carré Q_n tout au moins $2n + 1$ racines réelles. Il en résulte déjà que toutes les racines de (31) sont ou bien réelles ou bien purement imaginaires. En effet, s'il existait une racine

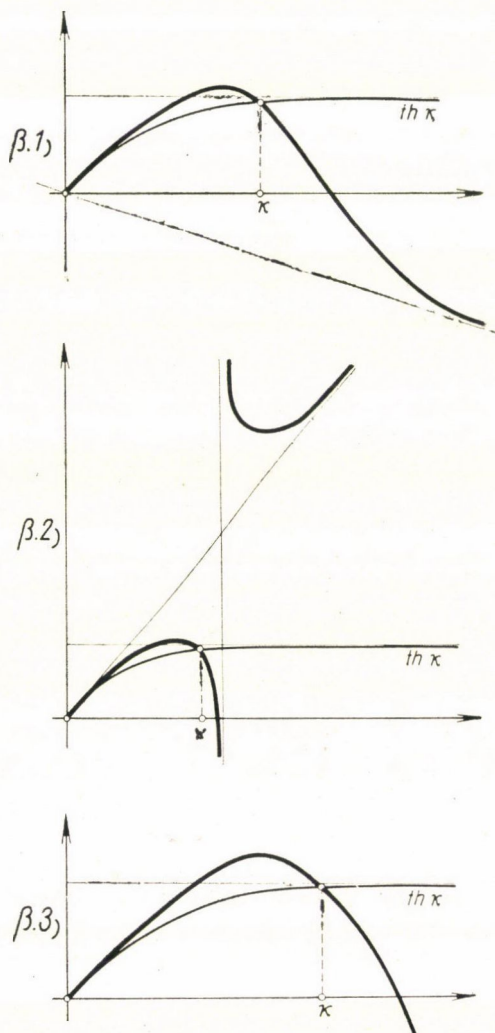


Figure 10

complexe $x + iy$ ($x \neq 0, y \neq 0$ réelles), alors les nombres $x - iy, -x + iy, -x - iy$ seraient aussi des racines, et de cette manière il existerait tout au moins $2n + 5$ racines dans Q_n , ce qui est impossible, parce que le nombre exact des racines dans Q_n est $2n + 3$. Comme la discussion de l'équation (32) nous le montrera, les deux racines encore manquantes sont en effet purement imaginaires, donc elles fournissent une racine positive de la fonction $\Psi(p)$.

Il nous reste encore à montrer qu'au cas où $B < \frac{1}{3}$ l'équation (32) possède pour un n suffisamment grand exactement 2 racines réelles différentes de zéro sur $(-n\pi, +n\pi)$.

En développant en série de Taylor tous les deux membres de l'équation (32) autour du point $x = 0$, l'équation prend la forme

$$(32) \quad x - \frac{1}{3}x^3 + \dots = x - Bx^3 + \dots$$

Étant donné que $B < \frac{1}{3}$, la courbe représentant le second membre de (32), en partant du point $x = 0$ vers la droite passe au-dessus de la courbe $th x$.

Nous distinguons les 3 cas suivants:

$$\beta. 1) \quad B - A > 0,$$

$$\beta. 2) \quad B - A < 0,$$

$$\beta. 3) \quad B - A = 0.$$

Conformément à ces 3 cas, les figures schématiques de l'équation (32) prennent les formes indiquées sur la fig. 10.

On peut en déduire que pour $B < \frac{1}{3}$ l'équation (32) possède toujours tout au moins 2 racines réelles différentes de zéro dans l'intervalle $(-n\pi, +n\pi)$ pour des n suffisamment grands; et en vérité elle possède dans ce cas exactement 2 racines réelles différentes de zéro, ce qui découle du nombre précis des racines dans Q_n .

Ainsi nous avons démontré toutes les trois assertions a), b) et c). C. qu. f. d.

NOTATIONS

x	coordonnée parallèle à l'axe de l'appareil réfrigérant.
x_1, x_2, x_3	coordonnées de lieu dans le système de coordonnées rattaché au granule.
P	point variable de l'espace (x_1, x_2, x_3) .
t	temps ($t = 0$ est l'instant d'entrée du granule).
l	longueur de l'appareil réfrigérant.
K	section transversale du tuyau constituant l'appareil réfrigérant.
C	granule examiné, resp. domaine occupé par le granule dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) .
S	surface du domaine C .
n	normale extérieure de la surface S .
V	volume d'un granule.

c_1, c_2	vitesse de circulation de la matière à réfrigérer resp. du médium réfrigérant.
ϱ_1, ϱ_2	densité de la matière à réfrigérer resp. du médium réfrigérant.
σ_1, σ_2	chaleur spécifique de la matière à réfrigérer resp. du médium réfrigérant.
k	conductibilité thermique de la matière à réfrigérer.
h	coefficient de transmission de chaleur entre la matière à réfrigérer et le médium réfrigérant.
N	nombre des granules par unité de volume.
$w = 1 - NV$	
$F(x)$	température du médium réfrigérant.
F_1, F_0	température d'entrée resp. de sortie du médium réfrigérant.
$u(P, t)$	température du granule.
u_0	température initiale du granule.

$$f(t) = F(c_1 t)$$

$$a^2 = \frac{\varrho_1 \sigma_1}{k}$$

$$\alpha = \frac{k}{h}$$

R rayon du granule.

$$\gamma = \frac{c_2 w \varrho_2 \sigma_2}{c_1 N k}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{4 R^2 \pi}$$

$$t_l = \frac{l}{c_1}$$

(Reçu le 1 Octobre 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADLER, G.: „Un type nouveau des conditions aux limites de l'équation de la chaleur”, *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 4 (1959) 109—127.
- [2] COURANT, R.—HILBERT, D.: *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer Verlag, Berlin, 1937. II. pp. 183—184.
- [3] FALTIN, H.: *Technische Wärmelehre* (2. Aufl.) Veb. Wilhelm-Knapp Verlag, Halle, 1953. pp. 312—320.
- [4] FRANK, PH.—MISES, R.: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (2. Aufl.) Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig, 1935. p. 590.
- [5] ГЮНТЕР, Н. М.: *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики*. Гостехиздат, Москва, 1953. pp. 27—28.
- [6] DE LA VALLÉE POUSSIN, CH. J.: *Cours d'Analyse Infinitésimale*. Gauthier-Villars, Paris, 1923. pp. 359—363.
- [7] ЛЫКОВ, А. В.: *Теория теплопроводности*. Гостехиздат, Москва, 1952. pp. 175—179.

- [8] SAKS, S.—ZYGmund, A.: *Analytic Functions*. Nakladem Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Warszawa—Wrocław, 1952. p. 157.
- [9] SOMMERFELD, A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. (Vorlesungen über theoretische Physik, Band VI) Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.—G., Leipzig, 1954. pp. 28., 78.
- [10] ТИХОНОВ, А. Н., САМАРСКИЙ, А. А.: *Уравнения математической физики*. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1951. pp. 184—187.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	327
§ 1. Établissement du problème	329
§ 2. Principes du maximum; unicité de la solution	333
§ 3. La solution du problème au cas des granules de forme sphérique Partie I	341
Partie II	350
§ 4. Détermination de la longueur de l'appareil réfrigérant	352
Appendice	354
NOTATIONS	361
BIBLIOGRAPHIE	362

SZEMCSÉS ANYAGOK ELLENÁRAMÚ HÚTÉSE

ADLER Gy.

Kivonat

Folyékony anyagnak folyadék által történő ellenáramú hűtésénél csupán a két közeg között fennálló hőátadási folyamatot szokás tekintetbe venni. Ez általában elegendő, és legtöbbször egyéb jelenségeket nem is lehet figyelemmel kísérni. Ezzel szemben abban az esetben, ha a hűtendő anyag szemcsés szerkezetű, akkor figyelemmel kell lenni az egyes szemcséken belül végbemenő hővezetési folyamatra is. A dolgozat ezen utóbbi esettel foglalkozik.

Az 1. §-ban a probléma matematikai megfogalmazását adjuk meg. Az ellenáramú hűtőkészülék legyen az x tengely $(0, l)$ szakasza mentén elhelyezett cső, melynek $x = 0$ végén a hűtendő anyag szemcséi, $x = l$ végén pedig a hűtőfolyadék áramlik be a csőbe. A csőben a szemcsék, illetve a hűtőfolyadék egymással szemben áramlanak. A stacionárius eset tárgyalására szorítkozunk. A hűtőfolyadék $F(x)$ hőmérséklete csak az x koordinátától függjön. Tegyük fel, hogy a szemcsék egybevágóak. Egy kiválasztott és a későbbiek során figyelemmel kísért reprezentáns C szemcse hőmérséklete a hozzárögzített (x_1, x_2, x_3) derékszögű koordinátarendszerben legyen $u(P, t)$, ahol P az (x_1, x_2, x_3) tér változó pontját és t a szemcsének a csőbe való belépésének pillanatától számított időt jelenti.

Bevezetve az $f(t) = F(c_1 t)$ jelölést, feladatunk a hővezetés (1) egyenletének az (a) és (b) perem- és a (c_1) (vagy ami lényegében ugyanaz, a (c_1^*)) és a (c_2) kezdeti feltételek melletti megoldását jelenti.

Ez a feladat teljesen analóg a szerző [1] dolgozatában tárgyalt problémával, és így a szemcsés anyagok ellenáramú hűtésének problémája ezen [1] dolgozatban tárgyalt új típusú peremértékproblémára vonatkozó példának tekinthető.

A 2. §-ban a következő két maximum-elvet bizonyítjuk be:

1. Tétel. Ha

$$\inf_{P \in C} u_0(P) \geq F_l,$$

akkor

$$\min_{P \in C+S} u(P, t) \geq F_l \quad (0 < t \leq t_l).$$

2. Tétel. Ha

$$F_l \leq \sup_{P \in C} u_0(P),$$

akkor

$$f(t) \leq \sup_{P \in C} u_0(P) \quad (0 < t \leq t_l).$$

A feladat megoldásának unicitása e két maximum-elv bármelyikének közvetlen következménye.

A 3. §-ban konkrét esetre, gömb alakú szemcsék esetére vonatkozóan végezzük el a számításokat. A megoldást az

$$f(t) = u_0 [1 + g(t)]$$

helyettesítés után a (25) alatti, jól kezelhető végtelen sor állítja elő.

A 4. §-ban a hűtőberendezés hosszának meghatározására szolgáló módszer kerül ismertetésre.

Végül a függelékben a (20.a) és (20.b) alatti, ún. karakterisztikus egyenletek gyökeinek a komplex számsíkon való eloszlását vizsgáljuk meg.

ОХЛАЖДЕНИЕ ЗЕРНИСТЫХ ВЕЩЕСТВ ВСТРЕЧНЫМ ПОТОКОМ

G.Y. ADLER

Резюме

При охлаждении жидкости встречным потоком другой жидкости принимают во внимание лишь процесс теплопередачи между двумя средами. Этого обычно достаточно, в большинстве случаев невозможно следить за другими явлениями. Напротив, в том случае, когда охлаждаемое вещество имеет зернистое строение, следует принимать во внимание и процесс теплопроводности, протекающий в отдельных зернах. Работа занимается этим случаем.

В § 1 даётся математическая формулировка проблемы. Пусть охлаждающая установка есть труба, расположенная вдоль отрезка $(0, l)$ оси x , в конце $x = 0$ которой входят зерна охлаждаемого вещества, а в конце $x = l$ охлаждающая жидкость. В трубе зернистое вещество и жидкость текут во встречном направлении. Мы ограничиваемся стационарным случаем. Температура $F(x)$ охлаждающей жидкости пусть зависит лишь от координаты x . Предположим, что зёрна конгруэнтны. Рассмотрим некоторое зерно C . Пусть $u(P, t)$ обозначает его температуру в фиксированной к нему прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) . Здесь P обозначает изменяющуюся точку пространства (x_1, x_2, x_3) , а t — время измеряемое с момента входа зерна в трубу.

Введём обозначение $f(t) = F(c_1 t)$. Наша задача заключается в решении уравнения теплопроводности (1) при граничных условиях (а) и (б) и начальных условиях (c_1) (или, что в сущности одно и то же (c_1^*) и (c_2)).

Эта задача совершенно аналогична проблеме, изученной автором в работе [1]. Поэтому проблема охлаждения зернистого вещества встречным потоком может рассматриваться как пример граничной задачи, рассматриваемой в работе [1].

В § 2 доказывается два следующих принципа максимума:

Теорема 1. Если

$$\inf_{P \in C} u_0(P) \geq F_1,$$

то

$$\min_{P \in C+S} u(P, t) \geq F_1. \quad (0 < t \leq t_1).$$

Теорема 2. Если

$$F_1 \leq \sup_{P \in C} u_0(P),$$

то

$$f(t) \leq \sup_{P \in C} u_0(P) \quad (0 < t \leq t_1).$$

Единственность решения задача является непосредственным следствием любого из этих двух принципов максимума.

В § 3 вычисления проводятся для конкретного случая, случая зерен шаровой формы. Решение после постановки

$$f(t) = u_0 [1 + g(t)]$$

представляется бесконечным рядом (25).

В § 4 описывается метод определения длины охлаждающей установки.

Наконец в приложении изучается расположение корней так называемого характеристического уравнения (20. а) и (20. б) на комплексной плоскости.